

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 5

Vorbemerkung: In Theoretische Physik 1 haben wir das Noether-Theorem in der klassischen Mechanik behandelt. Demnach gibt es zu jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation eine Erhaltungsgröße. So gehört zur Translationsinvarianz des Raumes (Homogenität) der Impuls und zur Invarianz unter Drehungen um einen beliebigen Punkt (Isotropie) der Drehimpuls. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass in der Quantentheorie der Impulsoperator Translationen und der Drehimpulsoperator Drehungen „erzeugt“.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Impulsoperator als Erzeuger für räumliche Translationen

Wir betrachten die räumliche Translation, d.h. für den Ortsoperator $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$. Physikalisch beschreibt diese Operation die Verschiebung eines Experiments von einem Ort \vec{x} zum Ort $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$ (aktive Interpretation der Translation). Alternativ kann man auch die Verschiebung des Ursprungs des (inertialen) Bezugssystems um den Vektor \vec{a} betrachten, wobei der Versuchsaufbau unverändert am gleichen Ort bleibt (passive Interpretation der Translation).

Wir betrachten ein Teilchen, das in einem Zustand präpariert ist, der durch eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ beschrieben wird. Dann wird offenbar bzgl. des neuen Bezugssystems das Teilchen durch die Wellenfunktion

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}' - \vec{a}) \quad (1)$$

beschrieben.

- (a) Zeigen Sie, dass für eine „infinitesimale Translation“ um $\delta\vec{a} = \delta a \vec{n}$ (mit $|\vec{n}| = 1$)

$$\psi'(\vec{x}') = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta a \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \right) \psi(\vec{x}') + \mathcal{O}(\delta a^2) \quad (2)$$

ist.

Lösung: Für infinitesimales δa gilt mit der Taylor-Entwicklung

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}' - \delta a \vec{n}) = \psi(\vec{x}') - \delta a \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}') + \mathcal{O}(\delta a^2). \quad (3)$$

Wegen $\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}$ können wir das in der Form

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}') - \frac{i}{\hbar} \delta a \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \psi(\vec{x}') + \mathcal{O}(\delta a^2) \quad (4)$$

schreiben, und das entspricht (1) für „infinitesimale δa “.

- (b) Um den Operator $\hat{T}(a, \vec{n})$ für eine endliche Translation zu finden, betrachten wir

$$\psi'(\vec{x}') = \hat{T}(a, \vec{n}) \psi(\vec{x}') = \psi(\vec{x}' - a \vec{n}). \quad (5)$$

Zeigen Sie dann mit Hilfe der vorigen Teilaufgabe, dass

$$\hat{T}(\vec{a} + \delta a \vec{n}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta a \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \right) \hat{T}(\vec{a}), \quad (6)$$

d.h.

$$\frac{d}{da} \hat{T}(a, \vec{n}) = -\frac{i}{\hbar} \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \hat{T}(a, \vec{n}) \quad (7)$$

gilt.

Lösung: Es ist wegen (3)

$$\begin{aligned} T(a + \delta a, \vec{n})\psi(\vec{x}') &= \psi(\vec{x}' - (a + \delta a)\vec{n}) \\ &= \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta a \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \right) \psi(\vec{x}' - a\vec{n}) \\ &= \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta a \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \right) \hat{T}(a, \vec{n})\psi(\vec{x}') \end{aligned} \quad (8)$$

und damit

$$\hat{T}(a + \delta a, \vec{n}) = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta a \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \right) \hat{T}(a, \vec{n}). \quad (9)$$

Daraus folgt schließlich

$$\frac{d}{da} T(a, \vec{n}) = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{\hat{T}(a + \delta a, \vec{n}) - \hat{T}(a, \vec{n})}{\delta a} = \frac{i}{\hbar} \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \hat{T}(a, \vec{n}), \quad (10)$$

also (7).

- (c) Lösen Sie (7), indem Sie $-i\vec{n}\hat{\vec{p}}/\hbar$ formal wie eine Zahl behandeln.

