Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte): Spin-Messungen

Wir betrachten ein Elektron mit Spin 1/2. Es sei im $\hat{S}_3$-Eigenzustand zum Eigenwert $+\hbar/2$ („Spin up“) präpariert. Wir arbeiten im Folgenden in der $\hat{S}_3$-Eigenbasis, d.h. der Spin-Zustand ist in dieser Basis durch den Spinor $\psi = u_{1/2}(\vec{e}_3) = (1,0)^{\mathrm{T}}$ gegeben.

Die Pauli-Matrizen bzgl. dieser Basis lauten

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Im Skript wurden die Eigenvektoren für eine beliebige Spin-Komponente in Richtung

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \tag{2}$$

angegeben, s. Gl. (3.14.28):

$$u_{1/2}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2)\exp(-\mathrm{i}\alpha/2) \\ \sin(\beta/2)\exp(\mathrm{i}\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad u_{-1/2}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\sin(\beta/2)\exp(-\alpha/2) \\ \cos(\beta/2)\exp(\mathrm{i}\alpha/2) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie den Operator für die Spinkomponente in Richtung von $\vec{n}$:

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}. \tag{4}$$

Lösung: Es gilt

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\beta & \exp(-\mathrm{i}\alpha)\sin\beta \\ \exp(\mathrm{i}\alpha)\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \tag{5}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha = \exp(\pm\mathrm{i}\alpha)$ ist.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass in der Tat die Spinoren in (3) die Eigenvektoren dieses Operators sind, d.h. dass

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}u_{1/2}(\vec{n}) = \frac{\hbar}{2}u_{1/2}(\vec{n}), \quad \vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}u_{-1/2}(\vec{n}) = -\frac{\hbar}{2}u_{-1/2}(\vec{n}), \tag{6}$$

gilt. **Lösung:** Direkte Matrizenmultiplikation ergibt

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}u_{1/2}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \exp(-\mathrm{i}\alpha/2)[\cos\beta\cos(\beta/2)+\sin\beta\sin(\beta/2)] \\ \exp(\mathrm{i}\alpha/2)[\sin\beta\cos(\beta/2)-\cos\beta\sin(\beta/2)] \end{pmatrix} = u_{1/2}(\vec{n}). \tag{7}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Additionstheoreme für cos und sin verwendet: $\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2$ und $\sin(\phi_1-\phi_2) = \sin\phi_1\cos\phi_2 - \cos\phi_1\sin\phi_2$ mit $\phi_1 = \beta$ und $\phi_2 = \beta/2$. Analog ergibt sich auch

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}u_{-1/2}(\vec{n}) = -u_{-1/2}(\vec{n}), \tag{8}$$

und das war zu zeigen.

(c) (2 Punkte) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer Messung von $\vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$ die Eigenwerte $\hbar/2$ und $-\hbar/2$?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeiten sind durch die Bornsche Regel gegeben:

$$\begin{aligned} P_{1/2}(\vec{n}) &= \left|\left\langle u_{1/2}(\vec{n}) \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = \left|u^\dagger_{1/2}(\vec{n}) u_{1/2}(\vec{e}_3)\right|^2 = \cos^2(\beta/2), \\ P_{-1/2}(\vec{n}) &= \left|\left\langle u_{-1/2}(\vec{n}) \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = \left|u^\dagger_{-1/2}(\vec{n}) u_{1/2}(\vec{e}_3)\right|^2 = \sin^2(\beta/2). \end{aligned} \tag{9}$$

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Spinkomponente $\vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$.

Lösung: Es ist

$$\left\langle \vec{n} \cdot \hat{\vec{S}} \right\rangle = \frac{\hbar}{2}[P_{1/2}(\vec{n}) - P_{-1/2}(\vec{n})] = \frac{\hbar}{2}[\cos^2(\beta/2) - \sin^2(\beta/2)] = \frac{\hbar}{2}\cos\beta = \frac{\hbar}{2}\vec{e}_3 \cdot \vec{n}. \tag{10}$$
