

Aero- und Hydrodynamik

A. Ziegler

Institut für Theoretische Physik

Johann-Wolfgang-Goethe Universität, Frankfurt am Main

Inhaltsverzeichnis

0	Vorwort	3
1	Einleitung	4
2	Bewegungsgleichungen	5
2.0.1	Lagrange-Beschreibung	5
2.0.2	Euler-Beschreibung	5
2.1	stationäre Strömungen: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$	7
2.1.1	wirbelfreie Strömung, Potentialströmung	7
2.1.2	ideale Strömungen (mit Wirbeln) $\vec{\nabla} \times \vec{u} \neq 0$	8
2.2	Zeitabhängige Strömungen	9
2.3	Helmholtzsche Wirbelsätze	10
2.4	Randbedingungen und Eindeutigkeit	12
2.4.1	alle Bedingungen gelten	12
2.4.2	mit bewegter Oberfläche	13
2.4.3	jetzt: mit Wirbeln	13
2.4.4	jetzt nicht mehr einfach zusammenhängend	14
2.4.5	nicht rundum berandet	14
2.4.6	Zusammenfassung	14
2.5	Strömung mit Reibung	15
3	Potentialströmungen	17
3.1	Lösung der Laplace-Gleichung im freien Raum	17
3.2	Umströmung von Objekten	18
3.2.1	reines Monopolfeld : Kavitation	19
3.2.2	Dipolfelder	22
3.2.3	Methode der virtuellen Drehungen	32
3.2.4	Quellenverteilung für die Kugeloberfläche	32
4	Zweidimensionale Strömungen	34
4.1	Allgemeine Vorüberlegungen	34
4.2	Anwendungen	35
4.2.1	Punktquelle / Linienquelle	35
4.2.2	Wirbellinien	36
4.3	Methode der konformen Abbildungen	36
4.3.1	Beispiele	37
4.4	Anwendung auf Strömungsprobleme: Umströmung von Tragflächen	37
4.4.1	Umströmung einer Platte	38
4.4.2	Umströmung eines Zylinders	38
4.4.3	Umströmung unter einem Winkel	39
4.4.4	Schräge Anströmung einer Platte	39
4.4.5	Theorem von Blasius	41
4.4.6	Berechnung des Auftriebs	42
4.4.7	Berechnung des Drehmoments	42
4.4.8	Realistische Berechnungen	43
5	tsunami	44
5.1	Oberflächenwellen	44
5.2	Flachwasserwellen	45
5.3	Wellentheoretische Lösung	46

0 Vorwort

Die Dynamik der Fluide, wie die Aero- und Hydrodynamik auch genannt wird, gerät in der heutigen physikalischen Ausbildung immer mehr in den Hintergrund, das mag an den wenigen Anwendungen der Ergebnisse in aktuellen Forschungsgebieten liegen. Dennoch lassen sich viele Phänomene im Alltag erklären, ohne sehr tief in die mathematische Trickkiste greifen zu müssen. Ein Ziel des Lernens sollte die Verdrängung falscher Erklärungen von Effekten sein. Dieses Skript ist die Niederschrift der 2-stündigen Vorlesung, die PD Dr. A. Ziegler im Wintersemester 2004/2005 im Fachbereich Physik gehalten hat. Es soll *kein* Ersatz für ein Lehrbuch sein, sondern nur helfen, die in der Vorlesung besprochenen Themen wieder ins Gedächtnis zu rufen. Besonderen Dank sei auch an den Koautor Nils Lerch gerichtet, der zahlreiche Anregungen geliefert hat und nicht zuletzt für die Lesbarkeit und die Verringerung der Fehler gesorgt hat. Für die zahlreichen Bilder sei an dieser Stelle Sebastian Köhler gedankt.

Brachttal, April 2005

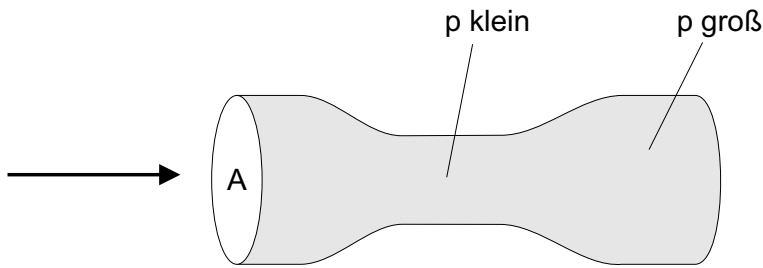


Abbildung 1: Mittels der Bernoulli-Gleichung lassen sich bei stationären Strömungen Drücke berechnen: Bei einer Verjüngung des Rohrs muss die Fließgeschwindigkeit zunehmen und somit der Druck p abnehmen, damit die Energieerhaltung nicht verletzt wird



Abbildung 2: Typische Form einer Flugzeugtragfläche (Querschnitt)

1 Einleitung

Im Folgenden möchten wir uns einen Überblick über die Grundlagen der Aero- und Hydrodynamik verschaffen, um dann einfache Fragestellungen beantworten zu können.

Wir kennen alle die Form der Rotoren bei Windkraftanlagen sowie die Flügelform bei Windmühlen. Zur Beschreibung der Flügelform benutzt man die Solidität S , die folgendermaßen über die Flügelfläche F und die Kreisfläche K des durch den Flügel überstrichenen Kreises definiert ist:

$$S = \frac{F}{K}$$

Im Falle der Windkraftanlagen muss die Solidität klein gewählt werden, während bei der langsam drehenden Windmühle die Solidität groß ist.

Wir wollen auch die Frage nach der Form einer Düse klären: Eine Flugzeugdüse ist nach hinten hin verjüngt, während die Raketendüse (Lavaldüse) nach hinten hin aufgeweitet sein muss, damit der Schub möglichst groß wird. Ganz anders wiederum funktionieren die Bypass-Triebwerke (Turbopan), bei denen die meiste Luft an der Brennkammer vorbeigeführt wird.

Eine weitere Fragestellung beschäftigt sich mit Rohrströmungen und den dabei auftretenden Größen Geschwindigkeit und Druck (siehe Abbildung 1) und der Konstruktion eines Diffusors, also einer Verjüngung des Rohres, die sich anschließend wieder langsam der ursprünglichen Rohrdicke nähern muss, damit die maximale Strömungsgeschwindigkeit erreicht wird.

Viel interessanter ist allerdings die Frage, warum ein Flugzeug fliegt, also die Frage nach dem Auftrieb. Man findet immer wieder die folgenden 3 Erklärungen für die Umströmung des in Abbildung 2 dargestellten Flügels und die resultierenden Auftriebseffekte:

- Der längere Weg am oberen Ende der Tragfläche führt zu einer höheren Geschwindigkeit der Luft und somit zu einem geringeren Druck, also zu einem Auftrieb.
- Wirbel, die sich an der Hinterkante des Flügels lösen erzeugen einen Impulsübertrag und somit die Auftriebskraft.
- Stoßerklärung: Auf den schräg gestellten Flügel prallt die anströmende Luft, die anschließend nach unten abgelenkt wird und somit nach dem Impulssatz den Flügel nach oben drückt (vgl. Bergmann-Schäfer).

2 Bewegungsgleichungen

2.0.1 Lagrange-Beschreibung

Jeder Teil wird in seiner konkreten Bewegung verfolgt, also ist die Bahnlinie $\vec{r}(t, \vec{r}_0, t_0)$ zu berechnen und somit die Bewegungsgleichung $\rho \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, t)$ zu lösen.

Nachteile: Die Kräfte sind von der Lösung $\vec{r}(t)$ abhängig und experimentell schwer zu überprüfen.

2.0.2 Euler-Beschreibung

Es wird hierbei die Geschwindigkeit der Strömung an jedem Punkt bestimmt. Also ist das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(t, \vec{r})$ zu berechnen.

Im Folgenden wird ausschließlich die Stromlinie, also die Linie, deren Tangente in Richtung der Geschwindigkeit weist, benutzt.

Bahn- und Stromlinien sind für stationäre Strömungen identisch, das heißt für den Fall $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r})$

Der Unterschied zwischen den Beiden liegt allerdings in deren Konstruktion:

- Die Stromlinie wird zu einer konkreten Zeit konstruiert.
- Die Bahnlinie ist tangential zur Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit, wenn das Teilchen am Ort \vec{r} ist.

Wir berechnen nun die Änderung der Geschwindigkeit:

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt \quad (2.1)$$

Interessant ist nun die Änderung, die sich ergibt, wenn man dem Teilchen in seiner Bewegung folgt:

$$u_1 = \frac{dx}{dt} \quad u_2 = \frac{dy}{dt} \quad u_3 = \frac{dz}{dt}$$

Setzt man dies in die Änderung der Geschwindigkeit ein, so erhält man:

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt$$

Oder für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} du_i &= \frac{\partial u_i}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial u_i}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial u_i}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y}, \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) (u_1 dt, u_2 dt, u_3 dt) + \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \\ &= \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{u} dt + \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Also ergibt sich insgesamt für die Änderung der Komponente u_i der Geschwindigkeit:

$$\frac{du_i}{dt} = \left(\vec{\nabla} u_i \right) \cdot \vec{u} + \frac{\partial u_i}{\partial t} = \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2.2)$$

Wir benutzen nun die Newtonsche Grundgleichung in einer Formulierung, die für die Hydrodynamik adäquat ist:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \right) = \vec{f} \quad (2.3)$$

Hierbei ist $\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}$ ein nichtlinearer Term und $\vec{f} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\vec{F}}{V}$ die Kraftdichte.

Wir berechnen nun folgenden Ausdruck (Die Pfeile deuten jeweils an, auf welche Objekte die

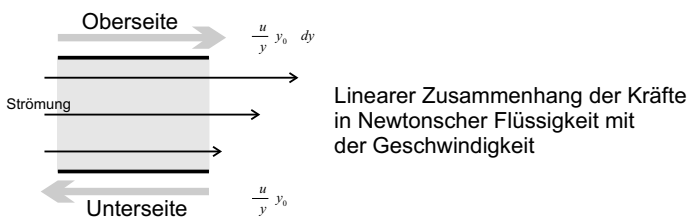


Abbildung 3: Veranschaulichung der wirkenden Kräfte an der Newtonschen Flüssigkeit, die zu den Termen mit den 2. Ableitungen führen

Differentialoperatoren wirken):

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) &= \vec{u} \times \text{rot} \vec{u} \\
 &= \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \overleftarrow{\vec{u}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\
 &= (\vec{\nabla} u_1) u_1 + (\vec{\nabla} u_2) u_2 + (\vec{\nabla} u_3) u_3 - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \\
 &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}
 \end{aligned}$$

Das liefert mit 2.3

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - \vec{u} \times \text{rot} \vec{u} \quad (2.4)$$

die Bewegungsgleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - \vec{u} \times \text{rot} \vec{u} \right) = \vec{f} \quad (2.5)$$

Für die Kraft macht man in den meisten hydrodynamischen Problemen folgenden allgemeinen Ansatz:

$$\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z - \vec{\nabla} p + \text{Reibungskraft} \quad (2.6)$$

Die Reibungskraft besteht meist aus 2 Anteilen:

$$\vec{f}_R = \mu \Delta \vec{u} + \left(\xi + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (2.7)$$

Hierbei ist μ die Zähigkeit des Fluids und ξ die meist vernachlässigbare Volumenzähigkeit. Betrachtet man die Formel, so fällt der erste Term auf und man fragt sich wieso $\mu \Delta \vec{u}$?

Man weiß, dass für die Newtonsche Flüssigkeit die Kräfte in linearem Zusammenhang mit den Geschwindigkeiten stehen; oder anders ausgedrückt die Reibungskraft ist dem Geschwindigkeitsgefälle proportional. Ausnahmen hiervon sind zum Beispiel der Ketchup (Zähigkeit ändert sich mit der Geschwindigkeit) und Eiweiß (Weißberg-Effekt beim Mixen).

Für die Gesamtkraft auf ein Volumenelement muss man allerdings nun die Differenz der beiden Kräfte auf der Oberseite und der Unterseite bilden: Die Kraft auf der Oberseite ist nun $\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} (y_0 + dy)$, während die Kraft auf der Unterseite, die um die Strecke dy versetzt ist gerade $\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} (y_0)$ ist. Die Gesamtkraft ist dann (siehe Abbildung 3):

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} (y_0 + dy) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} (y_0) \right) \approx \mu \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} dy, \text{ was gerade dem obigem Term entspricht.}$$

Schreiben wir nochmals die **Navier-Stokes-Gleichungen** hin:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \right) = \vec{f} \quad (2.8)$$

oder mit den eingesetzten Kräften:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla} (gz) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\mu}{3\rho} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (2.9)$$

Manchmal wird auch die so genannte kinematische Zähigkeit, die als $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ definiert ist, benutzt. Die *Navier-Stokes-Gleichungen* beschreiben das System nur unvollständig, da man mit den 3 Differentialgleichungen 4 Unbekannte (\vec{u}, p) beschreibt.

Aber wir erhalten eine weitere Gleichung aus der Massenerhaltung. Betrachten wir dazu ein beliebiges Volumen V mit der Masse M und stellen die Verlust- und Gewinnbilanz auf:

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3\vec{r} = - \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{F} \quad (2.10)$$

Hierbei ist $\rho \vec{v} \cdot d\vec{F}$ die aus dem Volumen V an einer Stelle der Oberfläche verlorene Masse in der Zeit dt .

Mit dem Satz von Gauß folgt nun: $\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{F} = \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d^3\vec{r}$, also ergibt sich insgesamt:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho d^3\vec{r} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d^3\vec{r} \quad (2.11)$$

Diese Formel gilt aber nun für beliebige Volumina, so dass sich folgende Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.12)$$

Für die nächsten Betrachtungen machen wir die Generalvoraussetzung einer inkompressiblen Flüssigkeit, so dass aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.13)$$

die Quellenfreiheit der Stromlinien

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.14)$$

folgt.

Wir ziehen nun einfache Folgerungen aus der Newtonschen Gleichung (Navier-Stokes-Gleichung):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \rho \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \nu \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \left(p + V_a + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (2.15)$$

V_a ist ein äußeres Potential, bzw. die dazugehörige Potentialdichte, z.B. bei magnetischen Flüssigkeiten.

Für die nächsten Abschnitte soll nun $\mu = 0$ gelten.

2.1 stationäre Strömungen: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$

2.1.1 wirbelfreie Strömung, Potentialströmung

Falls keine Wirbel vorhanden sind, so gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad (2.16)$$

Woraus mit einem eingeführten Geschwindigkeitspotential Φ sofort die Darstellung der Geschwindigkeit als Gradientenfeld folgt:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \Phi \quad (2.17)$$

Für die Potentialströmung gilt nun die wegen 2.15 **Bernoulli-Gleichung**, die die Energieerhaltung für die rein mechanische Energie ausdrückt:

$$\underbrace{p + V_a}_{\text{potentielle Energiedichte}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho u^2}_{\text{kinetische Energiedichte}} = \text{const.} \quad (2.18)$$

Wir nennen an dieser Stelle nur kurz die Anwendung der Bernoulli-Gleichung zur Berechnung von Rohrströmungen:

Dazu nehmen wir ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} = (u, 0, 0)$, welches konstant über den gesamten Rohrquerschnitt

$$u \cdot A = \text{const} \quad (2.19)$$

ist, an. Dann ist mit dieser und der Gleichung 2.18 das Problem bei bekanntem Rohrverlauf bereits gelöst, da für die Potentialströmung gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad (2.20)$$

Daraus folgt bei bekanntem ρ und bekanntem \vec{u} eine eindeutige Lösung.

Man beachte jedoch, dass diese Beschreibung keine Trägheitseffekte berücksichtigt, das heißt die Lösungen sind nur bedingt brauchbar: Nach der Potentialtheorie sollte die Flüssigkeit in einer Flasche sofort nach dem Schütteln wieder zum Stillstand kommen, was mit der Realität nicht übereinstimmt.

Am Ende ziehen wir noch einfache Folgerungen aus der Potentialbeschreibung: Aus der Gleichung $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$ folgt sofort mit der Inkompressibilität $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \Delta\Phi = 0 \quad (2.21)$$

2.1.2 ideale Strömungen (mit Wirbeln) $\vec{\nabla} \times \vec{u} \neq 0$

Multiplizieren wir die Gleichung 2.15 mit \vec{u} , so folgt, unter Berücksichtigung der Bedingung $\partial\vec{u}/\partial t = 0$

$$-\vec{u} \cdot \left(\vec{u} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) = 0 = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(p + V_a + \frac{1}{2}\rho u^2 \right) \quad (2.22)$$

Also gilt längs einer Stromlinie, das heißt $\parallel\vec{u}$:

$$\vec{\nabla} \left(p + V_a + \frac{1}{2}\rho u^2 \right) = 0 \quad (2.23)$$

$$\implies p + V_a + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{const.} \quad (\text{Energieerhaltung}) \quad (2.24)$$

Dies bedeutet, dass die Bernoulli-Gleichung den Druck p liefert, wenn das Strömungsfeld \vec{u} bereits bekannt ist. Um dieses nun zu berechnen, bilden wir die Rotation der Newton-Gleichung (2.15):

$$\vec{\nabla} \times \left(-\vec{u} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \left(p + V_a + \frac{1}{2}\rho u^2 \right) = 0 \quad (2.25)$$

Also folgt $\vec{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) = 0$. Hier stellt sich nun die Frage, ob diese Gleichung für die Berechnung von $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ ausreicht (Information aus der Bewegungsgleichung wurde ja durch die Bildung der Rotation verloren). Wir kennen die Antwort schon aus der Magnetostatik, da sich \vec{u} ebenso wie das Vektorpotential als Funktion der Rotation darstellen lässt. Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung müssen wir die allgemeine Lösung der homogenen DGL (\vec{v}) zu einer speziellen Lösung inhomogenen DGL (hier in der Darstellung als ein Integral) addieren:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{\nabla}' \times \vec{u}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (2.26)$$

Hierbei muss die Lösung der homogenen DGL $\vec{v}(\vec{r})$ so gewählt werden, dass die Randbedingungen erfüllt sind und $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = 0$ sowie $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ gilt.