Lösung: Die operatorwertige Differentialgleichung lässt sich (zumindest formal) durch

$$\hat{T}(a, \vec{n}) = C \exp\left(-\frac{i\vec{n} \cdot \hat{\vec{p}}}{\hbar} a\right) \quad (11)$$

lösen. Die Integrationskonstante ergibt sich wegen $\hat{T}(0, \vec{n}) = \mathbb{1}$ zu $C = 1$, d.h.

$$\hat{T}(a, \vec{n}) = \exp\left(-\frac{i\vec{n} \cdot \hat{\vec{p}}}{\hbar} a\right). \quad (12)$$

- (d) Zeigen Sie durch explizite Rechnung unter Verwendung von $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$, dass dann in der Tat

$$\hat{T}(a, \vec{n})\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - a\vec{n}) \quad (13)$$

ist.

Lösung: Mit (12) ist

$$\hat{T}(a, \vec{n})\psi(\vec{x}) = \exp(-a\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\psi(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-a)^j (\vec{n} \cdot \vec{\nabla})^j \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - a\vec{n}). \quad (14)$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die Operatorexponentialfunktion durch ihre Exponentialreihe berechnet und dann den Taylorschen Satz angewendet.

- (e) Zeigen Sie dann, dass $\hat{T}(a, \vec{n})$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$ unitär ist, d.h. dass

$$\hat{T}^\dagger(a, \vec{n}) = \hat{T}^{-1}(a, \vec{n}) \quad (15)$$

ist.

Lösung: Da \hat{p} selbstadjungiert ist, folgt aus (12)

$$\hat{T}^\dagger(a, \vec{n}) = \exp\left(+\frac{i\vec{n} \cdot \hat{p}^\dagger}{\hbar}\right) = \exp\left(+\frac{i\vec{n} \cdot \hat{p}}{\hbar}\right). \quad (16)$$

Da der Operator $\vec{n} \cdot \hat{p}$ mit sich selbst kommutiert, gilt weiter

$$\hat{T}^\dagger(a, \vec{n})\hat{T}(a, \vec{n}) = \exp\left(+\frac{i\vec{n} \cdot \hat{p}}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i\vec{n} \cdot \hat{p}}{\hbar}\right) = \exp\left(+\frac{i\vec{n} \cdot \hat{p}}{\hbar} - \frac{i\vec{n} \cdot \hat{p}}{\hbar}\right) = \exp(0\mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad (17)$$

und das war zu zeigen.

Bemerkung: Man sagt, dass $\vec{n} \cdot \hat{p}/\hbar$ die Erzeugende einer Translation in \vec{n} -Richtung ist. Man beachte, dass dabei aus der Selbstadjungiertheit von $\vec{n} \cdot \hat{p}$ die Unitarität von $\hat{T}(a, \vec{n})$ folgt.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Drehimpulsoperator als Erzeuger für räumliche Translationen

Führen Sie die analogen Schritte wie in Aufgabe 1 für Drehungen aus, indem Sie zeigen, dass eine Drehung um eine Drehachse in Richtung \vec{n} (mit $|\vec{n}| = 1$) um einen infinitesimalen Drehwinkel $\delta\varphi$ durch

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x}' - \delta\varphi\vec{n} \times \vec{x}') = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi\vec{n} \cdot \hat{L}\right)\psi(\vec{x}') + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \quad (18)$$

gegeben und somit $\vec{n} \cdot \hat{L}$ die Erzeugende einer infinitesimalen Drehung ist.

Was ist demnach der unitäre Operator für eine endliche Drehung $\hat{D}(\varphi, \vec{n})$?

