ANTRITTSVORLESUNG, MITTWOCH, 6. JUNI 2001:

UNORDNUNG UND COULOMB-WECHSELWIRKUNGEN IN NIEDRIGDIMENSIONALEN METALLEN

PETER KOPIETZ

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK,

JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT

6. Juni 2001

Überblick

Es geht um die physikalischen Eigenschaften von Elektronen im Festkörper: Unordnung und Coulomb-Wechselwirkungen

1. Nicht-wechselwirkende Elektronen mit Unordnung

- freie Elektronen + periodisches Potential $\Longrightarrow$ Bandstruktur (Sommerfeld, Bloch, 1925-1930)
- Unordnung und Störstellen: Lokalisierung (Anderson, 1958)
- Quanteninterferenz $\Longrightarrow$ schwache Lokalisierung (Anderson et al., Gorkov et al., 1979)

2. Elektron-Elektron-Wechselwirkungen in Metallen

- ungelöste Probleme (2001)
- Abschirmung und Diffusion: diagrammatische Störungstheorie (Petersburg-Schule: Altshuler, Aronov et al, 1980-85)

3. Metallischer Coulomb Gap in $2d$ (...der Teil für Experten.)

(P. K., Phys. Rev. Lett. **81**, 2120, 1998)

Der gemeinsame Effekt von Unordnung und Coulomb-Wechselwirkungen

auf das Verhalten der Zustandsdichte eines zweidimenionalen Metalls.

1. Elektronen mit Unordnung

Ziel: Theorie der Leitungselektronen im Festkörper.

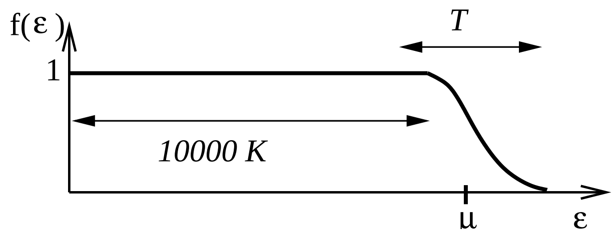
(1.1) Einteilchenbild ohne Unordnung (Sommerfeld, Bloch)

freie Elektronen + periodisches Potential $\Longrightarrow$ Bandstruktur

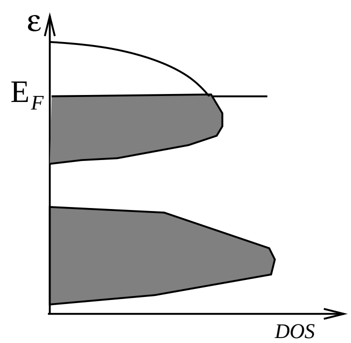
Eigenenergien: $\epsilon_n(\mathbf{k})$; Quantenzahlen: n: Bandindex; $\mathbf{k}$: Kristallimpuls

Fermi-Statistik: (Fermi, Dirac, 1926)

$$f(\epsilon_n(\mathbf{k})) = \frac{1}{e^{(\epsilon_n(\mathbf{k})-\mu)/T}+1}$$



metallischer Zustand:



chemisches Potential μ im Band erlaubter Energien: Fermienergie: $E_F = \mu(T=0)$

Thermodynamik:

elektronische spezifische Wärme: $C_{el} \propto \nu(0)T$

Zustandsdichte: $\nu(\epsilon) = \frac{1}{V}\Sigma_{n,\mathbf{k}}\,\delta(\epsilon - \epsilon_n(\mathbf{k})) > 0$

Einteilchenanregungen mit beliebig kleiner Anregungsenergie.

experimentelle Tatsache: normale Metalle haben endlichen Widerstand selbst bei $T = 0$:

$$\sigma(T=0) = \frac{ne^2\tau}{m} < \infty \quad , \quad \text{(Drude, 1900)}$$

Problem: freie Elektronen im periodischen Potential sind ideale Metalle:

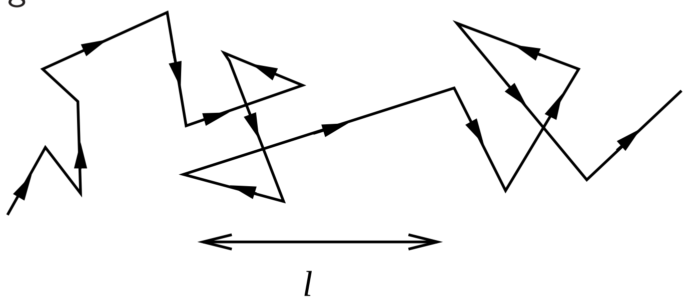
$$\sigma(T=0) = \infty$$

Wie entsteht der elektrische Widerstand?

(1.2) Unordnung quasiklassisch (Landau, 1955-57)

Elektronen im Festkörper streuen wiederholt an statischen Verunreinigungen;

$\Longrightarrow$ diffusive Bewegung:



einfachste Beschreibung: klassische Transport-Gleichung (Boltzmann, Landau)

zwischen Stössen bewegen Elektronen sich auf klassischen Bahnen.