Beispiele für Wirbelströmungen sind:

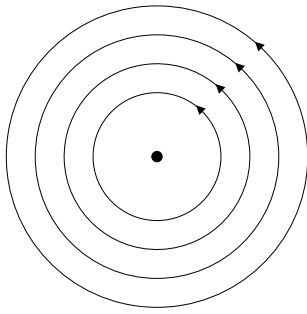


Abbildung 4: Strömungsfeld eines einfachen Wirbelfadens: Das Geschwindigkeitsfeld ist eine Rotationsströmung, dessen Geschwindigkeitsbetrag mit $\frac{1}{r}$ abnimmt und dessen Richtung immer tangential verläuft. Der Wirbelfaden durchstößt die Zeichenebene senkrecht.

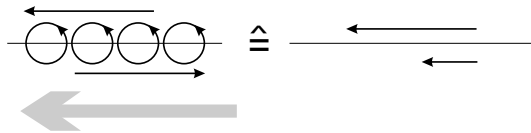


Abbildung 5: Eine Addition von Wirbelfäden, die jeweils eine Rotationsströmung induzieren, sowie einer konstanten Anströmung (grauer Pfeil) ergibt eine Trennschicht: Im infinitesimalen Bild heben sich die vertikalen Beiträge jedes einzelnen Wirbelfadens gerade weg, während sich die Komponenten parallel zur Trennschicht konstruktiv überlagern.

1. gerader Wirbelfaden (einfachste Rotationsströmung); hierbei gilt: $\vec{u} \sim \frac{1}{r}$ (Abbildung 4)
2. Trennschicht

Zwei Flüssigkeitsschichten, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen erzeugen ein Wirbelfeld, das sich mit unendlich vielen infinitesimal schwachen Wirbelfäden an der Trennfläche und der Addition eines konstanten Geschwindigkeitsfelds \vec{v} beschreiben lässt (Abbildung 5).

2.2 Zeitabhängige Strömungen

Bilden wir die Rotation der Gleichung 2.15, so ergibt sich nach Vertauschung der Ableitungen, da der Term mit dem Gradienten wegfällt:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{u} = \rho \vec{\nabla} \times \left(\vec{u} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) \quad (2.27)$$

Falls nun $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ für einen Zeitpunkt $t = t_0$, so folgt mit dieser Gleichung dann $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ für alle Zeiten. Falls die Strömung also einmal wirbelfrei ist, so ist sie immer wirbelfrei, das heißt alles ist „kaltgestellt“.

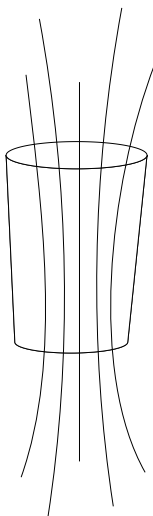


Abbildung 6: Die Wirbelröhre ist dasjenige Volumen durch das die Stromlinien des Wirbelfeldes laufen. Je nachdem wie diese im Fluid verlaufen, kann sich die Wirbelröhre verjüngen, verbreitern oder deformieren. Nach den Wirbelsätzen kann eine Wirbelröhre aber nirgends im Fluid enden, da auch die Wirbellinien selbst nicht enden können. Für zeitlich veränderliche Wirbelfelder „schwimmt“ die Wirbelröhre dann also mit den Feldlinien des Wirbelfeldes mit, was zur anschaulichen Betrachtung der Gleichung 2.29 führt.

2.3 Helmholtzsche Wirbelsätze

Wir setzen nun für das Wirbelfeld $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$, somit wird aus der Gleichung 2.27:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \vec{w} &= \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w}) & (2.28) \\
 &= \overrightarrow{\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w})} + \overrightarrow{\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w})} \\
 &= (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{w} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})} + \vec{u} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{w})} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} \\
 &= 0 \text{ inkompressibel} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0
 \end{aligned}$$

Also gilt (vgl. die Ableitung der Navier-Stokes-Gleichungen):

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}} &= (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \\
 \frac{d\vec{w}}{dt} &= (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} & (2.29)
 \end{aligned}$$

Für den Spezialfall der 2D-Strömungen erhält man:

$$(\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0 \quad (2.30)$$

Das sieht man so: Da für 2-dimensionale Strömungsfelder, also z.B. in der xy-Ebene gilt $\vec{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y), 0)$, folgt also für das Wirbelfeld $\vec{w} = w \cdot \vec{e}_z$, das heißt das Skalarprodukt verschwindet.

Im allgemeinen Fall gilt für das Wirbelfeld natürlich nur die Quellenfreiheit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0 \quad (2.31)$$

Dies bedeutet, dass Wirbellinien, also die Stromlinien des \vec{w} -Feldes weder im Medium beginnen können, noch dort enden. Wir definieren noch die Wirbelröhre (siehe Abbildung 6) als die Gesamtheit aller Stromlinien (Wirbellinien), die durch einen gegebenen Querschnitt gehen. Der Wirbelfaden ist die entsprechende Flüssigkeit in der Wirbelröhre. Wir betrachten nun eine Wirbelröhre, die an einer Stelle den Querschnitt S_1 und an einer anderen Stelle den Querschnitt S_2

habe. Aus der Quellenfreiheit folgt nun (unter Verwendung des Satzes von Gauß und des Satzes von Stokes):

$$\begin{aligned}
0 &= \int \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV \stackrel{S.v.G}{=} \oint \vec{w} \cdot d\vec{F} \\
&= \int_{S_1} \vec{w} \cdot d\vec{F} - \int_{S_2} \vec{w} \cdot d\vec{F} \\
&\quad \text{Die Mantelfläche liefert zum Oberflächenintegral keinen Beitrag} \\
&= \int_{S_1-S_2} \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot d\vec{F} \stackrel{S.v.S}{=} \oint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{s} - \oint_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{s} \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung besagt nun insbesondere, dass die Zirkulation $\oint \vec{u} \cdot d\vec{s}$ längs einer Wirbelröhre (Abbildung 6) konstant ist, das heißt \vec{w} ändert sich nur dann trivialerweise, wenn die Wirbelröhre breiter wird (der Abstand zu benachbarten Wirbellinien vergrößert sich).

Betrachten wir nun den Term $(\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$, der die Änderung von \vec{u} in Richtung von \vec{w} darstellt: o.B.d.A sei nun $\vec{w} \parallel \vec{e}_z$, also ist dann $\vec{w} \cdot \vec{\nabla} = w_z \partial_z$. Zerlegen wir das Geschwindigkeitsfeld analog in eine Komponente parallel zur z-Achse und senkrecht dazu: $\vec{u} = u_z \vec{e}_z + u_\perp \vec{e}_\perp$, so enthält das Skalarprodukt in der Gleichung 2.29 2 Terme:

- $\partial_z u_z$ Die Geschwindigkeit längs der Wirbelröhre verändert sich; da immer die gleiche Flüssigkeit fließt, muss also sich der Querschnitt der Wirbelröhre verändern, das heißt das Wirbelfeld ändert sich so, dass die „Wirbeldichte“ verändert ist.
- $\partial_z u_\perp$ Analoge Veränderung des Wirbelfelds durch Scherung der Röhre.

Fassen wir nochmal die *Wirbelsätze* zusammen:

1. Wirbellinien können nicht im Medium beginnen oder enden.
2. Zirkulation längs einer Wirbelröhre ist konstant.
3. Zirkulation einer Wirbelröhre ist zeitlich konstant.
4. Wirbelröhren sind materiell (immer die gleiche Flüssigkeit).

Hierbei sind die ersten beiden Sätze kinematische Eigenschaften, während die anderen beiden dynamische Eigenschaften der Wirbel beschreiben.

Beweisen wir noch die Relation 3: Mit der Definition der Zirkulation als das Linienintegral haben wir also für dessen zeitliche Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Gamma &= \frac{d}{dt} \oint \vec{u} \cdot d\vec{s} \\
&\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \oint \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{s} + \oint \vec{u} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} \\
&= -\frac{1}{\rho} \oint \vec{\nabla} (p + V_a) \cdot d\vec{s} + \oint \vec{u} \cdot d\vec{u} \\
&= \frac{1}{2} u^2 \Big|_{\text{Anf}}^{\text{End}} = 0 \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt und ausgenutzt, dass wegen 2.29 der Teil $\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$ im Linienintegral verschwindet. Das erste Integral über den Gradienten verschwindet natürlich auch, da $p + V_a$ ein Potential ist, dessen Zirkulation Null ist.

Nun folgt noch der Beweis von 4. Dazu beweisen wir, dass die Mantelfläche (Abbildung 6) einer Wirbelröhre bei der zeitlichen Entwicklung auch Mantelfläche bleibt. Natürlich verschwindet das

Skalarprodukt zwischen Wirbelfeld und Normalenvektor auf der Mantelfläche $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$, woraus sofort folgt:

$$\int \vec{w} \cdot d\vec{F} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = \Gamma = 0 \quad (2.34)$$

Die Zirkulation bleibt wegen $\frac{d}{dt}\Gamma = 0$ auch Null, das heißt der Integrand im ersten Integral, der proportional zu $\vec{w} \cdot \vec{n}$ ist, verschwindet immer. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Fläche immer Mantelfläche bleibt.

2.4 Randbedingungen und Eindeutigkeit

Im folgenden unterscheiden wir 4 Randbedingungen, von denen wir jeweils eine aufgeben:

1. rundum berandet
2. wirbelfrei
3. einfach zusammenhängend
4. unbewegliche Oberfläche

2.4.1 alle Bedingungen gelten

Die einzige Lösung der Gleichung ist dann $\vec{u} = 0$. Dies sieht man ein, indem man die Randbedingung für die unbewegliche Oberfläche formuliert:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.35)$$

Auf der Oberfläche ist das Geschwindigkeitsfeld senkrecht zur Fläche Null, bzw. keine Flüssigkeit dringt in die Wand ein. Benutzt man nun noch die Wirbelfreiheit der Strömung $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$, so kann man ein Geschwindigkeitpotential mit

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad (2.36)$$

einführen und man erhält mit den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \phi \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \implies \oint \phi \vec{u} \cdot d\vec{F} &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Formt man nun das Integral mit dem Satz von Gauß um, so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{u}) \, dV \\ &= \int_V \phi \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}_{=0 \text{ inkompressibel}} \, dV + \int_V \underbrace{(\vec{\nabla} \phi)}_{=\vec{u}} \cdot \vec{u} \, dV \\ &= \int_V \vec{u}^2 \, dV \end{aligned} \quad (2.38)$$

Also folgt: $0 = \int_V \vec{u} \cdot \vec{u} \, dV$ und somit verschwindet der Integrand, der positiv sein muss ($\vec{u}^2 \geq 0$).

2.4.2 mit bewegter Oberfläche

Die Randbedingung ändert sich, wenn sich die Oberfläche des umströmten Körpers mit der Geschwindigkeit \vec{u}_s bewegt:

$$(\vec{u} - \vec{u}_s) \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.39)$$

Wir zeigen nun durch Beweis mit Widerspruch, dass die Lösung eindeutig ist. Dazu nehmen wir an, dass es 2 Lösungen \vec{u}_1 und \vec{u}_2 gäbe. Wie oben gelten nun die Beziehungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{u}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{u}_2 = 0 \quad (2.40)$$

Wir bilden nun die Differenz der Gleichungen und erhalten:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 0 \quad (2.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 0 \quad (2.42)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{n} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_s) - \vec{n} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_s) = 0 + 0 = 0 \quad (2.43)$$

Also sind wir für die Strömung $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ wieder im ersten Fall, das heißt $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 0$ ist die einzige Lösung.

2.4.3 jetzt: mit Wirbeln

Nun ist die Randbedingung $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ zu einem festem t_0 gegeben. Seien nun \vec{u}_1 und \vec{u}_2 2 Lösungen. Dann gilt für die Differenz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_1 - \vec{\nabla} \times \vec{u}_2 = \vec{\nabla} \times (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = 0 \quad (2.44)$$

zur Zeit t_0

Nach den obigen Helmholtzschen Wirbelsätzen verschwindet nun die Rotation auch zu allen anderen Zeiten (Eindeutigkeit der Lösung).

Dieser Teil ist unabhängig von dem Eindeutigkeitsbeweis und wurde an dieser Stelle nur eingeschoben, weil es sich angeboten hat. Wir vergleichen nun zwei Lösungen \vec{u}_1 und \vec{u}_0 zu verschiedenen Randbedingungen, aber mit gleicher Rotation, woraus sich

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \vec{\nabla} \phi \quad (2.45)$$

ergibt. Der Vergleich der kinetischen Energien der Geschwindigkeitsfelder \vec{u}_0 und \vec{u}_1 ergibt:

$$\frac{1}{2} \rho \int u_1^2 dV = \frac{1}{2} \rho \int u_0^2 dV + \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \phi)^2 dV + \rho \int \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi dV \quad (2.46)$$

wobei dder letzte Term wegen

$$\int \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi dV = \int \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_0 \phi) dV = \oint \vec{u}_0 \phi \cdot d\vec{F}$$

bei statischen Randbedingungen verschwindet. Aus der statischen Randbedingung folgt, dass \vec{u}_1 und $\vec{\nabla} \phi$ die gleichen Randbedingungen erfüllen, d.h. bei gegebenen Randbedingungen hat $\vec{\nabla} \phi$ immer eine kleinere (oder die gleiche) Energie als \vec{u}_1 .

Kelvin's Minimum Energy Theorem: Unter allen Strömungen mit gegebenen Randbedingungen hat die wirbelfreie die niedrigste Energie.

Ein weiterer, von bisher Gesagtem unabhängiger, Punkt betrifft die Nutzung der Zerlegung 2.45 zum Anpassen an Randbedingungen: \vec{u}_0 wird als beliebige Lösung (ohne Rücksicht auf die Randbedingungen) zu einer vorgegebenen Wirbelverteilung gewählt und $\vec{\nabla} \phi$ dann so bestimmt, dass \vec{u}_1 die Randbedingungen erfüllt. (Methode der Spiegelwirbel entspricht der Methode der Spiegelladungen in der Elektrostatik).

2.4.4 jetzt nicht mehr einfach zusammenhängend

Wird nun ein Körper so umströmt, dass das Fluid nicht mehr einfach zusammenhängend ist, so gibt es unendlich viele Lösungen für die (wirbelfreie) Potentialströmung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad (2.47)$$

$$\implies \vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad (2.48)$$

Wir versuchen einfach einmal das Potential ϕ zu konstruieren.

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (2.49)$$

Um zu zeigen, dass ein Potential existiert, müssen wir zeigen dass das Integral wegunabhängig ist:

$$\int_1 \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_2 \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (2.50)$$

Wir formen nun mit dem Satz von Stokes um:

$$\int_{1-2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{r} \stackrel{S.v.S.}{=} \int \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot d\vec{F} = 0 \quad (2.51)$$

Hierbei gilt natürlich das letzte Gleichheitszeichen nur, wenn der Integrand $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ überall definiert ist, das heißt das Gebiet muss einfach zusammenhängend sein. Sind also die Wege nicht stetig ineinander deformierbar, so existiert kein Potential.

In diesem Fall ist die Randbedingung/Anfangsbedingung

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = k \quad (2.52)$$

frei wählbar.

Für einen umströmten Zylinder ist also die Geschwindigkeit an der Oberfläche frei wählbar, um das Problem zu lösen.

2.4.5 nicht rundum berandet

In diesem Fall ist eine konstante Strömung \vec{v}_0 weit weg vom Gegenstand frei wählbar.

2.4.6 Zusammenfassung

- Für den Fall aller 4 Randbedingungen ist also nur $\vec{u} = 0$ Lösung des Problems.
- Gibt es keine unbewegliche Oberfläche, so existiert zu gegebenen Randbedingungen eine eindeutige (nichthtriviale) Lösung des Problems
- Für Strömungen mit Wirbeln, ist die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ frei wählbar.
- Ist das Fluid nicht einfach zusammenhängend, so ist das Integral $\oint \vec{u} \cdot d\vec{s}$ frei wählbar.
- Für nicht rundum berandete Probleme ist eine konstante Strömung \vec{v}_0 frei wählbar.