Lösung: Zunächst ist

$$\vec{n} \cdot \hat{L} = \epsilon_{abc}n_a\hat{x}_b\hat{p}_c = -i\hbar\epsilon_{abc}n_ax_b\partial_c. \quad (19)$$

Damit ergibt sich

$$-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi\vec{n} \cdot \hat{L}\psi(\vec{x}') = -\delta\varphi\epsilon_{abc}n_ax'_b\partial_c\psi(\vec{x}') = -(\delta\varphi\vec{n} \times \vec{x}') \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x}') \quad (20)$$

und folglich in der Tat (18):

$$\psi(\vec{x}' - \delta\varphi\vec{n} \times \vec{x}') = \psi(\vec{x}') - \delta\varphi(\vec{n} \times \vec{x}') \cdot \vec{\nabla}\psi(\vec{x}') + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) = \psi(\vec{x}') - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi(\vec{n} \cdot \hat{L})\psi(\vec{x}') + \mathcal{O}(\delta\varphi^2). \quad (21)$$

Analog zum Vorgehen in Aufg. 1 folgt daraus, dass

$$\frac{d}{d\varphi}\hat{D}(\varphi, \vec{n}) = -\frac{i}{\hbar}\vec{n} \cdot \hat{L}\hat{D}(\varphi, \vec{n}) = -\frac{i}{\hbar}\hat{D}(\varphi, \vec{n})\vec{n} \cdot \hat{L} \quad (22)$$

mit der Lösung

$$\hat{D}(\varphi, \vec{n}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n} \cdot \hat{L}\right) \quad (23)$$

ist.

Bemerkung: Dass dies tatsächlich einer Drehung entspricht, folgt daraus, dass

$$\hat{D}(\varphi, \vec{n})\psi(\vec{x}') = \psi[\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}'] \quad (24)$$

mit einer geeigneten Matrix $\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})$ ist.

Wegen (21) muss für alle Wellenfunktionen ψ

$$\frac{d}{d\varphi}\hat{D}(\varphi, \vec{n})\psi(\vec{x}') = -\frac{i}{\hbar}\vec{n} \cdot \hat{L}\hat{D}(\varphi, \vec{n})\psi(\vec{x}') = -[\vec{n} \times \hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}'] \cdot \vec{\nabla}\psi(\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}') \quad (25)$$

gelten. Andererseits ist

$$\frac{d}{d\varphi}\psi(\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}') = \frac{d}{d\varphi}[\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}'] \cdot \vec{\nabla}\psi(\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}'). \quad (26)$$

Damit folgt für $\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi}[\hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}'] = -\vec{n} \times \hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}' \quad (27)$$

gilt. Definieren wir

$$\vec{y}(\varphi) = \hat{R}^{-1}(\varphi, \vec{n})\vec{x}' \quad (28)$$

folgt

$$\frac{d}{d\varphi}\vec{y} = -\vec{n} \times \vec{y} \quad (29)$$

Leitet man diese Gleichung nochmals nach φ ab, ergibt sich

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\vec{y} = -\vec{n} \times \frac{d}{d\varphi}\vec{y} = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{y}) = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{y}) - \vec{y} \quad (30)$$

und weiter

$$\frac{d^3}{d\varphi^3}\vec{y} = \vec{n} \times \vec{y}. \quad (31)$$

Dies lässt sich nun für beliebig hohe Ableitungen durch Iteration weitertreiben. Verwendet man die Ableitungen für die Taylor-Entwicklung von \vec{y} um $\varphi = 0$, folgt mit $\vec{y}(0) = \vec{x}'$

$$\vec{y} = \vec{x}' - \varphi\vec{n} \times \vec{x}' + \frac{\varphi^2}{2}[\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}') - \vec{x}'] + \frac{\varphi^3}{3!}\vec{n} \times \vec{x}' + \dots \quad (32)$$

Schreiben wir nun

$$\vec{x}' = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}') + \vec{x}'_{\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{x}'_{\perp} = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}') = \vec{x}' - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}'), \quad (33)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}') + \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right)\vec{x}'_{\perp} - \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right)\vec{n} \times \vec{x}' \\ &= \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}') + \cos\varphi\vec{x}'_{\perp} - \sin\varphi(\vec{n} \times \vec{x}'). \end{aligned} \quad (34)$$

Dies entspricht tatsächlich der Inversen einer Drehung um die Achse \vec{n} mit Drehwinkel φ (vgl. Skript zu Mathematische Methoden für Lehramt L3, Abschnitt 2.7.2).

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-13-WS2425/index.html>