τ: mittlere Zeit zwischen zwei Stössen

$\ell = v_F \tau$: mittlere freie Weglänge

$\mathcal{D} = v_F^2 \tau / 3$: klassischer Diffusionskoeffizient

Lineare Antwort-Funktionen: bei langen Wellenlängen, niedrigen Frequenzen

(hydrodynamisches Regime: $|\omega|\tau \ll 1$, $|\mathbf{q}|\ell \ll 1$): Diffusionspol

longitudinale Leitfähigkeit: $\sigma(\mathbf{q},\omega) = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{i\omega}{i\omega - \mathcal{D}\mathbf{q}^2}$

Dichte-Dichte Response: $\Pi(\mathbf{q},\omega) = 2\nu(0)\frac{\mathcal{D}\mathbf{q}^2}{\mathcal{D}\mathbf{q}^2 - i\omega}$

dielektrische Funktion: $\epsilon(\mathbf{q},\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2}\Pi(\mathbf{q},\omega)$

Introduction to methods

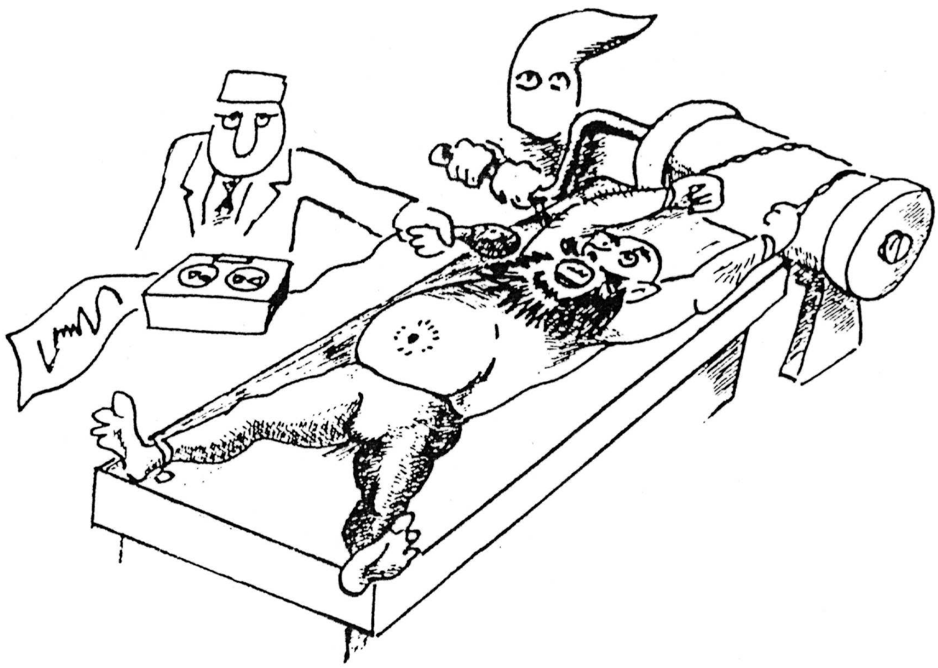


Fig. 1.3. Response functions are usually measurable experimentally.

(1.3) Unordnung quantenmechanisch (Anderson, 1958)

Schrödingergleichung für Elektronen im Leitungsband:

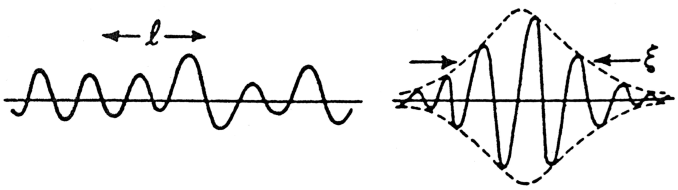
P. Anderson

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m^*} + U(\mathbf{r}) \right] \psi_n(\mathbf{r}) = \epsilon_n \psi_n(\mathbf{r})$$

zwei grundsätzliche Möglichkeiten für Wellenfunktionen:

delokalisiert: $\lim_{\mathbf{r}\to\infty} |\psi_n(\mathbf{r})| \neq 0$

lokalisiert: $|\psi_n(\mathbf{r})| \propto e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|/\xi}$



(a) (b)

ℓ = elastische freie Weglänge

ξ = Lokalisierungslänge

Anderson-Lokalisierung: Wellenfunktionen ändern Typ wenn Unordnung hinreichend stark wird $\Longrightarrow$ **Metall-Isolator Übergang** (P. W. Anderson, 1958)

Metall: Fermienergie im Bereich delokalisierter Zustände $\Longrightarrow \sigma > 0$

Isolator: Fermienergie im Bereich lokalisierter Zustände $\Longrightarrow \sigma = 0$

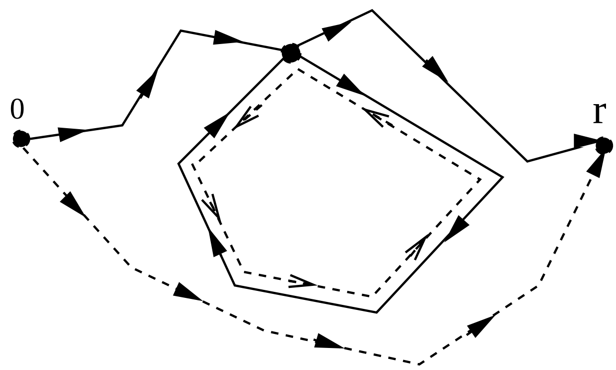
(1.4) Schwache Lokalisierung (1979)

Auf der metallischen Seite des Anderson Metall-Isolator-Übergangs sind Quantenkorrekturen zur Leitfähigkeit die Vorboten der Lokalisierung!

kohärente Rückwärtsstreuung: Freies Elektron streut an statischer Unordnung $\Longrightarrow$ erhöhte Rückkehrwahrscheinlichkeit durch Quanteninterferenz:

Elektron startet zur Zeit $t = 0$ am Ort $\mathbf{r} = 0$; Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{r}, t)$ daß es bei $t > 0$ am Ort $\mathbf{r} \neq 0$ ist:

$$p(\mathbf{r}, t) = |\Sigma_i A_i|^2 = \Sigma_i |A_i|^2 + \Sigma_{i \neq j} A_i A_j^*$$



- In QM werden Amplituden addiert, nicht Wahrscheinlichkeiten.
- Streuung an statischer Unordnung erhält Phasenkohärenz (Landauer, ab 60er Jahre)

Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\mathbf{r}, t)$ erfüllt inhomogene Diffusionsgleichung:

$$[\partial_t - \mathcal{D}\nabla_{\mathbf{r}}^2] P(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

Lösung in zwei Dimensionen:

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\mathcal{D}|t|} \exp[-\mathbf{r}^2/(4\mathcal{D}|t|)]$$

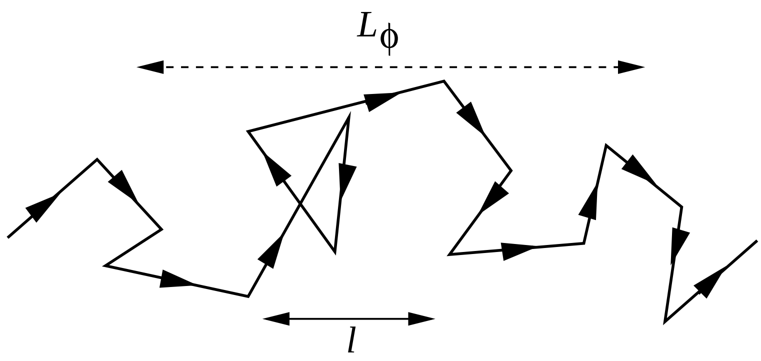
Quantenkorrektur zur Leitfähigkeit (durch kohärente Rückwärtsstreuung):

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} + \sigma_1 \quad , \quad \sigma_1 \quad = \quad -\frac{e^2\mathcal{D}}{\pi\hbar}\int_{\tau}^{\tau_\phi} dt P(\mathbf{r}, t) = -\frac{e^2}{4\pi^2\hbar}\ln(\tau_\phi/\tau)$$

τ_ϕ: Phasenkohärenzzeit:

$$\frac{1}{\tau_\phi} = \frac{\mathcal{D}}{L_\phi^2}$$

L_ϕ = maximale Distanz der phasenkohärenten Diffusion der Elektronen



- bei tiefen Temperaturen wird τ_ϕ durch inelastische Coulomb-Streuung zwischen Elektronen bestimmt.
- in zwei Dimensionen: $\tau_\phi \propto 1/T$ (Altshuler et al., 1982)

Experiment: Widerstand nimmt mit sinkender Temperatur logarithmisch zu:

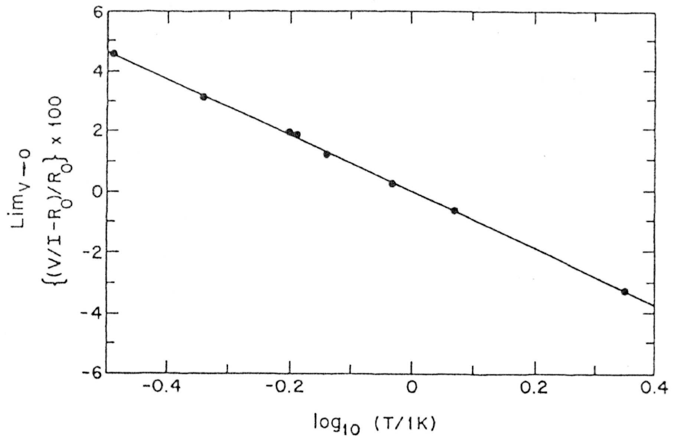


FIG. 2. The plateau values approached at small V in Fig. 1 are plotted vs $\ln T$ but a wider temperature range is covered.

(G. J. Dolan and D. D. Osheroff, 1979)

(1.5) Berechnung der Quantenkorrekturen

Modell für Unordnung:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m^*} + U(\hat{\mathbf{r}}) \quad , \quad \overline{U(\mathbf{r})} = 0 \quad , \quad \overline{U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}')} = C(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Problem: physikalische Grössen müssen über Unordnung gemittelt werden, z.B. Leitfähigkeit (Kubo-Formel):

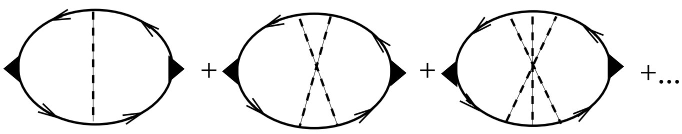
$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\omega} \overline{Re \int_0^\infty \langle [\hat{j}_\alpha(t), \hat{j}_\beta(0)] \rangle} \quad , \quad \hat{\mathbf{j}}(t) = \text{Stromdichte-Operator}$$

Diagamm-Technik:

(Abrikosov, Gorkov, Dzyaloshinski: Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics, 1961): Unordnungsmittelung $\Longrightarrow$ Feynman-Diagramme

Quantenkorrektur zur Leitfähigkeit: (Langer and Neal 1966, Anderson et al. 1979, Gorkov et al. 1979):

$\sigma_1(\omega) =$



maximal gekreuzte Diagramme = Bethe-Salpeter-Gleichung im Teilchen-Teilchen Kanal

$$\sigma_1(\omega) = -\frac{e^2\mathcal{D}}{\pi\hbar}\frac{1}{V}\sum_{|\mathbf{q}|<\ell^{-1}} \frac{1}{\mathcal{D}\mathbf{q}^2 - i\omega + 1/\tau_\phi} = -\frac{e^2\mathcal{D}}{\pi\hbar}\int_\tau^{\tau_\phi} dt P(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t, 0)$$

in $d \leq 2$: brauche Infrarotcutoff τ_ϕ für grosse Zeiten damit Integral konvergiert!