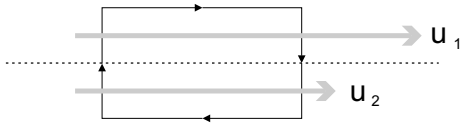


Abbildung 7: Geschlossenes Linienintegral über die Trennschicht zwischen den Geschwindigkeiten u_1 und u_2

2.5 Strömung mit Reibung

Nun tritt in der Bewegungsgleichung der zusätzliche Term $\mu\Delta\vec{u}$ auf. Somit sollten sich die Lösungen von der Potentialströmung unterscheiden. Betrachtet man allerdings eine solche, so erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{\nabla}\phi \\ \implies \Delta\phi &= 0 \\ \mu\Delta\vec{u} &= \mu\Delta\vec{\nabla}\phi = \mu\vec{\nabla}\Delta\phi = 0\end{aligned}\quad (2.53)$$

Ist also die Reibung wirkungslos und alle Lösungen der Gleichungen bleiben gleich? Dies ist natürlich nicht der Fall:

1. Die Potentialströmung ist schon wegen der gegebenen neuen Randbedingungen (Strömung an der Oberfläche eines umströmten Körpers muss auch parallel zu dieser verschwinden) am Rande keine Lösung mehr. Beginnt man allerdings mit einer vorgegebenen Potentialströmung, so entstehen Wirbel an der Grenze zum umströmten Körper und diese diffundieren dann nach innen.
2. Wie man anhand des folgenden Beispiels sieht, gibt es Lösungen, die von vornherein keine Potentialströmungen sind: Dazu betrachte man eine Strömung, die aus 2 Fluidschichten unterschiedlicher (konstanter) Geschwindigkeiten besteht. Bildet man nun das geschlossene Linienintegral über ein Rechteck, so erhält man senkrecht zur Geschwindigkeit keinen Beitrag und parallel zur Geschwindigkeit einen konstanten Beitrag (vgl. Abbildung 7):

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = u_2 l - u_1 l = \int_F \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot d\vec{F} \neq 0 \quad (2.54)$$

Also handelt es sich um keine Potentialströmung.

Zusammenfassend folgt also:

bisher: Randbedingung für reibungsfreie Strömung war $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

jetzt: Randbedingung für Strömung mit Reibung (Wandhaftbedingung):

$$\vec{u} = 0 \text{ an der Oberfläche} \quad (2.55)$$

Auf diese Weise wirkt sich die Reibung von der Oberfläche her aus.

Wir beginnen wieder mit der Navier-Stokes-Gleichung 2.15:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} \left(p + V_a + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \mu \Delta \vec{u}$$

Bilde die Rotation und verwende $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{w}$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{w} \stackrel{\mu=\nu}{=} \nu \Delta \vec{w} \quad (2.56)$$

$$\implies \frac{d\vec{w}}{dt} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \nu \Delta \vec{w} \quad (2.57)$$

Bilde das Linienintegral: $\oint \dots d\vec{s}$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \Delta \Gamma \quad (2.58)$$

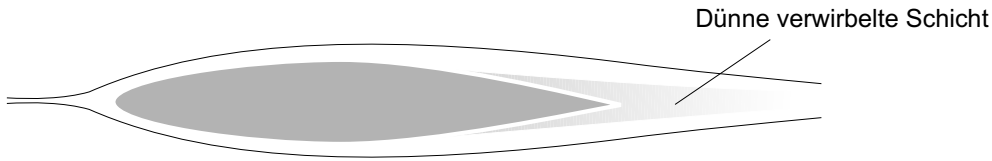


Abbildung 8: Bei äußeren Strömungen, z.B. beim Umströmen eines PKW, bildet sich eine Grenzschicht mit diffundierenden Wirbeln, die für typische Abmessungen und Strömungsgeschwindigkeiten dünn bleibt

Die Diffusionsgleichung 2.58 besagt nun, dass Wirbel an der Oberfläche entstehen und ins Innere diffundieren. Zuerst handelt es sich also um eine Potentialströmung (im Inneren sind keine Wirbel), die aus der Ruhe entsteht.

Abschätzung der Diffusion

Betrachte die Zähigkeit $\frac{\mu}{\rho} = \nu$

$$\nu_{Luft} = 15 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$\nu_{Wasser} = 2 \text{ mm}^2/\text{s}$$

vgl. $\mu_{Wasser} = 10^2 \mu_{Luft}$ und $\rho_{Wasser} = 10^3 \rho_{Luft}$

Die Diffusion ist nun:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \Delta \Gamma$$

für kleine Differenzen gilt nun:

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} = \nu \frac{\Delta \Gamma}{(\Delta l)^2}$$

$$\implies \frac{l}{t} \approx \frac{\nu}{l}$$

$$\Delta l \approx 1 \text{ mm}$$

$$\text{Luft: } \frac{l}{t} \approx \frac{2 \text{ mm}}{\text{sec}}$$

$$\text{Wasser: } \frac{l}{t} \approx \frac{15 \text{ mm}}{\text{sec}}$$

Die Diffusionsgeschwindigkeit ist nun im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit $c \approx 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ oder zu den auftretenden Geschwindigkeiten beim Umströmen der Körper vernachlässigbar klein.

Da stellt sich nun die Frage: *Kann man die Diffusion vernachlässigen?*

- in Röhren: nein! Die Diffusion erfasst schließlich den gesamten Querschnitt, da die Strömung im Rohr lange dauert.
- äußere Strömung: Dünne Grenzschicht mit diffundierenden Wirbeln

Beispiel: Umströmung eines Automobils

Typische Abmessung: $l = 4 \text{ m}$

Geschwindigkeit $v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Zeit zum Vorbeiströmen: $t = \frac{l}{v} = \frac{2}{15} \text{ s}$

Somit ergibt sich eine Dicke der Grenzschicht von etwa: $\frac{15 \text{ mm}}{\text{s}} \cdot \frac{2}{15} \text{ s} \approx 2 \text{ mm}$.

Wir haben also nach dem Umströmen eine sehr dünne verwirbelte Schicht, die für die Reibung meistens bedeutungslos ist.

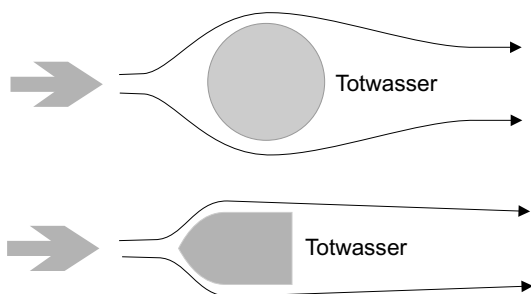


Abbildung 9: Schematische Veranschaulichung des Totwassers, also des relativ zum Körper nicht bewegten Fluids, bei der Umströmung eines Zylinders und eines nicht strömlinienförmigen Körpers, bei dem natürlich der Totwasserbereich größer ist.

Viel bedeutender ist die Strömungsablösung bei „stumpfen“ Gegenständen, die im einfachsten Fall beim Umströmen eines Zylinders zu beobachten ist: Vor dem Zylinder ergibt sich ein großer Druck (Stauung), der dann bis zur Mitte hin minimal wird. Nach der Potentialströmung fließt das Fluid nun wieder bis zum Ende am Körper entlang und trifft dann wieder aufeinander (keine Reibungsverluste). In Wirklichkeit kommt die Flüssigkeit infolge der Reibung vorher zum Stehen und eine Rückströmung drängt dann die ankommende Flüssigkeit vom Körper weg, so dass das sogenannte „Totwasser“ hinter dem Zylinder entsteht (vgl. Abbildung 9). Das gleiche Prinzip ist auch beim Überziehen (stall) eines Flugzeuges anwendbar: Ist hinter dem Flügel „Totwasser“ vorhanden, so gleitet das Fluid nicht mehr am Flügel entlang, sondern wird vom Totwasser abgedrängt und führt so zu geringerem oder keinem Auftrieb.

3 Potentialströmungen

Für Potentialströmungen gilt natürlich die Wirbelfreiheit:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \tag{3.59}$$

Somit lässt sich ein Potential einführen, dessen Gradientenfeld das gesuchte Geschwindigkeitsfeld ist. Für dieses gilt natürlich die Quellenfreiheit, wie wir es schon vorher formuliert hatten, so dass dann für das Potential die Laplace-Gleichung gelten muss:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \tag{3.60}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \Delta \phi = 0 \tag{3.61}$$

Die Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0$ ergibt dann zusammen mit der Randbedingung $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ bei gegebenem Druck die Lösung.

Auch für die Umströmung von Tragflächen ist die Potentialströmung von Nutzen, da in der Anwendung immer etwa 1km Luftsäule zwischen den Tragflächen und anderen Gegenständen (anderes Flugzeug / Erdboden) ist.

3.1 Lösung der Laplace-Gleichung im freien Raum

Wir suchen also nun die Lösungen der Laplace-Gleichung im gesamten Raum (d.h. ohne Körper, nur Fluid), die außerdem physikalische Lösungen sind (Geschwindigkeitsfeld muss beschränkt sein, da die erreichbaren Geschwindigkeiten auch beschränkt sind).

Wir machen dazu einen Separationsansatz:

$$\phi(\vec{r}) = \alpha(x) \cdot \beta(y) \cdot \gamma(z) \tag{3.62}$$

Begründung für den Separationsansatz: jede Lösung als (eventuell unendliche) Summe von Produkten darstellbar.

Einsetzen in die DGL liefert dann:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \alpha\beta\gamma = \alpha''\beta\gamma + \alpha\beta''\gamma + \alpha\beta\gamma'' = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\alpha(x)''}{\alpha} + \frac{\beta(y)''}{\beta} + \frac{\gamma(z)''}{\gamma} = 0 \quad (3.64)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{mit } \lambda_i \text{ reell} \quad (3.65)$$

Wir haben also 3 entkoppelte identische Differentialgleichungen, die jeweils die gleiche Lösung haben:

$$\alpha'' = \lambda_1\alpha \implies \alpha_{\pm} = \alpha_0 e^{\pm\sqrt{\lambda_1}} \quad (3.66)$$

$$\beta'' = \lambda_2\beta \implies \beta_{\pm} = \beta_0 e^{\pm\sqrt{\lambda_2}} \quad (3.67)$$

$$\gamma'' = \lambda_3\gamma \implies \gamma_{\pm} = \gamma_0 e^{\pm\sqrt{\lambda_3}} \quad (3.68)$$

Aus der Beschränktheit der Lösungen müssen wir nun fordern, dass:

$$\lambda_i \leq 0 \quad (3.69)$$

Wegen der Gleichung 3.65 folgt nun sofort:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (3.70)$$

Also vereinfachen sich die Differentialgleichungen beträchtlich und wir haben nur noch die Integration auszuführen, wobei sich je 2 Integrationskonstanten ergeben:

$$\alpha'' = 0 \quad \alpha = A_1x + A_0 \quad (3.71)$$

$$\beta'' = 0 \quad \beta = B_1x + B_0 \quad (3.72)$$

$$\gamma'' = 0 \quad \gamma = C_1x + C_0 \quad (3.73)$$

$$\implies \phi = (A_1x + A_0)(B_1y + B_0)(C_1z + C_0) \quad (3.74)$$

Die Geschwindigkeit $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ muss nun allerdings überall endlich sein, daher dürfen nur lineare Terme in den Koordinaten vorkommen und wir haben schließlich folgende Lösung:

$$\begin{aligned} \phi &= C + D_1x + D_2y + D_3z & (3.75) \\ &= C + \vec{u}_0 \cdot \vec{r} \\ \vec{u} &= \vec{\nabla}\phi = \vec{u}_0 \end{aligned}$$

Also ist die einzige Lösung im freien Raum $\vec{u} = const$, wie man es bei nicht vorhandenen Gegenständen auch erwarten würde.

3.2 Umströmung von Objekten

Sind umströmte Objekte vorhanden, so muss man Quellen des Feldes so wählen, dass ihre Felder zusammen mit der konstanten Lösung zu den korrekten Randbedingungen führen.

In diesem Fall ist dann die allgemeine Lösung die konstante Geschwindigkeit + die Quellfelder der Form $\vec{u} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$ im Inneren des Gegenstandes.

Eindeutigkeit der Lösungen:

Zurückführung durch Galilei-Transformation auf ruhende Flüssigkeit.

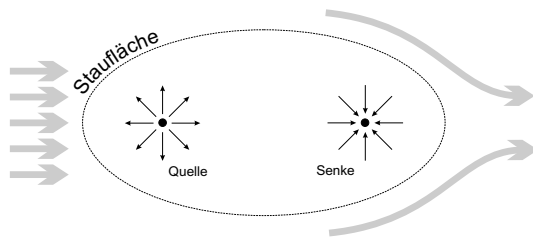


Abbildung 10: Umströmung eines Körpers, dessen Rand (rotationssymmetrische Staufläche, durch die kein Fluid tritt) durch ein Dipolfeld festgelegt wird.

Nur 1 Quellfeld gibt es nur in Ausnahmefällen, weil das bei unbeweglicher Oberfläche die Randbedingung (kein Ausströmen) verletzt.

Die einfachste Möglichkeit, einen umströmten Körper zu modellieren, ist die Verwendung eines Dipolfeldes (eine Quelle und eine gleichstarke Senke) plus konstante Anströmung (vgl. Abbildung 10).

Eine Körperoberfläche, für die es eine Quellenverteilung gibt, heißt *stromlinienförmig*.

3.2.1 reines Monopolfeld : Kavitation

Wir betrachten eine Luftblase in Wasser, die nach der Bernoulli-Gleichung $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ auf folgende Art entstehen kann: Für Wasser ist die Dichte ρ in guter Näherung konstant. Steigt nun die Geschwindigkeit v stark genug an, so wird der Druck $p < 0$, das heißt eine Blase entsteht (wir vernachlässigen hier, dass in der Blase Wasserdampf vorhanden sein kann; näherungsweise Vakuum). Für Gase ist dieses Verhalten nicht zu beobachten, da hierbei die Dichte nicht konstant ist, sondern nach der Gasgleichung $\frac{p}{\rho} \approx const$ gilt und somit $p > 0$ für beliebige Geschwindigkeiten folgt.

Wird nun die Geschwindigkeit am entstandenen Hohlraum wieder kleiner, so steigt der Druck (wird positiv) und der Hohlraum schrumpft. Für die Lösung des Problems setzen wir nun eine Senke an, die die Randbedingungen erfüllt.

Anwendung: Sonolumineszenz (Leuchten der zusammenstürzenden Blasen bei großen Amplituden der Schallwellen in Flüssigkeiten, \rightarrow hohe Drücke führen zu großen Temperaturen).

Beginnen wir also mit der Lösung des Problems:

Zunächst einmal ist das gesuchte Potential kugelsymmetrisch $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$, somit müssen wir (um den Laplace-Operator nicht in Kugelkoordinaten ausrechnen zu müssen) erst einmal die Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten berechnen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi' \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \phi' \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \phi'' + \phi' \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \quad (3.76)$$

$$\implies \Delta \phi = \phi'' + \phi' \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r} \right) = \phi'' + \frac{2}{r} \phi' = 0 \quad (3.77)$$

Die gesuchte Lösung enthält also nur erste oder höhere Ableitungen, somit ist es sinnvoll folgende Substitution zu machen, so dass wir folgende DGL zu lösen haben:

$$\psi = \phi' \quad (3.78)$$

$$\implies \frac{\psi'}{\psi} = -\frac{2}{r} \quad (3.79)$$

$$\implies (\ln \psi)' = -\frac{2}{r} \quad (3.80)$$

nach einfacher Integration folgt sofort:

$$\ln \psi = -2 \ln r + const$$

$$\implies \psi = \alpha r^{-2} \quad (3.81)$$

Das Potential ergibt sich dann mittels simpler Integration:

$$\phi = A + Br^{-1} \quad (3.82)$$

Für die Lösung der Gleichung ergibt sich also neben dem konstanten Potential (welches keine physikalischen Effekte erzeugt) auch die Lösung eines Quellenfeldes mit der Quellstärke J , wie man es auch aus der Elektrostatik kennt:

$$J = \oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{F} \quad \text{Hydrodynamische Ladung} \quad (3.83)$$

$$Q = \int_V \rho dV = \oint \vec{E} \cdot d\vec{F} \quad \text{vgl. Elektrostatik}$$

$$\implies \phi = -\frac{J}{4\pi r} \quad (3.84)$$

Für unser betrachtetes Problem der Kavitation muss nun die Ladung J so beschaffen sein, dass sie das Zusammenstürzen der Luftblase beschreibt. Es handelt sich um eine negative Ladung (Senke) wegen der Bedingung $\dot{a} < 0$. Definieren wir a als Radius der Luftblase, so ergibt sich:

$$J = \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right) = 4\pi a^2 \dot{a} < 0 \quad (3.85)$$

Nun benutzen wir die Bernoulli-Gleichung für nicht stationäre Strömungen:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{const.} \quad (3.86)$$

Für den Fall großer Entfernungen $r \rightarrow \infty$ von der Quelle gilt $p = \text{const}$ (hydrostatischer Druck). Andererseits berechnen wir für die Oberfläche (nach Ableitung der Geschwindigkeit vom Potential und Einsetzen von $r = a$):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \dot{a}^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=a} \quad (3.87)$$

Mit der Definition der Quellstärke 3.85 finden wir für den letzten Term:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=a} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2 \dot{a}}{r} \right) = -\frac{1}{r} (2a\dot{a}^2 + a^2 \ddot{a}) \\ &= -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\implies \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \dot{a}^2 - 2\dot{a}^2 - a\ddot{a} = -\frac{3}{2} \dot{a}^2 - a\ddot{a} \quad (3.89)$$

