

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte): Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung

Das Skalarprodukt für zwei Wellenfunktionen ψ und ϕ ist durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \quad (1)$$

definiert und die Norm der Wellenfunktion ψ durch

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (2)$$

Es ist zu beachten, dass es sich beim Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R}^3)$ um einen komplexen Vektorraum handelt und daher im Skalarprodukt das linke Argument konjugiert komplex eingeht.

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das für beliebige Wellenfunktionen ψ , ϕ_1 und ϕ_2 und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \psi | \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi | \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \phi_2 \rangle \quad (3)$$

und für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* \quad (4)$$

sowie für Wellenfunktionen ψ_1, ψ_2 und ϕ und beliebige Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \phi \rangle = \lambda_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle \quad (5)$$

gilt.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \langle \psi | \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}) [\lambda_1 \phi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \phi_2(\vec{x})] \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi_2(\vec{x}) \\ &= \lambda_1 \langle \psi | \phi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \phi_2 \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Weiter gilt

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = \left[\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \right]^* = \langle \phi | \psi \rangle^*. \quad (7)$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 | \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x [\lambda_1 \psi_1(\vec{x}) + \lambda_2 \psi_2(\vec{x})]^* \phi(\vec{x}) \\ &= \lambda_1^* \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_1^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) + \lambda_2^* \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_2^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \\ &= \lambda_1^* \langle \psi_1 | \phi \rangle + \lambda_2^* \langle \psi_2 | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

- (b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für beliebige Wellenfunktionen ψ und ϕ stets die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle \psi | \phi \rangle| \leq \|\psi\| \|\phi\| \quad (9)$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die positive Definitheit des Skalarprodukts für die Wellenfunktion $\psi - \lambda\phi$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle \psi - \lambda\phi | \psi - \lambda\phi \rangle \geq 0, \quad (10)$$

indem sie zunächst das Skalarprodukt ausmultiplizieren und dann

$$\lambda = \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\|\phi\|^2} \quad (11)$$

setzen.

Lösung: Ausmultiplizieren von (10) ergibt

$$\|\psi\|^2 - \lambda^* \langle \phi | \psi \rangle - \lambda \langle \psi | \phi \rangle + |\lambda|^2 \|\phi\|^2 \geq 0. \quad (12)$$

Wählen wir nun λ gemäß (11), folgt

$$\|\psi\|^2 - 2 \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{\|\phi\|^2} + \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{\|\phi\|^2} = \|\psi\|^2 - \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{\|\phi\|^2} \geq 0 \quad (13)$$

bzw.

$$\|\psi\|^2 \|\phi\|^2 \geq |\langle \psi | \phi \rangle|^2 \Rightarrow \|\psi\| \|\phi\| \geq |\langle \psi | \phi \rangle|. \quad (14)$$

- (c) (3 Punkte) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|. \quad (15)$$

Hinweis: Argumentieren Sie zuerst, dass immer

$$\langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle \leq 2|\langle \psi | \phi \rangle| \quad (16)$$

sein muss. Multiplizieren Sie nun

$$\|\psi + \phi\|^2 = \langle \psi + \phi | \psi + \phi \rangle \quad (17)$$

aus und verwenden dann (16) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (1), um zu beweisen, dass

$$\|\psi + \phi\|^2 \leq (\|\psi\| + \|\phi\|)^2 \quad (18)$$

ist, was äquivalent zur Dreiecksungleichung (15) ist.

Lösung: Wir zeigen zuerst (16). Es ist in der Tat

$$\langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle + \langle \psi | \phi \rangle^* = 2 \operatorname{Re} \langle \psi | \phi \rangle \leq 2|\langle \psi | \phi \rangle|. \quad (19)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$ und also $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ist.

Multiplizieren wir nun (17) aus, erhalten wir mit (17)

$$\|\psi + \phi\|^2 = \langle \psi + \phi | \psi + \phi \rangle = \|\psi\|^2 + \langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle + \|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 + 2|\langle \psi | \phi \rangle| + \|\phi\|^2. \quad (20)$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (9) folgt dann

$$\|\psi + \phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 + \langle \psi | \phi \rangle + \langle \phi | \psi \rangle + \|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 + 2\|\psi\| \|\phi\| + \|\phi\|^2 = (\|\psi\| + \|\phi\|)^2 \quad (21)$$

und damit die Dreiecksungleichung (15).

Aufgabe 2 (10 Punkte): Operatorgymnastik

Im Folgenden seien \hat{A}, \hat{B}, \dots irgendwelche (nicht notwendig selbstadjungierte Operatoren. Die Definition des zu \hat{A} adjungierten Operators \hat{A}^\dagger ist, dass für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ stets

$$\langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi | \phi \rangle \quad (22)$$

gilt.

Weiterhin ist für zwei Operatoren der Kommutator durch

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (23)$$

definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten

(a) (2 Punkte) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

Lösung: Aus der Definition für den adjungierten Operator folgt

$$\langle \psi | \hat{A}\hat{B} | \phi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \psi | \hat{B} | \phi \rangle = \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger \psi | \phi \rangle = \langle (\hat{A}\hat{B})^\dagger | \phi \rangle. \quad (24)$$

Da dies für alle Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ gilt, folgt in der Tat die Behauptung.

(b) (2 Punkte) $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = -[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger]$.

Lösung: $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = (\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger) = -[\hat{A}^\dagger, \hat{B}^\dagger]$.

(c) (3 Punkte) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$.

Lösung:

$$\hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} = \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) + (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) - (\hat{B}\hat{C})\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]. \quad (25)$$

(d) (3 Punkte) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

Lösung:

$$\hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]. \quad (26)$$