2. Coulomb-Wechselwirkungen in Metallen

(2.1) Zwei ungelöste Probleme

1.Saturierung der Phasenkohärenzzeit:

Experiment (Mohanty et al. 1997):

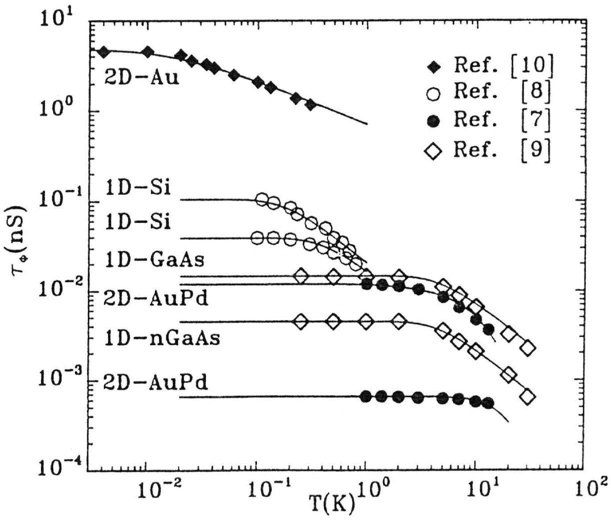


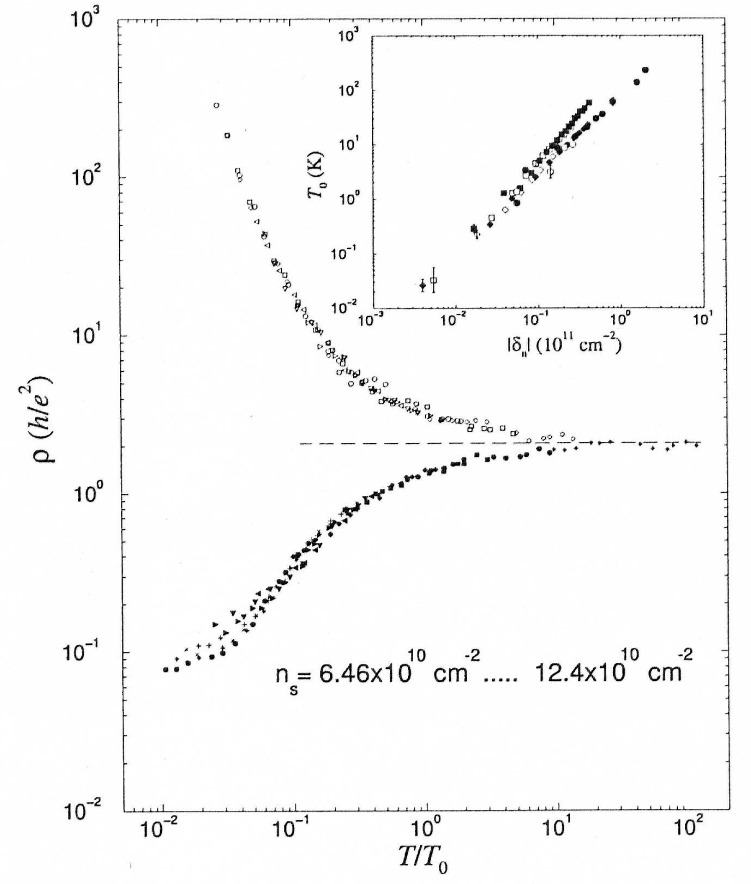
FIG. 4. Temperature dependence of τ_ϕ in a 2D-Au, 1D-Si, 1D-GaAs, and 2D-AuPd experiments. The solid lines are our fits using Eq. (1).

Theorie (Altshuler et al. 1982):
Elektron-Elektron Wechselwirkungen mit kleinen Impulsüberträgen:

$$\tau_\phi \propto \begin{cases} T^{-1} & \text{in } d = 2 \\ T^{-2/3} & \text{in } d = 1 \end{cases}$$

2.Metall-Isolator-Übergang in $d = 2$:

Experiment (Kravchenko et al. 1995):



Theorie

(Abrahams et al. 1979):

ungeordnete Elektronen in $d \leq 2$

sind bei $T = 0$ Isolatoren!

$$\lim_{T\to 0} \rho(T) = \infty$$

Wie sieht der Grundzustand eines ungeodneten Metalls aus, wenn starke Coulomb-Kräfte zwischen den Elektronen wirken?