Wir nutzen die Produktregel aus, um den Ausdruck weiter zu vereinfachen:

$$\frac{d}{dt} (a\dot{a}) = a\ddot{a} + \dot{a}^2$$

Eine analoge Regel können wir auch für andere Potenzen benutzen:

$$\frac{d}{dt} \left(a^{\frac{3}{2}} \dot{a} \right) = a^{\frac{3}{2}} \ddot{a} + \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} \dot{a}^2 = a^{\frac{1}{2}} \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) \quad (3.90)$$

Also geht die Gleichung 3.89 über in

$$\frac{p}{\rho} = -a^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \left(a^{\frac{3}{2}} \dot{a} \right) \iff \frac{d}{dt} \left(a^{\frac{3}{2}} \dot{a} \right) = -\frac{p\sqrt{a}}{\rho}$$

Multiplikation von 3.91 mit $a^2 \dot{a}$ liefert dann:

$$\frac{p}{\rho} a^2 \dot{a} = -a^{\frac{3}{2}} \dot{a} \frac{d}{dt} \left(a^{\frac{3}{2}} \dot{a} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a^3 \dot{a}^2) \quad (3.91)$$

Mit einer zu 3.90 analogen Umformung erhalten wir schließlich:

$$\frac{p}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} a^3 \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a^3 \dot{a}^2) \quad (3.92)$$

Nach trivialer Integration folgt (nach Umsortieren):

$$-\frac{4\pi}{3} a^3 p + const = 2\pi\rho a^3 \dot{a}^2 \quad (3.93)$$

Die Integrationskonstante folgt sofort aus den Anfangsbedingungen $\dot{a}(0) = 0$ und $a(0) = a_0$, somit geht die Gleichung 3.93 über in:

$$p \left(\frac{4\pi}{3} a_0^3 - \frac{4\pi}{3} a^3 \right) = 2\pi\rho a^3 \dot{a}^2 \quad (3.94)$$

In dieser Gleichung steht links die Kompressionsarbeit und rechts die kinetische Energie des Strömungsfeldes, das heißt die Gleichung drückt den Energieerhaltungssatz aus, wie folgende Überlegung zeigt:

Berechnen wir die Geschwindigkeit aus dem Potential, so erhält man, wie schon oben benutzt:

$$u = \frac{J}{4\pi r^2} = \frac{a^2 \dot{a}}{r^2} \quad (3.95)$$

Die gesamte Strömungsenergie ist nun das Integral über alle Energiedichten, welches wegen der Kugelsymmetrie trivial über die Winkel ausgeführt werden kann, daher bleibt noch zu berechnen:

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{1}{2} \rho u^2 4\pi r^2 dr &= 2\pi\rho \int_a^\infty \frac{a^4 \dot{a}^2}{r^4} r^2 dr \\ &= 2\pi\rho a^4 \dot{a}^2 \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= 2\pi\rho a^4 \dot{a}^2 \left[\frac{1}{a} \right] \end{aligned} \quad (3.96)$$

Zur endgültigen Lösung schreiben wir die Differentialgleichung noch nach einer aus der klassischen Mechanik bekannten Art um:

$$\dot{a}^2 = \frac{p}{\rho} \frac{2}{3} \left[\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right] \quad (3.97)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{2p}{3\rho} \left[\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right]} \quad (3.98)$$

Nach Trennung der Variablen erhalten wir einen unübersichtlichen Ausdruck:

$$\int \frac{1}{\sqrt{\dots}} da = \int dt \quad (3.99)$$

Mit der Definition der Zeit $t_0 = \frac{a_0}{\sqrt{\frac{2p}{3\rho}}}$ finden wir dann folgende Lösungen der DGL:

- Die Auftragung $\frac{a}{a_0}$ gegen $\frac{t}{t_0}$ liefert einen Graphen, der natürlich bei 1 einen Achsenabschnitt hat und dann langsam mit geringer Steigung abfällt, bevor er kurz vor dem Wert $t = t_0$ abrupt gegen Null geht. Interpretation: Der Radius der Blase nimmt nur langsam ab, bis er sehr klein ist und dann schnell gegen Null geht.
- Die Auftragung $\frac{\dot{a}}{\dot{a}_0}$ gegen $\frac{t}{t_0}$ liefert eine bei Null beginnende Kurve, die langsam ansteigt, bis der Wert $t = t_0$ fast erreicht ist und die Funktion divergiert.

- Ein ähnliches Verhalten hat auch die Auftragung $\frac{p_{max}}{p}$ gegen $\frac{t}{t_0}$. Hierbei ist die Interpretation, dass der Druck in der Luftblase im Augenblick des Zusammensturzes unendlich wird, womit auch die Effekte der Kavitation an Schiffsschrauben erklärbar sind (Hier wird das Metall von den zusammenstürzenden Blasen, die aufgrund hoher Drehgeschwindigkeiten der Rotoren entstehen, regelrecht zerstört.)

Natürlich wird der Druck in Wirklichkeit nur sehr groß, aber nicht unendlich, was an folgenden Näherungen liegt:

1. In der Blase liegt kein Vakuum vor, sondern eine kleine Menge Wasserdampf kann auch innerhalb der kurzen Zeiten ihrer Entstehung in das Innere vordringen, so dass wir eigentlich zur Beschreibung des Innendrucks die Gasgleichung (van-der-Waals) benutzen müssten.
2. Die Blasen sind keine ideale Kugeln: kleinste Abweichungen von der Kugelgestalt machen sich aber dadurch bemerkbar, dass sich die Blase einschnürt und am Ende mehrere kleinere Blasen zusammenstürzen.

3.2.2 Dipolfelder

Der einfachste Fall eines Dipolfeldes ist die Verwendung einer Quelle und einer Senke gleicher Stärke, die von einer Seite angeströmt eine Staupfläche beschreiben, die dann unserem umströmten Körper entspricht. Die Umströmung ist in Abbildung 10 als Umströmung eines Ellipsoids dargestellt. Wir wollen aber das Problem noch weiter vereinfachen und verlegen die Senke ins Unendliche und betrachten daher nur die Anströmung der Quelle. Wegen der Zylindersymmetrie des Problems lautet dann das Potential der beiden Strömungen in Zylinderkoordinaten (s, ϕ, z) mit der konstanten Anströmung $\vec{u} = u\vec{e}_z$:

$$\phi = uz - \frac{J}{4\pi r} \quad (3.100)$$

Hierbei gilt natürlich $r^2 = s^2 + z^2$. Den vorderen Staupunkt auf der z-Achse berechnen wir mit der Bedingung, dass die Geschwindigkeit verschwinden muss:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left(uz - \frac{J}{4\pi r} \Big|_{s=0} \right) \\ &= u - \frac{J}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \Big|_{s=0} \\ &= u + \operatorname{sgn}(z) \frac{J}{4\pi r^2} \Big|_{s=0} \\ &= u + \operatorname{sgn}(z) \frac{J}{4\pi z^2} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Da $J > 0$, $r > 0$ und $u > 0$ folgt eine Lösung für z_s (den Staupunkt)

$$z_s = -\sqrt{\frac{J}{4\pi u}} \quad (3.102)$$

Betrachtung der Spezialfälle:

1. $u = 0$: kein Staupunkt, daher die Formel nicht anwendbar
2. u wächst, also wird $|z_s|$ kleiner
3. J wächst, also wird $|z_s|$ größer

Staulinie

Nun können wir uns daran machen, die Körperform (Staulinie) zu bestimmen. Dazu legen wir einen Zylinder, dessen Grundfläche senkrecht auf der Anströmung steht und dessen Rand die Staulinie berührt, in den Körper und berechnen den Fluss durch Mantelfläche und Zylinderboden (siehe Abbildung 11)

Hierbei können wir folgendes ausnutzen:

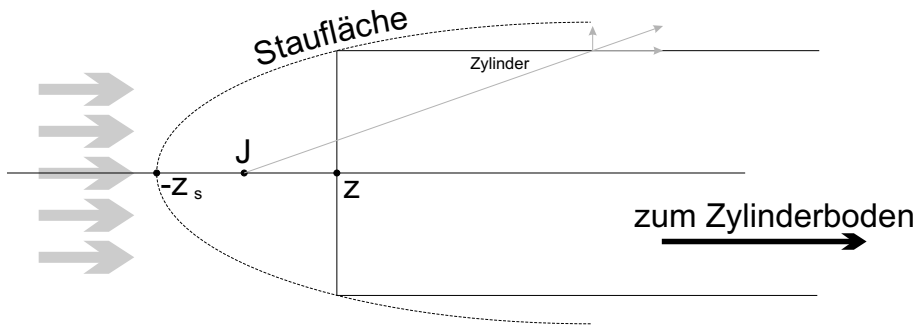


Abbildung 11: Platzierung des Integrationszylinders in der Strömung: Die Ränder des Deckels berühren die rotationssymmetrische Staulinie, die von der Quelle J erzeugt wird. Z_s ist der Stau- punkt, also der Punkt, an dem die von links kommende Strömung durch die Wirkung der Quelle zum Stillstand kommt.

1. Der Fluss durch die Mantelfläche stammt ausschließlich von der Quelle
2. Der Fluss durch den Zylinderboden stammt ausschließlich von der Anströmung
3. Durch den Deckel fließt alles, was von der Quelle kommt (weder durch die Staulinie kann etwas fließen, noch am Zylinder vorbei, da der Rand des Deckels mit der Staulinie abschließt)

Damit folgt also, dass die Summe aller 3 Flüsse gerade Null ergeben muss! Den 2. Anteil berechnen wir trivial, da bei weiter Entfernung von der Quelle nur noch die konstante Anströmung wirkt, ist der Fluss:

$$F_2 = \pi s^2 u \quad (3.103)$$

Den 1. Anteil berechnen wir durch Aufintegrieren der zur Mantelfläche senkrechten Strömungsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_z^\infty \frac{\partial \phi}{\partial s} 2\pi s \, dz = \int_z^\infty \frac{J}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial s} 2\pi s \, dz & (3.104) \\
 &= \frac{J}{2} \int_z^\infty \frac{1}{r^2} \frac{s}{r} s \, dz = \frac{J s^2}{2} \int_z^\infty \frac{1}{r^3} \, dz \\
 &= \frac{J s^2}{2} \int_z^\infty \frac{dz}{(z^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{J s^2}{2} \int_{\frac{z}{s}}^\infty \frac{d(\frac{z}{s}) s}{\left(\left(\frac{z}{s}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}} s^3} \\
 &= \frac{J}{2} \int_{\frac{z}{s}}^\infty \frac{d(\frac{z}{s})}{\left(\left(\frac{z}{s}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{J}{2} \left(1 - \frac{z}{r}\right)
 \end{aligned}$$

Also folgt

$$J = F_1 + F_2 = \pi s^2 u + \frac{J}{2} \left(1 - \frac{z}{r}\right) \quad (3.105)$$

Betrachten wir zunächst den Spezialfall $z \rightarrow \infty$: In diesem Fall gilt $z \approx r$ und somit gilt dann:

$$J = \pi a^2 u \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{J}{\pi u}} \quad (3.106)$$

Hierbei ist a der maximale Radius des speziellen umströmten Körpers.

Formen wir die Gleichung 3.105 nach z um und benutzen dabei $r = \sqrt{s^2 + z^2}$, so erhalten wir die gesuchte Gleichung für die Staulinie:

$$z = \frac{s^2 - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} \quad (3.107)$$

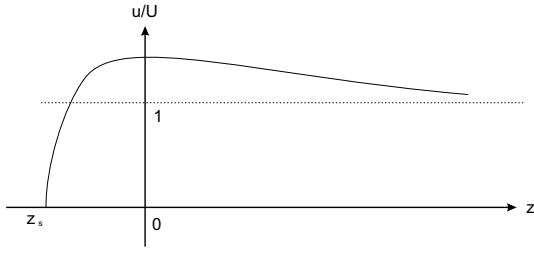


Abbildung 12: Darstellung der berechneten Form der Staulinie gemäß Gleichung 3.111

Kräfte auf den Körper Als nächstes möchten wir die auf den umströmten Körper wirkende Kraft berechnen, dazu sind folgende Schritte notwendig:

1. Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit \vec{u} an der Staulinie (Oberfläche des Körpers)
2. Berechnung des Drucks mit der Bernoulli-Gleichung
3. Bestimmung der Druckkraftkomponente in z-Richtung
4. Integration über die Oberfläche des Körpers

Wir kennen also folgende Größen:

$$\begin{aligned} \text{Potential} \quad \phi &= uz - \frac{J}{4\pi r} \quad r^2 = z^2 + s^2 \\ \text{Staupunkt} \quad z_s &= -\sqrt{\frac{J}{4\pi u}} = -\frac{a}{2} \\ \text{Staulinie} \quad z &= \frac{s^2 - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} \end{aligned}$$

zu 1:

Aus der vektoriellen Darstellung der Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten können wir also ihren Betrag U in Abhängigkeit von der konstanten Anströmgeschwindigkeit u berechnen:

$$\begin{aligned} U^2 &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2 = \left(u + \frac{J}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{J}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 \\ &= \left(u + \frac{Jz}{4\pi r^3}\right)^2 + \left(\frac{Js}{4\pi r^3}\right)^2 = u^2 + \frac{Juz}{2\pi r^3} + \frac{J^2(z^2 + s^2)}{(4\pi r^3)^2} \\ &= u^2 + \frac{Jzu}{2\pi r^3} + \frac{J^2}{16\pi^2 r^4} = U^2 + \left(\frac{Ju}{2\pi} \frac{z}{r} + \frac{J^2}{16\pi^2 r^2}\right) \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (3.108)$$

Die Geschwindigkeit an der Staulinie berechnen wir schließlich mit $\frac{z}{r} = \frac{2s^2}{a^2} - 1$, woraus durch Umformen folgt:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2} \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right) \quad (3.109)$$

$$\Rightarrow U^2 = u^2 + \frac{uJ}{2\pi} \frac{2\frac{s^2}{a^2} - 1}{a^2} 4 \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right) + \frac{J^2}{16\pi^2} \frac{16}{a^4} \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)^2 \quad (3.110)$$

Mit $\frac{J}{4\pi u} = \frac{a^2}{4}$ folgt also:

$$U^2 = u^2 \left(4 \frac{s^2}{a^2} - 3 \frac{s^4}{a^4}\right) \quad (3.111)$$

Die Bernoulli-Gleichung $p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{const}$ liefert nun für die freie Strömung, d.h. für $z \rightarrow \infty$:

$$\text{const} = P + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (3.112)$$

Wir müssen $P = 0$ setzen, da wegen des geöffneten Körpers sonst eine Kraft wirken würde (Modellfehler). Die beiden Versionen der Bernoulli-Gleichung ergeben damit zusammen:

$$p = \frac{1}{2}\rho(u^2 - U^2) = \frac{1}{2}\rho u^2 \left(1 - 4\frac{s^2}{a^2} + 3\frac{s^4}{a^4}\right) \quad (3.113)$$

zu 2: Wir berechnen wegen der Zylindersymmetrie nur die z-Komponente der Kraft K : Für die Kraft auf ein Flächenelement mit der Flächennormale $d\vec{F}$ gilt:

$$d\vec{K} = p d\vec{F} \quad (3.114)$$

Da wir die Kraftkomponente in z-Richtung suchen, zerlegen wir das Flächenelement in einen Anteil in s-Richtung und z-Richtung, indem wir folgendes Skalarprodukt bilden:

$$d\vec{K} \cdot \vec{e}_z = p d\vec{F} \cdot \vec{e}_z = p dF \vec{n} \cdot \vec{e}_z = p 2\pi s ds \quad (3.115)$$

Die Gesamtkraft erhalten wir nun durch Integration:

$$\begin{aligned} K_z &= \int_0^a 2\pi s \frac{1}{2} \rho u^2 \left(1 - 4\frac{s^2}{a^2} + 3\frac{s^4}{a^4}\right) ds \\ &= \frac{\rho \pi u^2}{2} \int_0^a \left(1 - 4\frac{s^2}{a^2} + 3\frac{s^4}{a^4}\right) ds \\ &= \rho \pi u^2 a^2 \int_0^1 s (1 - 4x + 3x^2) dx \\ &= \frac{\rho \pi u^2 a^2}{2} (1 - 2 + 1) = 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

d'Alembertsches Paradoxon :

Die Kraft auf einen Körper in einer stationären, reibungsfreien Strömung verschwindet.

Totschlagargument: Wir betrachten das Problem aus einem System, in dem der Körper ruht, das heißt zu allen Zeiten ist die Strömung gleich und somit ergibt sich Folgendes:

- > alles ist zeitlich konstant: Energie, Impuls, Drehimpuls des Fluids
- > Körper erfährt weder Widerstand (Kraft in Bewegungsrichtung) wegen der Energieerhaltung (eine Kraft auf den Körper führt zu dessen Beschleunigung, d.h. einer Energieübertragung auf den Körper, was aber nicht möglich ist)
- > Körper erfährt auch keinen Auftrieb (Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung), da Impuls konstant
- > Körper erfährt kein Drehmoment, da der Drehimpuls konstant

Es gibt allerdings Lücken im Argument: Falls der Körper in unserem System ruht, so sind Energie, Impuls und Drehimpuls des (unendlich ausgedehnten Fluids) unendlich und somit ergibt sich das Problem $\infty + c = \infty$. Die Abhilfe könnte die Betrachtung eines endlichen Volumens (große Kugel sein), wobei sich aber die Frage stellt, ob es einen Energie-, Impuls- oder Drehimpulsstrom durch die Oberfläche der Kugel gibt, womit das Argument der Erhaltungssätze nichtig wäre.

Eine weitere Variante des Arguments: Wir betrachten ein ruhendes Medium und darin einen bewegten Körper (alle Größen endlich). Nach dem Prinzip der stationären Strömung müsste beim Bewegen des Körpers sich die Strömung nicht ändern, sondern nur versetzt auftreten. Die Erhaltungssätze kann man nun anwenden, indem man die Größen einmal an einer Grenzfläche vor dem Körper zu 2 verschiedenen Zeiten und einmal an einer Grenzfläche hinter dem Körper betrachtet

und sich fragt, ob es eine Differenz zwischen den entsprechenden Größen gibt.

Die nachfolgende Tabelle beantwortet die Frage, ob Impuls/Energie ins Unendliche abfließen kann:

	2 Dimensionen	3 Dimensionen
$ \vec{u} $ für $r \rightarrow \infty$	$\sim \frac{1}{r}$	$\sim \frac{1}{r^3}$
Impulsfluss durch Fläche $\sim \vec{u} \cdot \vec{F}$	$\sim \frac{1}{r} 2\pi r = 2\pi \neq 0$	$\sim \frac{1}{r^3} 4\pi r^2 \rightarrow 0$
Energiefluss $\sim \vec{u} ^2 F$	$\sim \frac{1}{r^2} 2\pi r \rightarrow 0$	$\sim \frac{1}{r^6} 4\pi r^2 \rightarrow 0$
Drehimpuls $\vec{u} \times \vec{r} \cdot \vec{F}$	$\sim \frac{1}{r} 2\pi r \rightarrow \infty$	$\sim \frac{1}{r^3} r 4\pi r^2 = 4\pi$
Fazit	Querkraft und Drehmoment	keine Kraft aber Drehmoment

Literatur(Strömungsphysik / Umströmung von Tragflächen):

- Kutta/Schukowski (Joukowski)
- Prandtl

Impulsbilanz für allgemeine Dipolfelder Nun wollen wir die Impulsbilanz aufstellen und betrachten dazu die Impulsdichte $\rho \vec{u}$. Lokal gilt nun:

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{u}) = \rho \frac{d}{dt} \vec{u} = -\vec{\nabla} p \quad (3.117)$$

Nach Integration über das Volumen V ergibt sich:

$$\rho \int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau + \rho \int_V (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i d\tau + \int_V \partial_i p d\tau = 0 \quad (3.118)$$

Wir benutzen den Satz von Gauß für den Gradienten:

$$\int_V \vec{\nabla} p d\tau = \oint p d\vec{F} \quad (3.119)$$

Diesen beweisen wir mit dem normalen Satz von Gauß, wobei $\vec{a} = \text{const}$ aber beliebig:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \int_V \vec{\nabla} p d\tau &= \int_V \vec{\nabla} (p \vec{a}) d\tau \\ &\stackrel{S.v.G.}{=} \oint p \vec{a} \cdot d\vec{F} \\ &= \vec{a} \cdot \oint p d\vec{F} \end{aligned}$$

Wir schreiben nun den Integranden des 2. Integrals um:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i = \vec{\nabla} (\vec{u} u_i) \quad (3.120)$$

Hierbei haben wir die Produktregel und $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (Inkompressibilität) ausgenutzt. Die Gleichung wird dann zu:

$$\rho \oint \frac{\partial \phi}{\partial t} d\vec{F} + \rho \oint \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{F}) + \oint p d\vec{F} = 0 \quad (3.121)$$

Für den Spezialfall einer stationären Strömung gilt: $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. Wir stellen die Strömungslösung nun als Summe aus einer konstanten Anströmung \vec{u}_0 und einer Dipolströmung \vec{u}_D dar (vgl. Multipolentwicklung der Elektrodynamik) und lassen die höheren Terme weg:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_D \quad (3.122)$$

Das Integrationsvolumen ist eine große Kugel mit dem Volumen V und der Oberfläche Σ , von der natürlich der Körper mit dem Volumen K und der Oberfläche S ausgeschlossen ist. Somit haben wir:

$$0 = \rho \oint_S \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{F}) + \rho \oint_{\Sigma} \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{F}) + \oint_S p d\vec{F} + \oint_{\Sigma} p d\vec{F} \quad (3.123)$$

Das erste Integral verschwindet, da an der Körperoberfläche die Randbedingung $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ gelten muss. Das 3. Integral ist nun die Kraft \vec{K} auf den Körper. Nach Umformung finden wir mit der Bernoulli-Gleichung:

$$\vec{K} = \oint_S p d\vec{F} = - \oint_{\Sigma} \left(\text{const} - \rho \frac{u^2}{2} \right) d\vec{F} - \rho \oint_{\Sigma} \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{F}) \quad (3.124)$$

Das Integral $\oint \text{const} d\vec{F} = 0$, da ein konstanter Fluss durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet. Nun können wir endlich die Kraft berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \rho \oint_{\Sigma} \left(\frac{u^2}{2} d\vec{F} - \vec{u} (\vec{u} \cdot d\vec{F}) \right) \quad (3.125) \\ \frac{\vec{K}}{\rho} &\stackrel{3.122}{=} \oint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{2} (\vec{u}_0^2 + 2\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_D + \vec{u}_D^2) d\vec{F} - (\vec{u}_0 + \vec{u}_D) [(\vec{u}_0 + \vec{u}_D) \cdot d\vec{F}] \right\} \\ &= \oint_{\Sigma} \left\{ (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_D) d\vec{F} - \vec{u}_D (\vec{u}_0 \cdot d\vec{F}) - \underbrace{\vec{u}_0 (\vec{u}_D \cdot d\vec{F})}_{=0} \right\} \\ &= \oint_{\Sigma} \left\{ (\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_D) d\vec{F} - \vec{u}_D (\vec{u}_0 \cdot d\vec{F}) \right\} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir einen Term \vec{u}_D^2 vernachlässigt und benutzt, dass der letzte Term gleich $\vec{u}_0 \oint_{\Sigma} \vec{u}_D \cdot d\vec{F} = 0$ ist. (Eigenschaft der Dipolströmung) Wie man sieht wird die Zerlegung 3.122 nur asymptotisch auf der Oberfläche der Kugel Σ gebraucht. Berechnen wir nun die Kraft in Bewegungsrichtung:

$$\vec{u} \cdot \frac{\vec{K}}{\rho} \stackrel{\vec{u}_D \cdot \vec{u}_0 \equiv \vec{u}_0 \cdot \vec{u}_D}{=} \oint_{\Sigma} \vec{u}_0 \cdot \vec{u}_D (\vec{u} \cdot d\vec{F}) - \oint_{\Sigma} \vec{u}_0 \cdot \vec{u}_D (\vec{u} \cdot d\vec{F}) = 0 \quad (3.126)$$

Wir können also feststellen, dass es keine Kraft in Bewegungsrichtung (Widerstand) gibt. Es kann höchstens eine Querkraft (z.B. Auftrieb) existieren.

Für die weiteren Betrachtungen leiten wir zunächst die **Greenschen Formeln** her: Dazu sei ein Gradientenfeld $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ und eine andere beliebige (differenzierbare) Funktion Φ gegeben.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{u}) &= \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{u} - \Phi \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{=0} \\ &= \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\phi \end{aligned} \quad (3.127)$$

Dabei haben wir die Produktregel ausgenutzt. Nun integrieren wir diese Gleichung über ein beliebiges Volumen und wenden den Satz von Gauß an:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\phi d\tau &= \int_V \vec{\nabla}(\Phi \vec{u}) dV \\ &\stackrel{\text{s.v.G.}}{=} \oint \Phi \vec{u} \cdot d\vec{F} \end{aligned} \quad (3.128)$$

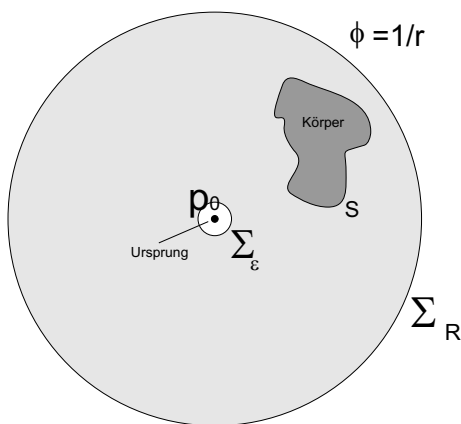


Abbildung 13: Der Ursprung unseres Koordinatensystems liegt außerhalb des Körpers mit der Oberfläche S . Die Integration einer kleinen Kugel mit Radius ϵ um den Ursprung sowie die Integration über eine große Kugel, die auch den Körper enthält, werden Σ_ϵ und Σ_R genannt.

Mit dem Potentialfeld $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ folgt nun:

$$\vec{u} \cdot d\vec{F} = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} dF \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S(V)} \Phi \vec{u} \cdot d\vec{F} &= \oint \Phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} dF \quad (3.130) \\ &= \oint \phi \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} dF \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt daher, dass wir anfangs mit einem Ausdruck gestartet waren, der symmetrisch in ϕ und Φ war. Aus der letzten Gleichheit folgt sofort die Greensche Formel:

$$\oint \left(\Phi \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} - \phi \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} \right) dF = 0 \quad (3.131)$$

Wir kennen bereits die Lösung stationärer Probleme aus der Elektrostatik (Laplace-Gleichung: $\Delta\phi = 4\pi\rho$). Möchte man zum Beispiel das elektrische Feld eines Kugelkondensators berechnen, so konstruiert man sich eine Lösung im gesamten Raum, indem man in den Innenraum fiktive Quellen setzt, so dass die Randbedingungen in diesem Fall $\vec{E} \parallel \vec{n}$ erfüllt werden. In der Hydrodynamik muss nun die Gleichung $\Delta\phi = 0$ erfüllt sein. Damit ist der führende Term in der Multipolentwicklung der Dipolterm. Wir müssen also das Potential als Funktion von Oberflächenintegralen mit Hilfe der Greenschen Formeln berechnen.

Sei nun ein Koordinatensystem gewählt, dessen Nullpunkt ein beliebiger Punkt außerhalb des Körpers ist. Wir betrachten nun unseren Körper mit der Oberfläche S und die große Kugel mit dem Radius R und werten das Integral am Punkt P aus, um den wir eine Kugel mit dem Radius ϵ legen. Für unser Potential $\Phi = \frac{1}{r}$ folgt nun:

$$0 = \oint_{\Sigma_R + S + \Sigma_\epsilon} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} - \phi \frac{\partial}{\partial\vec{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dF = I_R + I_S + I_\epsilon \quad (3.132)$$

Wir wollen erreichen: $I_\epsilon \sim \phi(P)$ und $I_R \sim \text{const.}$ Dazu berechnen wir die Integrale:

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &\stackrel{\partial/\partial r = -\partial/\partial n}{=} \frac{1}{\epsilon} \oint_{\Sigma_\epsilon} \frac{\partial\phi}{\partial n} dF + \oint_{\Sigma_\epsilon} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dF \\
&\stackrel{\vec{u} = \vec{\nabla}\phi}{=} \frac{1}{\epsilon} \oint_{\Sigma_\epsilon} \vec{u} \cdot d\vec{F} - \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{\Sigma_\epsilon} \phi dF \\
&\approx \frac{1}{\epsilon} \int_{\Sigma_\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV - \frac{1}{\epsilon} \phi(P) \oint_{\Sigma_\epsilon} dF \\
&= 0 - \phi(P) 4\pi\epsilon^2 \frac{1}{\epsilon^2} \\
&= -4\pi\phi(P)
\end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned}
I_R &= \frac{1}{R} \oint_{\Sigma_R} \frac{\partial\phi}{\partial n} dF + \frac{1}{R^2} \oint_{\Sigma_R} \phi dF \\
&= \frac{1}{R} \int_{\Sigma_R} \vec{u} \cdot d\vec{F} + \frac{1}{R^2} \oint_{\Sigma_R} \phi dF \\
&= \frac{J}{R} + \frac{R^2}{R^2} \oint \phi d\Omega \\
&= \frac{J}{R} + \oint \phi d\Omega
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Wir haben hierbei die radiale Integration trivial ausgeführt und benutzt: $dF = r^2 d\phi \sin\vartheta d\vartheta = r^2 d\Omega$. Jetzt zeigen wir, dass J_R unabhängig von R und von der Wahl des Punktes P ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_R}{\partial R} &= -\frac{J}{R^2} + \oint \frac{\partial\phi}{\partial R} d\Omega \\
&\stackrel{\partial\phi/\partial n = \partial\phi/\partial R}{=} -\frac{J}{R^2} + \frac{1}{R^2} \int \vec{u} \cdot d\vec{F} \\
&\stackrel{J = \oint \vec{u} \cdot d\vec{F}}{=} -\frac{J}{R^2} + \frac{J}{R^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Um die Unabhängigkeit von P zu zeigen, verschiebe man Σ_R etwas in x-Richtung $\hat{=}$ Verschiebung von P:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_R}{\partial x} &= 0 + \oint_{\Sigma_R} \frac{\partial\phi}{\partial x} d\Omega \\
&= \oint_{\Sigma_R} u_x d\Omega \stackrel{\lim_{R \rightarrow \infty} u_x = 0}{=} 0
\end{aligned} \tag{3.136}$$

Für das Potential ϕ_P am Punkt P folgt dann insgesamt:

$$\phi(P) = C + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \vec{n}} - \phi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dF \tag{3.137}$$

Wir wählen nun ein neues Koordinatensystem, dessen Ursprung im Körper selbst liegt (siehe Abbildung 14). Sei nun \vec{s} der Ortsvektor zu einem Punkt Q auf der Oberfläche des Körpers und \vec{x} der Ortsvektor zum Punkt P, so ist $\vec{x} - \vec{s}$ der Vektor von Q nach P. Mit den Abkürzungen $|\vec{x}| = r$ und $|\vec{x} - \vec{s}| = r_{PQ}$ folgt nun für das Potential:

$$\phi(\vec{x}) = C + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} \right) dF \tag{3.138}$$

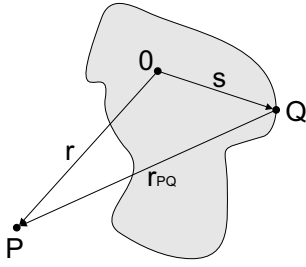


Abbildung 14: Definition des neuen Koordinatensystems mit dem Ursprung O innerhalb des umströmten Körpers und Veranschaulichung der relativen Vektoren sowie deren Längen

Für die approximative Berechnung führen wir eine Taylor-Entwicklung von r_{PQ} durch:

$$\begin{aligned} r_{PQ}^{-1} &= |\vec{x} - \vec{s}|^{-1} = \frac{1}{r} - \vec{s} \vec{\nabla}_s \frac{1}{r} + O(r^{-3}) \\ &= \frac{1}{r} + \vec{s} \cdot \vec{x} \frac{1}{r^3} + O(r^{-3}) \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} r_{PQ}^{-1} &= \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_s |\vec{x} - \vec{s}|^{-1} \\ &= \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{r^3} + O(r^{-3}) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Also ist unser Potential nun:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= C + \frac{1}{4\pi r} \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dF + \frac{1}{4\pi r^3} \vec{x} \cdot \oint_S \left(\vec{s} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \vec{n} \phi \right) dF + O(r^{-3}) \\ &= C - \frac{J}{4\pi r} - \frac{\vec{G} \cdot \vec{x}}{4\pi r^3} + O(r^{-3}) \end{aligned} \quad (3.141)$$

Hierbei haben wir das hydrodynamische Dipolmoment \vec{G} eingeführt mit:

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \oint \left(\vec{n} \phi - \vec{s} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dF \\ &= \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \end{aligned} \quad (3.142)$$

Betrachten wir die beiden Terme zur Interpretation:

$$\begin{aligned} \vec{G}_2 &= - \oint_S \vec{s} (\vec{u} \cdot d\vec{F}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\text{Körper}} \vec{x} dV = \int \frac{d\vec{x}}{dt} dV = \vec{U}V \end{aligned} \quad (3.143)$$

Hierbei haben wir benutzt dass $-\vec{u} \cdot d\vec{F}$ die lokale Volumenzunahme des umströmten Körpers ist und \vec{U} als Schwerpunktschwindigkeit des Körpers eingesetzt.

Nun können wir auch \vec{G}_1 interpretieren, indem wir zunächst den Impuls berechnen, der durch einen

Kraftstoß auf das Fluid übertragen wird:

$$\vec{I} = \int_0^\tau \vec{K} dt \quad (3.144)$$

$$\vec{K} = - \oint_S p d\vec{F} \quad (3.145)$$

Also folgt für den Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{I} &= - \int_0^\tau \oint_S p d\vec{F} dt \\ &= \rho \oint_S \phi d\vec{F} = \rho \vec{G}_1 \end{aligned} \quad (3.146)$$

Aus der Betrachtung des Integrals ergibt sich schließlich, dass es sich bei $\rho \vec{G}_1$ um den Impuls der in Bewegung versetzten Flüssigkeit handelt.