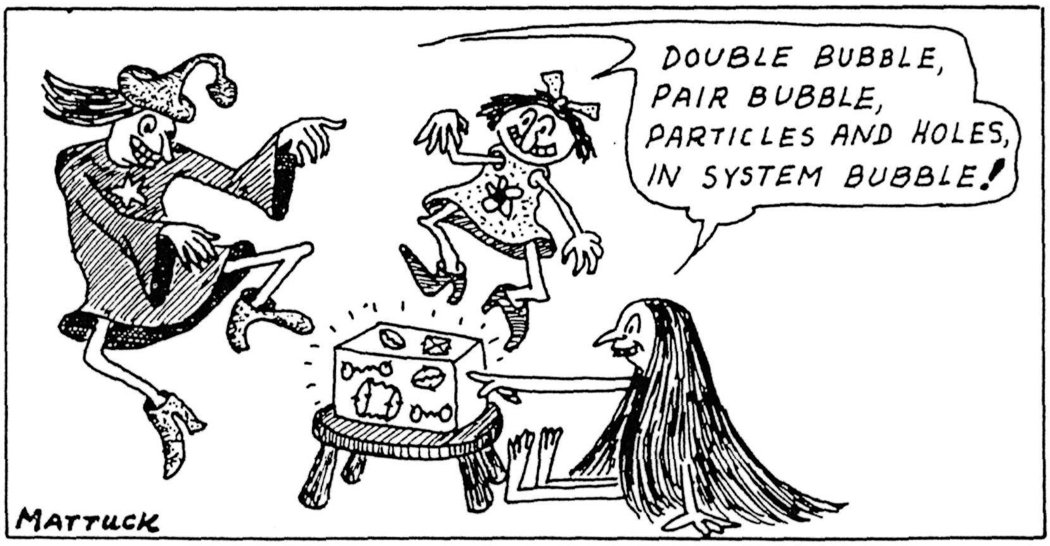


Fig. 1.5 *Modern View of a Many-body System in its Ground State*

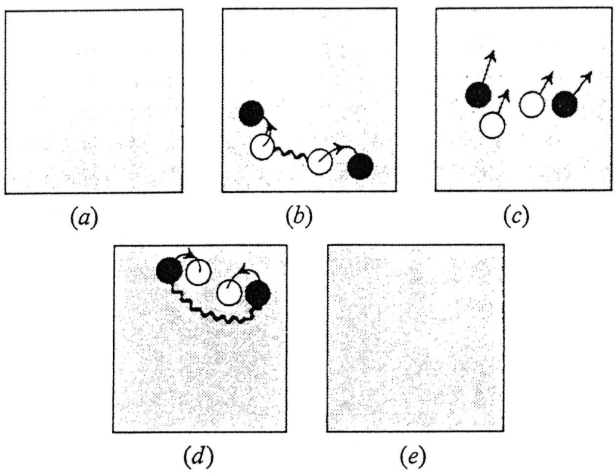


Fig. 1.4 *Virtual Movie of Second-order Vacuum Amplitude Process*
(*a*) Vacuum.
(*b*) At time t_1 interaction between two particles in system causes two particles to be lifted out, forming two holes.
(*c*) The two particle–hole pairs propagate freely through the system.
(*d*) Both pairs annihilated at time t'.
(*e*) Vacuum.

(2.2) Abschirmung

nackte Coulomb-Wechselwirkung:

$$V_0(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \exp[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}]\frac{e^2}{|\mathbf{r}|} \quad = \quad \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2} \quad , \quad \text{in } d=3$$

$$V_0(q_x, q_y) = \int \frac{dq_z}{2\pi}\frac{4\pi e^2}{q_x^2+q_y^2+{q_z}^2} \quad = \quad \frac{2\pi e^2}{\sqrt{q_x^2+q_y^2}} \quad , \quad \text{in } d=2$$

$$V_0(q_x) = \int \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2}\frac{4\pi e^2}{q_x^2+q_y^2+{q_z}^2} \quad = \quad e^2 \ln\left(\frac{1}{q_x^2 a^2}\right) \quad , \quad \text{in } d=1$$

Abschirmung der Ladung:

$$V(\mathbf{q},\omega) = \frac{V_0(\mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{q},\omega)}$$

$\epsilon(\mathbf{q},\omega)$: dielektrische Funktion

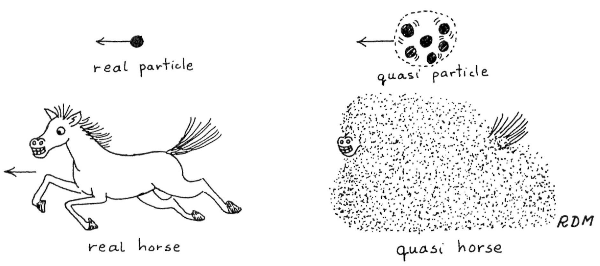


Fig. 0.4 *Quasi Particle Concept*

Thomas-Fermi-Näherung: $V(\mathbf{q},\omega) \approx \dfrac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2+\kappa^2}$, nicht singulär!

κ^{-1}: Abschirmlänge; für $3d$ Metalle: $\kappa^{-1} \approx k_F^{-1} \approx$ Gitterkonstante

$\Longrightarrow$ Abschirmlänge mikroskopisch klein

$\Longrightarrow$ effektive Gittermodelle mit kurzreichweitigen Wechselwirkungen (a la Hubbard)

Thomas-Fermi-Theorie schlecht für ungeordnete Metalle in reduzierten Dimensionen!