Jetzt können wir auch die Gesamtenergie berechnen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{u} \cdot \vec{u} d\tau \quad \begin{matrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{\nabla} \phi = \vec{u} \end{matrix} \quad \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{u}) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \rho \oint_{\Sigma_R + S} \phi \vec{u} \cdot d\vec{F} \approx \frac{1}{2} \rho \oint_S \phi \vec{u} \cdot d\vec{F} \\ &= \frac{1}{2} \rho \oint_S \phi \vec{U} d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \rho \oint_S \phi d\vec{F} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Hierbei ist \vec{U} die (konstante) Geschwindigkeit des Körperschwerpunktes. Mit der Definition $\vec{I} = \rho \vec{G}_1 = \rho \oint_S \phi d\vec{F}$ findet man dann für die Energie:

$$E = \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{I} \quad (3.148)$$

Dies ähnelt nun der in der Punktmechanik nicht üblichen, aber dennoch möglichen gemischten Darstellung der Energie als Produkt von Geschwindigkeit und Impuls:

$$E = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Das gesamte Dipolmoment ist nun:

$$\frac{1}{2} \rho \vec{U} \cdot \vec{G} = \frac{1}{2} \rho \vec{U} \cdot (\vec{G}_1 + \vec{G}_2) = E + \frac{1}{2} \rho V U^2 \quad (3.149)$$

Für den Impuls gilt nun $\vec{I} \sim \vec{U}$. Aber die Vektoren sind in der Regel nicht parallel, daher kann man mit dem Massentensor \hat{M} schreiben: $\vec{I} = \hat{M} \vec{U}$ Dieser berechnet sich nun wie folgt:

$$\vec{I} = \hat{M} \vec{U} = \rho (\vec{G} - \vec{G}_2) = \rho (\vec{G} - V \vec{U}) \quad (3.150)$$

Der Massentensor hat nun 3 Hauptmassenrichtungen, die in der Regel die Symmetrieachsen des Körpers sind. Für eine sich im Fluid bewegende Diskusscheibe ist der Massentensor derart, dass die hydrodynamische Masse für Bewegungen senkrecht zur Fläche größer ist als die Masse parallel zur Diskusfläche. Bewegt man den Diskus nun schräg in einem Fluid, so ist der Impuls \vec{I} nicht mehr parallel zur Geschwindigkeit, sondern in Richtung des Normalenvektors auf der Diskusfläche verdreht.

3.2.3 Methode der virtuellen Drehungen

Wir wollen nun den Einfluss des Massentensors qualitativ bestimmen. Wie aus der analytischen Mechanik bekannt, benutzen wir die virtuellen Verrückungen:

- virtuelle Verrückung $\delta E = \vec{F} \cdot \delta \vec{s}$ ergibt Kraft
- virtuelle Drehung $\delta E = \vec{\Theta} \cdot \delta \vec{\phi}$ ergibt Drehmoment

Eine äquivalente Darstellung der Drehung des Körpers ist die Änderung der Anströmung: $\delta \vec{U} = -\delta \vec{\phi} \times \vec{U} = \vec{U} \times \delta \vec{\phi}$. Somit folgt aus $E = \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2} \vec{U} \hat{M} \vec{U}$:

$$\delta E = \vec{I} \cdot \delta \vec{U} = \vec{I} \cdot (\vec{U} \times \delta \vec{\phi}) = \delta \vec{\phi} (\vec{I} \times \vec{U}) \quad (3.151)$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen virtuellen Verrückung folgt nun für das Drehmoment:

$$\vec{\Theta} = \vec{I} \times \vec{U} \quad (3.152)$$

mit $\vec{I} = \hat{M} \vec{U}$, was im Hauptmassensystem einfach zu $I_i = m_i U_i$ wird.

Betrachtet man nun eine Scheibe, für die $m_1 = m_3 < m_2$ gilt; und sei o.B.d.A. $U_3 = 0$ gewählt, so folgt für das Drehmoment:

$$\vec{\Theta} = -(0, 0, U_1 U_2 \Delta) \quad \text{mit } \Delta = m_2 - m_1$$

Betrachtet man die Auswirkungen des Drehmoments, so beginnt die Scheibe sich um die 3-Achse zu drehen, das heißt sie dreht sich in die Richtung maximaler hydrodynamischer Masse, was für die Bewegung des Diskus ungünstig ist.

Gegenmaßnahmen sind:

1. aktiv; z.B. Rakete, Pfeil: Gegendrehmoment durch Tragflächen
Gegendrehmoment durch Schwerkraft
2. passiv; z.B. Gewehrkuugel, Diskus, Frisbee, Speer: Drehimpulsstabilisierung

3.2.4 Quellenverteilung für die Kugeloberfläche

Wir hatten oben die Anströmung einer Quelle behandelt und das entsprechende Potential zu $\Phi = U_z - \frac{J}{4\pi\sqrt{s^2+z^2}}$ berechnet. Der Fluss durch den Deckel des betrachteten Zylinders war $\frac{J}{2} \left(1 - \frac{z}{r}\right)$. Jetzt betrachten wir eine Quelle und eine Senke der Stärke J im Abstand h vom Ursprung. Durch einfache Ersetzung und das Superpositionsprinzip finden wir für das Potential:

$$\Phi = U_z - \frac{J}{4\pi\sqrt{s^2+(z+h)^2}} + \frac{J}{4\pi\sqrt{s^2+(z-h)^2}} \quad (3.153)$$

Wieder muss der Gesamtfluss verschwinden und wir erhalten mit der Notation $+$ für die Quelle und $-$ für die Senke:

$$0 = \pi s^2 U_z - \frac{J}{2} \left(1 - \frac{z^+}{r^+}\right) + \frac{J}{2} \left(1 - \frac{z^-}{r^-}\right) \quad (3.154)$$

Benutzen wir die Ergebnisse der vorherigen Überlegungen und ersetzen r, so ergibt sich:

$$0 = \pi s^2 U_z + \frac{J}{2} \left(\frac{z-h}{\sqrt{s^2-(z-h)^2}} - \frac{z+h}{\sqrt{s^2+(z+h)^2}} \right) \quad (3.155)$$

Zur weiteren Auswertung machen wir eine Taylor-Entwicklung der Funktion in Klammern:

$$\begin{aligned} J(f(s, z+h) - f(s, z-h)) &\stackrel{h \ll 1}{=} J 2h \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_h = 0 \\ &= G \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_h = 0 \end{aligned} \quad (3.156)$$

G ist eine Konstante: für den Übergang $h \rightarrow 0$ wird $J \rightarrow \infty$ gewählt. Also wird unsere Gleichung zu:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi s^2 U_z - \frac{1}{2} 2hJ \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{s^2 + z^2}} \\ &= \pi s^2 U_z - hJ \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{s^2 + z^2}^3} \right) \\ &= \pi s^2 U_z - \frac{hJs^2}{r^3} \end{aligned} \quad (3.157)$$

Die Lösungen der Gleichung sind nun:

1. $s = 0$ (uninteressant)
2. $s \neq 0$

$$\implies \frac{\pi U_z}{hJ} = \frac{1}{r^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi U_z}{G} = \frac{1}{r^3} = \text{const} \quad (3.158)$$

Es handelt sich also um die Oberfläche einer Kugel. Also ist die Stärke des Dipolmoments einer umströmten Kugel mit dem Radius r gerade

$$G = 2\pi U r^3 \quad (3.159)$$

Auf diese Weise lässt sich nun der Massentensor (Zusatzmasse einer Kugel bei der Bewegung durch ein Fluid) berechnen:

$$\hat{M}\vec{U} = \rho (\vec{G} - V\vec{U}) \quad (3.160)$$

Wegen der Symmetrie der Kugel ist der Massentensor diagonal. Wir benutzen die Gleichung 3.159 sowie das Volumen der Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und erhalten:

$$mU = \rho(G - VU) \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} &= \rho(2\pi U r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 U) = \rho\pi U r^3 (2 - \frac{4}{3}) \\ &= \rho \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3 U = \frac{1}{2} M U \end{aligned} \quad (3.162)$$

Hierbei haben wir M als die Masse der (wassergefüllten) Kugel gesetzt. Wir sehen also: Die halbe Masse muss zusätzlich bewegt werden [Im Falle eines Körpers mit der gleichen Dichte wie das Fluid].

Aufsteigen von Luftblasen Als Anwendung berechnen wir die Beschleunigung von Luftblasen, die in Wasser aufsteigen (Sektperlen).

Mit der newtonschen Grundgleichung $F = ma$ und der Auftriebskraft auf eine Luftblase, die die Masse M an Wasser verdrängt gilt:

$$F = Mg = \rho_w V g \quad (3.163)$$

Berechnen wir noch schnell die Masse unter Berücksichtigung der hydrodynamischen Masse und vernachlässigen die Masse der Luft, so gilt:

$$m = \frac{1}{2} M + m_{Luft} \approx \frac{1}{2} M \quad (3.164)$$

Also gilt:

$$Mg = \frac{1}{2} Ma \implies a = 2g \quad (3.165)$$

Die Luftblasen steigen also nach den Fallgesetzen auf, wobei auf sie die doppelte Erdbeschleunigung wirkt.

4 Zweidimensionale Strömungen

Zur Beschreibung vierdimensionaler Größen kann man Quaternionen benutzen, während es für die Beschreibung 3-dimensionaler Größen keine Möglichkeit gibt, da alle bekannten mathematischen Konstruktionen nicht nullteilerfrei sind. Für 2-dimensionale Größen kann man die komplexen Zahlen benutzen. Zwar sind alle physikalischen Strömungen 3-dimensional, jedoch lassen sich viele Phänomene auch mittels 2-dimensionaler Strömungen beschreiben, was dann eine leichte Formulierung mittels komplexer Zahlen erlaubt.

4.1 Allgemeine Vorüberlegungen

Gesucht sind also die Lösungen der Laplace-Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 & (4.166) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Wir benutzen also die komplexe Zahl, die sich als $z = x + iy$ darstellen lässt und verwenden als Lösung analytische Funktionen:

$$f(z) = f(x + iy) = \underbrace{\phi(z) + i\Psi(z)}_{\text{Aufspaltung in Real- und Imaginärteil}} \quad (4.167)$$

$f(z)$ hat nun eine eindimensionale Abhängigkeit von einer komplexen Variablen und ist differenzierbar. Zunächst leiten wir einige Eigenschaften komplexer (analytischer) Funktionen her:

1. Real- wie Imaginärteil einer analytischen Funktion erfüllen die Laplacegleichung:

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi(x + iy) + i\Psi(x + iy) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = if'(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -f''(z) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(z) - f''(z) = 0 \end{aligned}$$

2. Jede Lösung einer Laplace-Gleichung ist Real- oder Imaginärteil einer analytischen Funktion:

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi(x + iy) + i\Psi(x + iy) \text{ ist analytische Funktion} \\ \Leftrightarrow \text{Cauchy-Riemannsche DGL'en gelten} & \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{aligned}$$

Die eine Richtung ist trivial: analytisch \Rightarrow G.R. DGL'en gelten

Für die andere Richtung muss man nur zeigen, dass aus den G.R. DGL'en die Differenzierbarkeit von $f(z)$ folgt.

ϕ erfülle nun die Laplace-Gleichung. Gesucht ist nun Ψ , so dass $f = \phi + i\Psi$ analytisch ist. Aus den Cauchy-Riemannschen DGL'en folgt nun für die Ableitungen, die im folgenden als Subscript dargestellt sind:

$$\Psi_x = -\phi_y \quad \Psi_y = \phi_x \quad (4.168)$$

Wir stellen nun Ψ durch ein Integral dar:

$$\begin{aligned} \Psi &= \int d\Psi = \int (\Psi_x dx + \Psi_y dy) & (4.169) \\ &= \int (-\phi_y dx + \phi_x dy) \end{aligned}$$

Das Integral ist nun eindeutig bestimmt, falls f analytisch ist.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\Psi_x, \Psi_y, 0) &= 0 \\ \Rightarrow \Psi_{xy} - \Psi_{yx} &= 0 \Leftrightarrow \Psi_{xy} = \Psi_{yx}\end{aligned}\tag{4.170}$$

Aus den Cauchy-Riemannschen DGL'en folgt:

$$\begin{aligned}-i\phi_{yy} &= \phi_{xx} \\ \Leftrightarrow \Delta\phi &= 0\end{aligned}$$

Wir betrachten nun folgendes Skalarprodukt:

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\Psi = \phi_x\Psi_x + \phi_y\Psi_y = -\phi_x\phi_y + \phi_y\phi_x = 0\tag{4.171}$$

Dies bedeutet, dass beide Felder senkrecht aufeinander stehen. Wir interpretieren daher $\phi = \text{const}$ als Äquipotentialflächen und $\Psi = \text{const}$ als Stromlinien und Ψ ist dann die so genannte Stromfunktion.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}f(z) &= \phi + i\Psi \\ f'(z) &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + i\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ &= u - iv\end{aligned}\tag{4.172}$$

Hierbei sind u und v die Komponenten des (reellen) Geschwindigkeitsfeldes (unserer 2-dimensionalen Strömung) in x- und in y-Richtung.

4.2 Anwendungen

4.2.1 Punktquelle / Linienquelle

Wir kennen das Geschwindigkeitsfeld der Punktquelle schon aus vorherigen Abschnitten und schreiben daher:

$$|\vec{u}| = \frac{J}{2\pi r}\tag{4.173}$$

Für die einzelnen Komponenten gilt nun:

$$f'(z) = \frac{J}{2\pi r} (\cos\vartheta - i\sin\vartheta) \begin{cases} u = \frac{J}{2\pi r} \cos\vartheta \\ v = \frac{J}{2\pi r} \sin\vartheta \end{cases}\tag{4.174}$$

Wir schreiben nun die Ableitung etwas um, damit sich die Funktion selbst leichter durch Integration ergibt:

$$f'(z) = \frac{J}{2\pi r} (\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)) = \frac{J}{2\pi r} e^{-i\vartheta}\tag{4.175}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{J}{2\pi r e^{i\vartheta}} \stackrel{z=r e^{i\vartheta}}{=} \frac{J}{2\pi z} \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{J}{2\pi} \ln z\end{aligned}\tag{4.176}$$

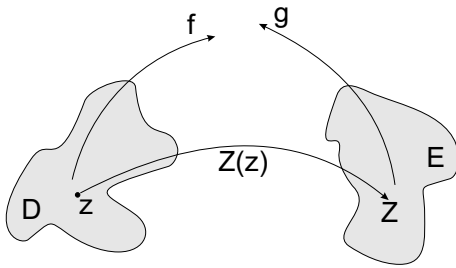


Abbildung 15: Wir bilden das Gebiet D mit einer analytischen und bijektiven Funktion $Z(z)$ auf das Gebiet E ab. Ist nun die Funktion f bekannt, so können wir die Funktion g mittels der Funktion $Z(z)$ berechnen und umgekehrt.

4.2.2 Wirbellinien

Auch hier kennen wir das Geschwindigkeitsfeld bereits, daher erfolgt die Herleitung der Stammfunktion analog:

$$|\vec{u}| = \frac{K}{2\pi r} \quad (4.177)$$

$$f'(z) = \frac{K}{2\pi r} (-\sin \vartheta - i \cos \vartheta) \begin{cases} u = \frac{-K}{2\pi r} \sin \vartheta \\ v = \frac{K}{2\pi r} \cos \vartheta \end{cases} \quad (4.178)$$

$$= \frac{-iK}{2\pi r} (\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = \frac{-iK}{2\pi r} e^{-i\vartheta}$$

$$= -\frac{iK}{2\pi z}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{iK}{2\pi} \ln z \quad (4.179)$$

$$\ln z = \ln(re^{i\vartheta}) = \ln r + \ln e^{i\vartheta} = \ln r + i\vartheta$$

Also ist ϑ nur bestimmt modulo 2π , das heißt $\oint_{K(0)} \frac{1}{z} dz = \ln z = 2\pi i$.

4.3 Methode der konformen Abbildungen

konforme Abbildung Die Methode der konformen Abbildungen ist aus der Elektrotechnik im Zusammenhang mit dem van der Pauw-Theorem bekannt.

Sei eine Funktion $Z(z) : D \Rightarrow E$ analytisch und bijektiv. Nun ist die Behauptung:

Ist f die Lösung eines Strömungsproblems in der Menge D , so folgt, dass $g = z^{-1} \circ f$ Lösung des entsprechenden Strömungsproblems in E ist.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

1. Wir zeigen zunächst, dass g analytisch ist, also die Laplace-Gleichung erfüllt und benutzen, dass Z^{-1} analytisch ist. Wir bilden also die Ableitung

$$(Z^{-1})' = \frac{1}{Z'}, \quad (4.180)$$

die existiert, da Z injektiv ist. Weiterhin gilt

$$(Z^{-1} \circ f)' = \frac{dZ^{-1}}{df} \frac{df}{dZ}.$$

Auch dieser Ausdruck existiert somit, da f und Z analytisch sind.