(2.3) Abschirmung und Diffusion

Unordnung behindert Abschirmung! Grund:

Diffusive Elektronen verbringen mehr Zeit zusammen als bei ballistischer Bewegung!

dielektrische Funktion im ungeordneten Metall:

$$\epsilon(\mathbf{q},\omega) \;=\; 1 + V_0(\mathbf{q})\Pi(\mathbf{q},\omega) \qquad \Pi(\mathbf{q},\omega) : \text{Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion}$$

Teilchenzahlerhaltung + Diffusion $\Longrightarrow$ Diffusionspol

$$\Pi(\mathbf{q},\omega) = \frac{\partial n}{\partial \mu}\frac{\mathcal{D}\mathbf{q}^2}{\mathcal{D}\mathbf{q}^2 - i\omega} \quad , \quad \frac{\partial n}{\partial \mu} : \text{Kompressibilität}$$

$\Longrightarrow$ abgeschirmte Coulomb-Wechselwirkung in $d = 2$:

$$\boxed{V(\mathbf{q},\omega) \approx \frac{-i\omega}{2\frac{\partial n}{\partial \mu}\mathcal{D}\mathbf{q}^2} \quad , \quad \frac{|\omega|}{\mathcal{D}\kappa} \ll |\mathbf{q}| \ll \sqrt{\frac{|\omega|}{\mathcal{D}}}}$$

$\kappa = 2\pi e^2 \frac{\partial n}{\partial \mu}$: inverse Abschirmlänge in 2 Dimensionen.

$\Longrightarrow$ abgeschirmte Wechselwirkung immer noch singulär

$\Longrightarrow$ stark korreliertes Vielteilchensystem!

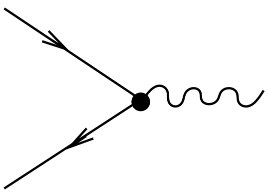
(2.4) Vertex-Korrekturen

wechselwirkende Elektronen $\Longleftrightarrow$ nicht-relativistische Quantenfeldtheorie

$\Longrightarrow$ benutze Sprache der QFT (ab 60er Jahre)

ohne Unordnung:

inelastische Elektron-Elektron- Streuung am Coulomb-Potential:

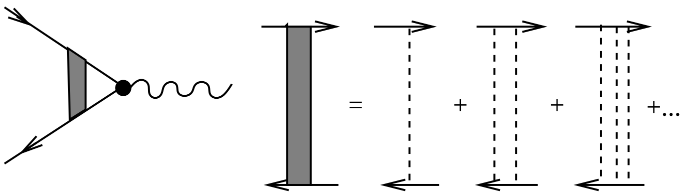


Kopplungsstärke: $\Lambda_0 = e^2$

mit Unordnung:

inelastische Elektron-Elektron- Streuung am Coulomb-Potential

$+$ elastische Streuung der Elektronen an Unordnung



Bethe-Salpeter-Gleichung im Teilchen-Loch Kanal

$\Longrightarrow$ effektive Kopplungsstärke: $\Lambda(\mathbf{q}, \omega) = \frac{e^2}{\tau(\mathcal{D}\mathbf{q}^2 - i\omega)}$.

$\Longrightarrow$ Singularitäten in physikalischen Observablen

z.B. Zustandsdichte ($\Longrightarrow$ Thermodynamik), Leitfähigkeit ($\Longrightarrow$ Transport).

(2.5) Zustandsdichte in $d = 2$

Zustandsdichte: freie Elektronen: $\nu_0(\omega) = \frac{1}{V} \sum_\alpha \delta(\omega - \epsilon_\alpha)$

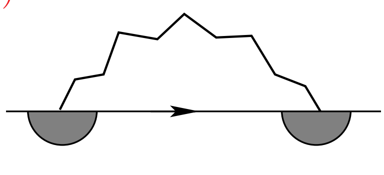
allgemein: $\nu(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \overline{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)}$

Greensche Funktion = Wahrscheinlichkeitsamplitude: $\overline{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)} = -i \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, 0) \rangle$

Altshuler et al., 1981: Störungstheorie in abgeschirmter Cb-Wechselwirkung:

$$\nu(\omega) = \nu_0 + \nu_1(\omega)$$

$\nu_1(\omega) =$



$$= -\frac{\nu_0}{4\pi k_F \ell} \ln(|\omega|\tau) \ln(|\omega|\tau_1)$$

Zustandsdichte ohne Wechselwirkungen	:	$\nu_0 = m/(2\pi)$
elastische freie Weglänge	:	$\ell \quad , \quad k_F \ell \gg 1$
elastische Lebensdauer	:	$\tau = \ell / v_F$
neue Zeitskala	:	$\tau_1 = [(\mathcal{D}\kappa^2)^2 \tau]^{-1} \propto e^{-8}$

3. Metallischer Coulomb-Gap in 2 d

P. Kopietz, Phys. Rev. Lett. **81**, 2120 (1998)

(... der Teil für Experten.)

Welchen Effekt haben Unordnung und Coulomb-Wechselwirkungen auf die Zustandsdichte $\nu(\omega)$ eines 2d Metalls?