2. Wir zeigen nun, dass die Randbedingungen respektiert werden, da konforme Abbildungen winkeltreu sind.

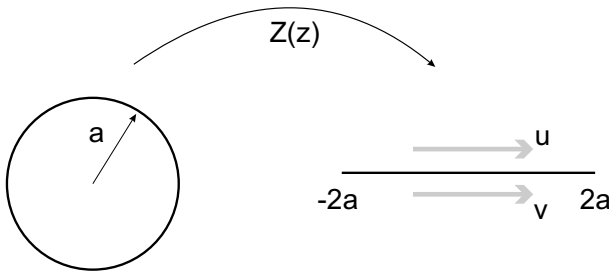


Abbildung 16: Der Kreis mit dem Radius a wird mittels der Funktion $Z(z)$ auf eine Platte der Länge $4a$ abgebildet. Gleichzeitig ergibt sich so eine Vorschrift für die Berechnung der den Geschwindigkeiten u und v an der Platte entsprechenden Geschwindigkeiten am Kreis.

$$\begin{aligned}
 z_0 &\rightarrow Z(z_0) = Z_0 & (4.181) \\
 z_0 + dz &\rightarrow Z(z_0 + dz) = Z(z_0) + dz \frac{dZ}{dz} \Big|_{z_0} \\
 &= Z(z_0) + dz k e^{i\chi}
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun zwei Richtungen für dz :

$$\begin{aligned}
 dz_1 = r e^{i\Theta_1} & \quad dZ_1 = r k e^{i(\Theta_1 + \chi)} \\
 dz_2 = r e^{i\Theta_2} & \quad dZ_2 = r k e^{i(\Theta_2 + \chi)}
 \end{aligned}$$

Der relative Winkel ist also in beiden Fällen $\Theta_1 - \Theta_2$.

4.3.1 Beispiele

- Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 Z(z) &= z + \frac{a^2}{z} & (4.182) \\
 &= r e^{i\vartheta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\vartheta} \\
 &= \cos \vartheta \left(r + \frac{a^2}{r} \right) + i \sin \vartheta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)
 \end{aligned}$$

überführt den Kreis mit dem Radius c in eine Ellipse mit den Halbachsen $c + \frac{a^2}{c}$ und $c - \frac{a^2}{c}$. Der Definitionsbereich umfasst hierbei nur die Ebene außerhalb des Kreises mit dem Radius $r = a$ (r und $\frac{a^2}{r}$ führen zum gleichen Bild).

- Setzen wir $r=a$, so ergibt sich eine Linie in der x - y -Ebene, die sich von $X = -2a$ bis $X = 2a$ erstreckt, was für unser 2-dimensionales System einem Brett entspricht. Jetzt lautet die konforme Abbildung:

$$z = a e^{i\Theta} + \frac{a^2}{a} e^{-i\Theta} = 2a \cos \Theta \quad (4.183)$$

4.4 Anwendung auf Strömungsprobleme: Umströmung von Tragflächen

Im folgenden werden zur Lösung des Problems mehrmals Transformationen der gleichen Form in beide Richtungen durchgeführt, hierbei ist zu beachten, dass die Variablen Z und z so benutzt werden, wie es im obigen Beispiel 4.3.1 geschehen ist. Dies führt leicht zu Verwirrung, da nicht jede Funktion, wie es in der Mathematik üblich ist, einzeln definiert wird (mit Angabe des Definitionsbereichs).

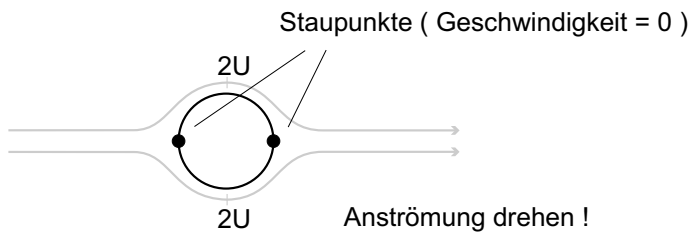


Abbildung 17: Umströmung des Kreiszyklinders mittels konformer Abbildung berechnet: an den Staupunkten verschwindet die Geschwindigkeit, während sie an den oberen und unteren Punkten maximal wird; gemäß Gleichung 4.190

4.4.1 Umströmung einer Platte

Sei nun die (triviale) Umströmung einer Platte, wie sie im 2. Beispiel entsteht, gegeben: $\vec{u} = \text{const.}$ Somit folgt für unsere analytische Funktion:

$$f'(z) = u - iv = U \begin{cases} u = U \\ v = 0 \end{cases} \quad (4.184)$$

Also ist das Potential um die Platte einfach durch Integration gegeben als:

$$f(z) = Uz \quad (4.185)$$

4.4.2 Umströmung eines Zylinders

Mit der Transformation $Z(z)$ erhält man sofort das Potential zur Umströmung des Kreises (Zylinders) und nach Differentiation auch das Geschwindigkeitsfeld:

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \text{ Potential} \quad (4.186)$$

$$f'(z) = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \text{ Geschwindigkeit} \quad (4.187)$$

Bleibt noch die Geschwindigkeit in x- und y-Richtung durch Trennung in Real- und Imaginärteil zu identifizieren. An der Oberfläche lässt sich $z = ae^{i\Theta}$ schreiben:

$$f'(ae^{i\Theta}) = U (1 - e^{-2i\Theta}) \quad (4.188)$$

$$= U (1 - \cos(2\Theta)) + iU \sin(2\Theta) = u - iv$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = U(1 - \cos(2\Theta)) \\ v = -U \sin(2\Theta) \end{cases} \quad (4.189)$$

Berechnen wir noch den Betrag der Geschwindigkeit q (vgl. Abbildung 17):

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = U \sqrt{1 - 2 \cos(2\Theta) + 1} \quad (4.190)$$

$$= U \sqrt{2(1 - \cos(2\Theta))} = 2U \sin \Theta$$

Die Geschwindigkeit beträgt also an dem der Strömung zugewandten und abgewandten Punkt gerade 0 und am oberen und unteren Punkt gerade $q = 2U$, also die doppelte Geschwindigkeit.

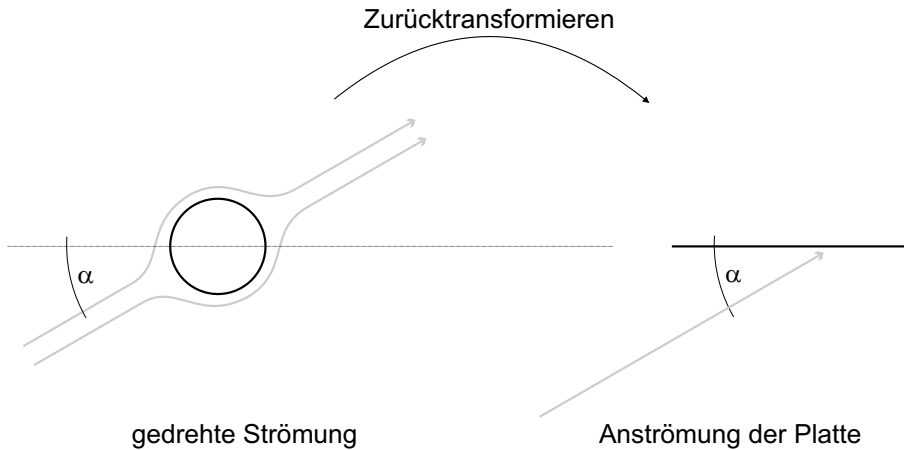


Abbildung 18: Die Anströmung der Platte unter einem Winkel berechnet man, indem man die Umströmung des Zylinders dreht und dann wieder zurücktransformiert.

4.4.3 Umströmung unter einem Winkel

Wir drehen nun die Anströmung durch Drehen des Koordinatensystems um den Winkel $-\alpha$, indem wir folgende Abbildung verwenden (siehe Abbildung 18):

$$z \rightarrow ze^{-i\alpha} \quad (4.191)$$

$$f(z) = U \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) \quad (4.192)$$

$$f'(z) = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) \quad (4.193)$$

Wir zeigen noch schnell, dass es sich wirklich um eine schräge Anströmung handelt, indem wir das Geschwindigkeitsfeld für $|z| \rightarrow \infty$ untersuchen:

$$\begin{aligned} f'(z) &\approx e^{-i\alpha} = U (\cos \alpha - i \sin \alpha) & (4.194) \\ &= u - iv \\ &\Rightarrow \begin{cases} u = U \cos \alpha \\ v = U \sin \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

4.4.4 Schräge Anströmung einer Platte

Zurücktransformation liefert dann schließlich das Potential der Anströmung einer Platte unter dem Winkel α . Wir berechnen aber gleich das Geschwindigkeitsfeld nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{\frac{df}{dz}}{\frac{dZ}{dz}} & (4.195) \\ &= \frac{f'(z)}{1 - \frac{a^2}{z^2}} \end{aligned}$$

Auswertung an der Oberfläche liefert nach Parametrisierung $Z = ae^{i\Theta}$:

$$\begin{aligned} f'(Z) &= U \frac{e^{-i\alpha} - e^{-2i\Theta} e^{i\alpha}}{1 - e^{-2i\Theta}} = U \frac{e^{i(\Theta-\alpha)} - e^{-i(\Theta-\alpha)}}{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}} & (4.196) \\ &= U \frac{\sin(\Theta - \alpha)}{\sin \Theta} \quad \text{kein Imaginärteil} \end{aligned}$$

Betrachten wir den Ausdruck für $\alpha \neq 0$, so wird die Geschwindigkeit für $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$, also

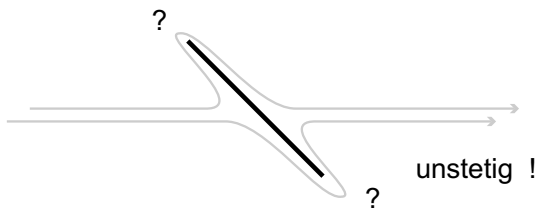


Abbildung 19: Für die Wahl $\vartheta = 0$ findet man eine Umströmung der Platte, die zumindest an deren Enden unstetig ist und nicht der erwarteten Strömung entspricht

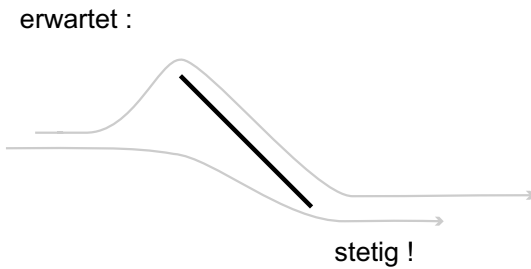


Abbildung 20: Die erwartete Strömung ist nun stetig an den Enden: Wir müssen also einen Wirbel dazuaddieren!

an den Enden des Brettes, unendlich, was nicht der erwarteten Strömung entspricht. Also muss die Strömung noch Wirbel enthalten. Diese addieren wir zum Potential. Das machen wir aber wieder am Kreis!

$$f(Z) = U \left(Ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{Z} e^{i\alpha} \right) + \frac{iK}{2\pi} \ln(Z) \quad (4.197)$$

$$f'(Z) = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{Z^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{iK}{2\pi Z} \quad (4.198)$$

$$f'(z) = \frac{U \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{iK}{2\pi Z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}} \quad \text{nach Transformation} \quad (4.199)$$

Wir parametrisieren wieder an der Oberfläche und sorgen durch geeignete Wahl von K , dass die Singularität verschwindet:

$$\begin{aligned} f(ae^{i\Theta}) &= \frac{U(e^{-i\alpha} - e^{-2i\Theta} e^{i\alpha}) - \frac{iK}{2\pi a} e^{-i\Theta}}{1 - e^{-2i\Theta}} & (4.200) \\ &= U \frac{\sin(\Theta - \alpha)}{\sin \Theta} - \frac{iK}{2\pi a(e^{i\Theta} - e^{-i\Theta})} \\ &= U \frac{\sin(\Theta - \alpha)}{\sin \Theta} - \frac{K}{4\pi a \sin \Theta} \\ &= \frac{U \sin(\Theta - \alpha) + \frac{K}{4\pi a}}{\sin \Theta} \end{aligned}$$

Der Zähler muss für $\sin \Theta = 0$ verschwinden, also muss gelten:

$$K = 4\pi a U \sin \alpha \quad \text{stetiger Abfluss an der Hinterkante} \quad (4.201)$$

Setzen wir die Bedingung ein, so folgt für das Potential:

$$f(ae^{i\Theta}) = \frac{U \cos(\frac{\Theta}{2} - \alpha)}{\cos \frac{\Theta}{2}} \quad (4.202)$$

4.4.5 Theorem von Blasius

Wir betrachten ein infinitesimales Oberflächenelement ds auf einer Fläche, die um den Winkel χ geneigt ist. Dann gilt:

$$dx = \cos(\chi) ds \quad (4.203)$$

$$dy = \sin(\chi) ds \quad (4.204)$$

$$\Rightarrow dz = dx + idy = e^{i\chi} ds \quad (4.205)$$

Wirkt nun auf diese Fläche ein Druck p , so ergibt sich die Kraft durch Aufintegration:

$$K_x = \oint (-\sin(\chi))p ds \quad (4.206)$$

$$K_y = \oint \cos(\chi)p ds \quad (4.207)$$

Für den Druck ist nach der Bernoulli-Gleichung einzusetzen

$$p = P - \frac{1}{2}\rho q^2 \quad (4.208)$$

Der Hydrostatische Druck P fällt wegen der geschlossenen Integration weg, d.h. für die Kräfte gilt dann:

$$K_x = \frac{\rho}{2} \oint \sin(\chi)q^2 ds \quad (4.209)$$

$$K_y = -\frac{\rho}{2} \oint \cos(\chi)q^2 ds \quad (4.210)$$

Wir wollen nun die analytische Funktion verwenden, für die gilt:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u - iv \quad \text{mit} \quad u = q \cos(\chi) \quad v = q \sin(\chi) \\ &= qe^{-i\chi} \end{aligned} \quad (4.211)$$

$$\Rightarrow q = f'(z)e^{i\chi} \quad (4.212)$$

$$K_x = \frac{\rho}{2} \oint \sin(\chi)f'^2(z)e^{2i\chi} ds \quad (4.213)$$

$$K_y = -\frac{\rho}{2} \oint \cos(\chi)f'^2(z)e^{2i\chi} ds \quad (4.214)$$

mit 4.205 folgt nun:

$$K_x = \frac{\rho}{2} \oint \sin(\chi)f'^2(z)e^{i\chi} dz \quad (4.215)$$

$$K_y = -\frac{\rho}{2} \oint \cos(\chi)f'^2(z)e^{i\chi} dz \quad (4.216)$$

es folgt mit: $e^{i\chi} = \cos(\chi) + i \sin(\chi)$

$$K_y + iK_x = -\frac{\rho}{2} \oint (f'(z))^2 dz \quad (4.217)$$

Für die geschlossene komplexe Integration, also das Residuum trägt nur der erste Term der Laurent-Reihe des Integranden $\sim z^{-1}$ bei. Wir müssen einfach die Reihe bestimmen, um das Integral auszuwerten:

$$f'(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots \quad (4.218)$$

Also gilt für den Integranden:

$$(f'(z))^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 z^{-1} + (a_1^2 + 2a_0 a_2) z^{-2} \dots \quad (4.219)$$

Dann gilt für das Integral, das genau das erste Glied der Laurent-Reihe multipliziert mit $2\pi i$ ergibt:

$$K_y + iK_x = -\frac{\rho}{2} \oint (f'(z))^2 dz = -\frac{\rho}{2} 2a_0 a_1 2\pi i \quad (4.220)$$

Dies ist nun das Theorem von Blasius, das es ermöglicht die Kraft zu berechnen, wenn die konstante Anströmung sowie die Zirkulation vorgegeben ist, bzw. durch die Randbedingungen bestimmt werden kann. Man sieht unmittelbar ein, dass a_0 die Anströmung ist. a_1 ist nun die Zirkulation, wie folgende einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \oint f'(z) dz &= 2\pi i a_1 & (4.221) \\ &= \oint (u - iv)(dx + i dy) \\ &= \oint u dx + \oint v dy + i \oint (u dy - v dx) \\ &= \oint \vec{u} \cdot d\vec{s} + 0 \\ &= -K \quad \text{Zirkulation} \\ \Rightarrow 2\pi i a_1 &= -K \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das erstmals von Kutta, Schukowski (1906-1910) veröffentlichte Ergebnis:

$$\boxed{K_y + iK_x = \rho u_\infty k} \quad (4.222)$$

4.4.6 Berechnung des Auftriebs

Wir gehen wieder vom Zylinder aus, für dessen Kräfte natürlich gilt:

$$\begin{aligned} K_x &= 0 & (4.223) \\ K_y &= \rho U^2 4\pi a \sin \alpha \end{aligned}$$

Nach der Transformation mittels konformer Abbildung auf die Platte erhalten wir das gleiche Ergebnis, da

$$f'(Z) = f'(z) \frac{1}{1 - \frac{a^2}{z^2}} = f'(z) \left(1 + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4} - \frac{a^6}{z^6} + \dots \right) \quad (4.224)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_0^Z &= a_0^z & (4.225) \\ a_1^Z &= a_1^z \\ a_2^Z &= a_1^z + a_0^z a^2 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen die Entwicklungskoeffizienten mit kleinem z diejenigen für den Zylinder und die mit dem großen Z diejenigen für die Platte. Da bei der Auswertung des geschlossenen komplexen Integrals nur das Residuum beiträgt, reicht es die ersten beiden Koeffizienten zu betrachten (wegen des Quadrates $(f'(z))^2$).