(3.1) Zwei bekannte Grenzfälle:

1. Altshuler et al., 1981: Störungstheorie im schwach lokalisierten Regime.

$$\nu(\omega) = \nu_0 \left[1 - \frac{r_0}{4} \ln(|\omega|\tau) \ln(|\omega|\tau_1) \right] \quad , \quad r_0 = \frac{1}{\pi k_F \ell} \ll 1$$

2. Efros, Shklovskii, 1975: klassischer Coulomb-Gap im stark lokalisierten Regime.

Energie stark lokalisierter Elektronen:

$$E_{cl} = \sum_i \phi_i n_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{e^2}{r_{ij}} (n_i - \bar{n})(n_j - \bar{n})$$

$n_i = \Theta(\mu - \epsilon_i)$: Besetzung der Gitterplätze
ϕ_i: Zufallszahlen, gleichverteilt in $[-W, W]$.
$\Longrightarrow$ Einteilchenenergien: $\epsilon_i = \phi_i + \sum_{j \neq i} \frac{e^2}{r_{ij}} (n_j - \bar{n})$.

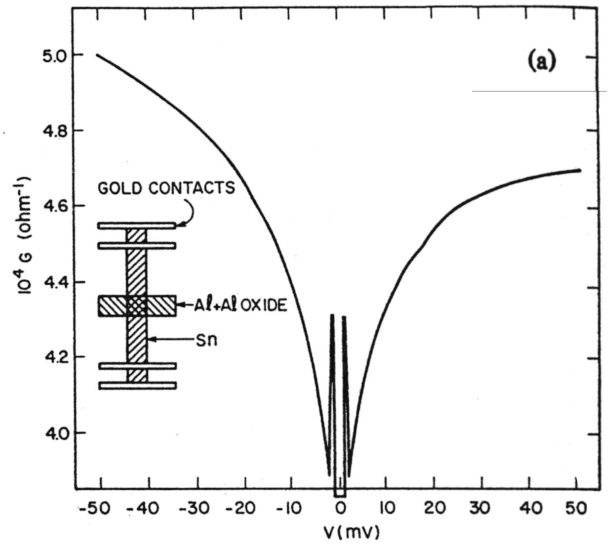
$\Longrightarrow$ Zustandsdichte verschwindet linear am chemischen Potential:

$$\nu(\omega) \sim C \frac{|\omega|}{e^4} \quad , \quad \omega \to 0$$

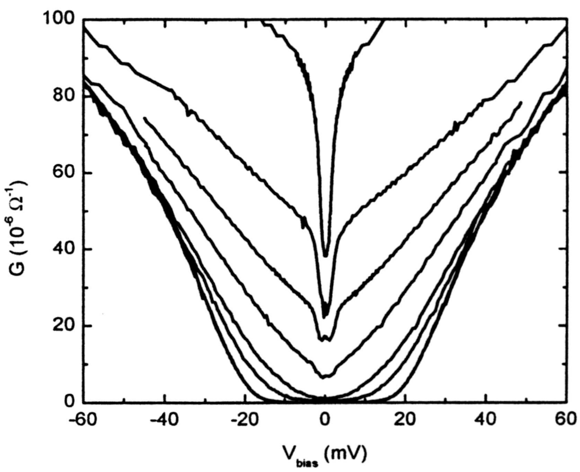
(3.2) Tunnel-Experimente:

$$\frac{dI(V)}{dV} \propto \nu(\omega = V/\hbar)$$

1. White, Dynes, Garno (1985): Tunnelstrom $I(V)$ in Zinn-Filmen



2. Bielejec, Ruan, Wu (2000): Tunnelstrom $I(V)$ in Beryllium-Filme:



(3.3) Interpolationsformel für metallischen Coulomb Gap

Störungstheorie im schwach lokalisierten Regime liefert

$$\nu(\omega) = \nu_0 \left[1 - \frac{r_0}{4} \ln(|\omega|\tau) \ln(|\omega|\tau_1) \right] \quad , \quad r_0 = \frac{1}{\pi k_F \ell} \ll 1$$

Frage: was passiert wirklich für $\omega \longrightarrow 0$?

Antwort: falls Leitfähigkeit $\lim_{\omega\to 0} \sigma(\omega) < \infty$ dann

$$\boxed{\nu(\omega) \approx \nu_0 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\sin(|\omega| t)}{t} \exp\left[-\frac{r_0}{4} \ln(t/\tau_1) \ln(t/\tau) \right]}$$

drei Bereiche:

1. Perturbativ: $-\ln(|\omega|\tau) \ll \sqrt{1/r_0}$ (Altshuler et al., 1981)
2. Crossover: $\sqrt{1/r_0} \ll -\ln(|\omega|\tau) \ll 1/r_0$ (Belitz, Kirkpatrick, 1993)

$$\nu(\omega) \approx \nu_0 \exp\left[-\frac{r_0}{4} \ln(|\omega|\tau) \ln(|\omega|\tau_1) \right]$$

3. Metallischer Coulomb-Gap: $1/r_0 \ll -\ln(|\omega|\tau)$ (d.h. $|\omega| \ll \tau^{-1} e^{-1/r_0}$):

$$\nu(\omega) \sim C(r_0) \frac{|\omega|}{e^4} \quad , \quad C(r_0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{r_0} e^{1/r_0}$$

wie beim klassischen Coulomb-Gap (lokalisierte Elektronen)!

Warum ist der metallische Coulomb-gap so exotisch?

Zustandsdichte $\nu(0) = 0$ aber gleichzeitig Leitfähigkeit $\sigma(0) > 0$

Was passiert „normalerweise"? $\nu(0) = 0 \Longrightarrow \sigma(0) = 0$

mikroskopische Rechnungen:

kein einfacher Zusammenhang zwischen $\nu(\omega)$ und $\sigma(\omega)$:

Zustandsdichte $\leftrightarrow$ Einteilchen-Anregungen $\Longrightarrow$ Thermodynamik

Leitfähigkeit $\leftrightarrow$ Zweiteilchen-Anregungen $\Longrightarrow$ Transport

Landausche Fermiflüssigkeiten: Zwei-Teilchenangegungen lassen sich aus Einteilchen-Anregungen „zusammensetzen"

Stark korrelierte Elektronen (z. B. in $d = 1$): kein direkter Zusammenhang zwischen Ein- und Zweiteilchen-Anregungen!