4.4.7 Berechnung des Drehmoments

Wir integrieren die z -Komponente des Drehmoments über die Oberfläche des Körpers auf und erhalten

$$\begin{aligned} \int (\vec{r} \times \vec{K})_z ds &= \int (xK_y - yK_x) ds & (4.226) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int (x + iy)(K_y + iK_x) ds \right\} \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint z (f'(z))^2 dz \right\} \end{aligned}$$

Für unser Beispiel gilt dann (wieder mit Reihenentwicklung und Berücksichtigung der Terme $\sim z^{-1}$):

$$\begin{aligned} \int (\vec{r} \times \vec{K})_z ds &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \left(\underbrace{a_1^2}_{a_1 \text{ rein imaginär}} + 2a_0 a_2 \right) \right\} & (4.227) \\ &= -2\rho \operatorname{Re} \{ \pi i a_0 a_2 \} \\ &= 2\rho\pi \operatorname{Im} \{ (a_0 a_2) \} \end{aligned}$$

4.4.8 Realistische Berechnungen

Das unendlich dünne Brett als Modell einer Tragfläche erscheint doch sehr rudimentär. Mittels leicht abgeänderter konformer Abbildungen lassen sich auch die Formen der umströmten Körper besser modellieren, wie die folgende Auflistung zeigt.

1. Einen Körper mit endlicher Dicke erhält man, wenn man den Zylinder mit dem Radius $r = c$ nicht mit einer Abbildung an der Oberfläche, sondern mit einer Abbildung, die einen Kreis mit dem Radius $r = a > c$ abbildet.
2. Eine symmetrische Tragfläche, die an der Vorderseite stumpf ist und an der der Strömung abgewendeten Seite spitz zuläuft, wie man sie bei Sportflugzeugen findet, erhält man, wenn man den umströmten Zylinder mit dem Radius a mittels einer konformen Abbildung, die einen Kreis mit dem Radius $r = b = a + \delta$, dessen Mittelpunkt so gelegt ist, dass er den Zylinder gerade berührt, abbildet.
3. Eine Tragfläche mit Wölbung erhält man, wenn der Mittelpunkt der konformen Abbildung auf $(-\delta, \epsilon)$ gesetzt wird, wobei der umströmte Zylinder seinen Mittelpunkt im Ursprung hat. (nachzulesen in: Truckenbrodt, Schlichting: Aerodynamik des Flugzeugs)

Für den Fall der symmetrischen Tragfläche benutzen wir die konforme Abbildung wie oben und ersetzen $z \rightarrow z + \delta$:

$$f(z) = U \left[(z + \delta) + \frac{b^2}{z + \delta} \right] \quad (4.228)$$

Die Strömung ergibt sich dann als Ableitung:

$$f'(Z) = \frac{U [e^{-i\alpha} - b^2(z + \delta)^{-2} e^{i\alpha}] + \frac{ik}{2\pi} \frac{1}{z + \delta}}{1 - \frac{a^2}{z^2}} \quad (4.229)$$

Wieder verschwindet der Zähler für $z = a$, daher muss man die Zirkulation folgendermaßen wählen:

$$K = 4\pi b U \sin \alpha \quad (4.230)$$

Wir berechnen wieder das Drehmoment durch Integration nach 4.228 und lesen die Koeffizienten ab:

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\rho \operatorname{Im} \{ a_0 a_2 \} \\ a_0 &= U e^{-i\alpha} \end{aligned} \quad (4.231)$$

$$a_2^Z = -b^2 U e^{i\alpha} - \frac{ik\delta}{2\pi} \quad (4.232)$$

Wir haben dabei die Reihenentwicklung von

$$\frac{1}{z + \delta} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{\delta}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{\delta}{z} + \frac{\delta^2}{z^2} + \dots \right)$$

benutzt. Wie im vorigen Abschnitt verändert sich bei der konformen Abbildung der Koeffizient a_2^z :

$$\begin{aligned} a_2^z &= a_2^Z + a_0^Z a^2 & (4.233) \\ &= U e^{-i\alpha} (a^2 - b^2 e^{2i\alpha}) - \frac{ik\delta}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 2\pi\rho \operatorname{Im} \left\{ U^2 e^{-2i\alpha} (a^2 - b^2 e^{2i\alpha}) - \frac{ikU\delta}{2\pi} e^{-i\alpha} \right\} & (4.234) \\ &= -2\pi\rho \left\{ U^2 a^2 (-\sin(2\alpha)) - \frac{kU\delta}{2\pi} \cos\alpha \right\} \\ &\stackrel{4.230}{=} 2\pi\rho \sin(2\alpha) U^2 (a^2 + b\delta) \end{aligned}$$

Wie man anhand der ersten Zeile sieht, verschwindet das Drehmoment auch nicht, wenn wir keine Zirkulation einsetzen, ohne Zirkulation $k = 0$ ist das Drehmoment nur schwächer. Daneben ist das Drehmoment so gerichtet, dass die resultierende Drehung den Querschnitt in Anströmungsrichtung vergrößert.

Mit der bekannten Formel

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

für das Drehmoment berechnen wir nun noch den Hebelarm \vec{r} : Der Auftrieb war nach Formel 4.224 $\rho U^2 4\pi a \sin\alpha$ und somit ergibt sich mit 4.235 für den Hebelarm:

$$\begin{aligned} r &= -\frac{\sin(2\alpha)}{2} \left(a + \frac{b\delta}{a} \right) & (4.235) \\ &= -\cos\alpha \left(a + \frac{b\delta}{a} \right) \end{aligned}$$

Die Länge des Hebelarms hängt also vom Anstellwinkel α ab, was bedeutet, dass der scheinbare Angriffspunkt der Auftriebskraft mit dem Anstellwinkel wandert.

5 tsunami

Man unterscheidet Wellen in Volumina mit freier Oberfläche nach der Art ihrer Entstehung und somit auch nach ihren Eigenschaften:

1. Oberflächenwellen (windangeregt)
2. Flachwasserwellen (am Strand, Seebeben)

Zunächst behandeln wir beide Fälle in der Art quick + dirty (schnelle Darstellung, die zwar die richtigen Ergebnisse liefert, aber entweder mathematisch oder physikalisch nicht ganz korrekt ist).

5.1 Oberflächenwellen

Wir können die Wellenbewegung mit der Geschwindigkeit c auch in einem mit der Geschwindigkeit $-c$ bewegtes Bezugssystem beschreiben, in der die Welle ruht (zumindest die Oberfläche), was den Vorteil bringt, dass es sich um ein quasistationäres Problem handelt. Wir betrachten die Wellen mit der Amplitude $2r$ als eine Kreisbewegung des Fluids mit dem Radius r und der Umlaufzeit T . Somit ergeben sich für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am oberen und unteren Punkt des Kreises (die Vorzeichen hängen von der konkreten Wahl des Koordinatensystems ab):

$$v_1 = c + \frac{2\pi}{T} r \quad (5.236)$$

$$v_2 = c - \frac{2\pi}{T} r \quad (5.237)$$

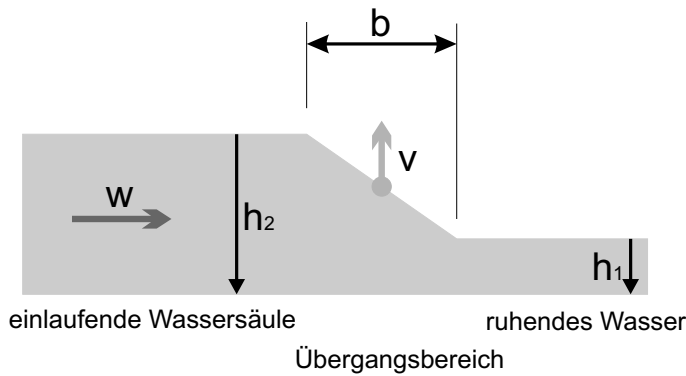


Abbildung 21: Wir beschreiben die sich bewegende Flachwasserwelle in unserem Modell als Schwall, dessen Wasserhöhe linear von einem Anfangswert h_1 des ruhenden Wassers zu einem Endwert h_2 mit der Geschwindigkeit v ansteigt.

Mit der Bernoulli-Gleichung folgt nun sofort:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad (5.238)$$

Hierbei ist Δp der hydrostatische Druck aufgrund des Schweredrucks der Flüssigkeit, somit ergibt sich:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} \frac{8\pi}{T} r c = \rho g 2r \quad (5.239)$$

Sofort formt man die Gleichung um und erhält (zusammen mit den bekannten Relationen aus der Wellenlehre):

$$\frac{2\pi}{T} c = g \quad (5.240)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\implies \omega c = g \quad (5.241)$$

$$c = \lambda v = \frac{\omega}{k}$$

$$\implies c^2 k = g \quad (5.242)$$

$$\text{oder: } c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \quad (5.243)$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} \quad (5.244)$$

5.2 Flachwasserwellen

Wir beschreiben diese Wellenform im einfachsten Fall mit einem Schwall, also einer Wassersäule der Höhe h_2 , die sich mit der Geschwindigkeit w auf eine ruhende Wasserschicht der Höhe h_1 zubewegt. Im Übergangsbereich der Breite b steigt das Wasser mit der Geschwindigkeit v . Wir benutzen 2 Grundprinzipien, um den Zusammenhang herzuleiten:

1. Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

Die Geometrie liefert für die Steiggeschwindigkeit:

$$\frac{v}{c} = \frac{h_2 - h_1}{b} \quad (5.245)$$

Der Massenzuwachs im Übergangsbereich B ist demnach einfach (bis auf eine Proportionalität der Dichte und Grundfläche) bv . Ebenso ist die Massenabnahme im Bereich des bewegten Wassers $h_2 w$ und somit ergibt sich:

$$h_2 w = bv = c(h_2 - h_1) \quad (5.246)$$

2. Dynamische Grundgleichung ($F = ma$) Da der Bereich b von der Welle in der Zeit τ durchlaufen wird, folgt für die Beschleunigung:

$$a = \frac{w}{\tau} = \frac{wc}{b} \quad (5.247)$$

Setzen wir h_m als die mittlere Wasserhöhe ein und benutzen wie im vorherigen Abschnitt den hydrostatischen Druck, so erhalten wir:

$$F = \rho b h_m \frac{wc}{b} = \rho h_m wc \quad (5.248)$$

$$= \Delta p h_m = \rho g (h_2 - h_1) h_m$$

$$wc = g (h_2 - h_1) \quad (5.249)$$

Einsetzen in die obige Gleichung 5.246 liefert dann:

$$\frac{c^2 (h_2 - h_1)}{h_2} = g (h_2 - h_1) \quad (5.250)$$

$$c^2 = gh_2 \Leftrightarrow c = \sqrt{gh}$$

Anhand eines Rechenbeispiels vergegenwärtigen wir uns die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wassertiefe: Für die Meerestiefe beim Seebeben setzen wir $h \approx 1 \text{ km}$ und erhalten $c \approx \sqrt{10^4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Beim Übergang zu flacherem Wasser $h \approx 10 \text{ m}$ ergibt sich eine kleinere Geschwindigkeit von $c \approx \sqrt{10^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

5.3 Wellentheoretische Lösung

Wir berechnen nun beide Wellenformen mit der linearisierten Wellentheorie, wobei wir die Geschwindigkeit \vec{u} als Potentialströmung darstellen, was dann auf die Laplace-Gleichung führt:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad \Delta \phi = 0 \quad (5.251)$$

Wir machen den folgenden Produktansatz für das Potential:

$$\phi = A(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.252)$$

Gleichzeitig benutzen wir die Inkompressibilität der Flüssigkeit $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Setzen wir unseren Ansatz in die DGL 5.251 ein, so ergibt sich folgende Gleichung für die Funktion $A(z)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = -k^2 \phi + \frac{A''(z)}{A(z)} \phi = 0 \quad (5.253)$$

Diese Gleichung lässt sich leicht umformen zu

$$A''(z) = k^2 A(z), \quad (5.254)$$

woraus direkt die Lösung

$$A(z) = A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz} \quad (5.255)$$

$$= C \sinh kz + D \cosh kz$$

bestimmen lässt (A_1 , A_2 sowie C und D sind Konstanten, die von den Anfangs- bzw. Randbedingungen abhängen). Damit es sich um eine physikalisch sinnvolle Lösung handelt, muss die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Meeresgrund verschwinden:

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_H = 0 \quad (5.256)$$

Hierbei ist H die Meerestiefe. Also ergibt sich die Lösung

$$A(z) = A \cosh(kz + H) \quad (5.257)$$

Für die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsfelds benutzen wir die Bewegungsgleichung in linearisierter Form:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (5.258)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (5.259)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \right) = 0$$

Ersetzen wir den Druck p durch $p - p_0$, so erhalten wir

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (5.260)$$

Wie oben sei nun H die Meerestiefe und η sei die Amplitude der Oberflächenwellen, also die Auslenkung aus der Ruhelage. Jetzt können wir die Randbedingung an der Oberfläche formulieren. Die linke Seite der Gleichung 5.260 ist nun gleich dem hydrostatischen Druck, somit ergibt sich nach Multiplikation mit der Dichte ρ

$$g\eta = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (5.261)$$

Differenzieren wir dies nach der Zeit und benutzen, dass die zeitliche Änderung der Amplitude gerade die Geschwindigkeit in z -Richtung ist $\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$, so ergibt sich:

$$g \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.262)$$

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.263)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 A(0) + gA'(0) &= 0 \\ \omega^2 &= gk \tanh(kH) \end{aligned} \quad (5.264)$$

Wir haben hier die Form des Potentials 5.252 und 5.257 benutzt und im letzten Schritt einfach abgeleitet und alles eingesetzt. Für die Wellengeschwindigkeit c gilt nun:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH} \sqrt{\frac{\tanh(kH)}{kH}} \quad (5.265)$$

Wir finden natürlich die oben behandelten 2 Spezialfälle für Oberflächenwellen und Flachwasserwellen wieder, indem wir folgende Grenzübergänge ausführen:

$$kH \rightarrow 0 \quad c \approx \sqrt{gH} \quad (5.266)$$

$$kH \rightarrow \infty \quad c \approx \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (5.267)$$

Index

- Auftrieb, 42
- Bahnlinie, 5
- Bernoulli-Gleichung, 7
- Bewegungsgleichungen
 - Euler-Beschreibung, 5
 - Lagrange-Beschreibung, 5
- Caucy-Riemannsches DGL'en, 34
- d'Alembertsches Paradoxon, 25
- Diffusion, 16
- Diffusionsgleichung, 16
- Dipolfelder, 22
- Dipolfeldes, 19
- Diskusscheibe, 31
- Drehmoment, 42
- Eindeutigkeitsbeweis, 13
- Energierhaltung, 7
- Flachwasserwellen, 45
- Gasgleichung, 22
- Greensche Formeln, 27
- hydrodynamisches Dipolmoment, 30
- Impulsbilanz, 26
- inkompressible Flüssigkeit, 7
- Kavitation, 19, 20
- Kompressionsarbeit, 21
- konforme Abbildung, 36
- Kontinuitätsgleichung, 7
- Kutta, Schukowski, 42
- Laplace-Gleichung, 17
- Laurent-Reihe, 41
- Linienquelle, 35
- Luftblasen, 33
- Magnetostatik, 8
- Massenerhaltung, 7, 45
- Massentensor, 31
- Methode der virtuellen Drehungen, 32
- Monopolfeld, 19
- Multipolentwicklung, 28
- Navier-Stokes-Gleichungen, 6
- Newtonsche Flüssigkeit, 6
- Newtonsche Grundgleichung, 5
- Oberflächenwellen, 44
- Potentialströmung, 7
- Potentialströmungen, 17
- Punktquelle, 35
- Rückströmung, 17
- Randbedingungen, 12
- Reibung, 15
- Reibungskraft, 6
- Rohrströmung, 8
- Satz von Gauß, 26
- Schiffsschrauben, 22
- Schwall, 45
- Sektperlen, 33
- Sonolumineszenz, 19
- Spiegelwirbel, 13
- stall, 17
- Staulinie, 22
- Staupunkt, 22
- Strömung
 - 2D, 10
 - ideal, 8
 - stationär, 7
 - zeitabhängig, 9
 - zweidimensional, 34
- Stromlinie, 5
- Theorem von Blasius, 41
- Totwasser, 17
- Tragfläche, 4
- Trennschicht, 9
- tsunami, 44
- Umströmung, 18
 - Platte, 38
 - schräger Einfall, 39
 - Tragfläche, 37
 - Zylinder, 38
- van der Pauw-Theorem, 36
- Volumenzähigkeit, 6
- Wandhaftbedingung, 15
- Wasserwellen
 - Wellentheorie, 46
- Weissenberg-Effekt, 6
- winkeltreu, 36
- Wirbelfaden, 9, 10
- Wirbellinien, 36
- Wirbelröhre, 10
- Wirbelsätze, 10
- Zähigkeit, 6
- Zirkulation, 11