Experimente:

- Tunneln in zwei-dimensionalen stark korrelierte ungeordnete Metalle
- Tunneln in dotierte Halbleiter-Systeme (MOSFETS) bisher noch nicht gelungen
- ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt: $\sigma_{xx} > 0$ am Übergang $n \to n + 1$.

(3.4) Zur Herleitung des metallischen Coulomb-Gaps

Ziel: Berechnung der über Unordnung gemittelten Zustandsdichte des wechselwirkenden Vielteilchensystems:

$$\nu(\omega) \;=\; -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\overline{G_1(\mathbf{r},\mathbf{r},t)}$$

Problem: Summation der dominanten Feynman-Diagramme in allen Ordnungen

1. Schritt: Funktional-Integral-Formulierung:

Hubbard-Stratonovich-Transformation: formale Implementierung der Äquivalenz

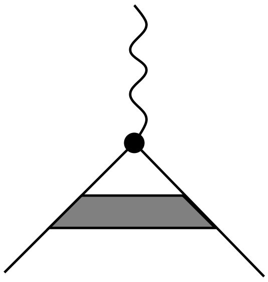
Coulomb-Wechselwirkung $\Longleftrightarrow$ fluktuierende elektrische Felder

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r},\tau-\tau') = \frac{\int \mathcal{D}\{V\}e^{-S\{V\}}\mathcal{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\tau,\tau')}{\int \mathcal{D}\{V\}e^{-S\{V\}}}$$

$$S\{V\} = \frac{\mathcal{V}}{2\beta}\sum_{\mathbf{q},\omega_m} f_{\mathbf{q}}^{-1}V_{\mathbf{q},\omega_m}V_{-\mathbf{q},-\omega_m} - \mathrm{Tr}\ln[1-\hat{G}_0\hat{V}]$$

$$\left[-\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu - V(\mathbf{r},\tau) - U(\mathbf{r})\right]\mathcal{G} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(\tau-\tau')$$

Problem: Dichtevertex wird durch Diffusion singulär renormiert:



$$\approx \frac{1}{\tau(\mathcal{D}\mathbf{q}^2 - i\omega)}$$

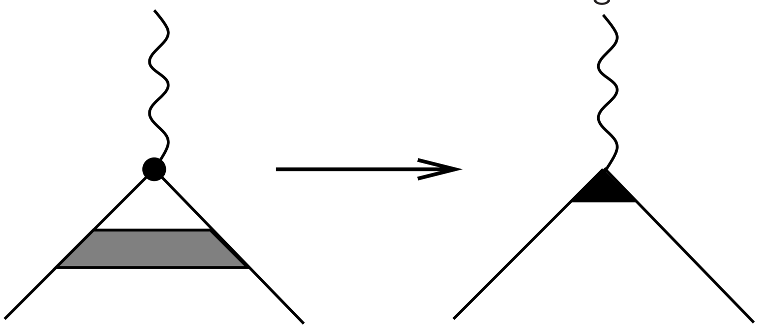
2. Schritt: Singuläre Eichtransformation:

Nutze Eichfreiheit...

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla V(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

... um elektrisches Feld durch longitudinales Vektorpotential darzustellen!

$\Longrightarrow$ Dichtevertex wird durch Stromvertex ausgetauscht:



Vorteil: Stromvertizes können nicht durch singuläre diffusive Vertexkorrekturen renormiert werden.

$\Longrightarrow$ führende Singularitäten im Eichfaktor enthalten:

$$\boxed{\mathcal{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') = \mathcal{G}_1(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')e^{\Phi(\mathbf{r},t)-\Phi(\mathbf{r}',t')}}$$

$$\boxed{-\partial_t\Phi(\mathbf{r},t) = V(\mathbf{r},t) \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -i\nabla_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r},t)}$$

Summation der $\ln^2$-Singularitäten in allen Ordnungen Störungstheorie!

Zusammenfassung, Ausblick

Thema: Zusammenspiel von Coulomb-Wechselwirkungen und Unordnung in niedrigdimensionalen Metallen.

Highlights:

1. schwache Lokalisierung: negative Quantenkorrektur zur Leitfähigkeit von Metallen durch Quanteninterferenz der Elektronen mit sich selbst
2. Diffusion behindert Abschirmung
   $\Longrightarrow$ Coulomb-Wechselwirkung bleibt singulär
3. metallischer Coulomb Gap in 2d: $\sigma(0) > 0$ aber $\nu(0) = 0$.
   Methode: Pfadintegration, Eichtransformation.

Offene Probleme: Elektron-Elektron Wechselwirkungen + Unordnung in reduzierten Dimensionen:

- mikroskopische Berechnung von $\sigma(\omega)$, Metall-Isolator Übergang.
- mikroskopische Theorie für Phasenkohärenzzeit $\tau_\phi(T)$.
- physikalische Eigenschaften des Coulomb-Metals in 2d.
- Transport zwischen schwach gekoppelten Ebenen ("interlayer hopping","confinement")
- Quasi-1d Systeme.