

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte): Viererstromdichte

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir die homogenen Maxwell-Gleichungen mit Hilfe des antisymmetrischen Faraday-Tensors

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^T/c \\ -\vec{E}/c & -\epsilon^{ijk} B^k \end{pmatrix} \quad (1)$$

in kovarianter Form schreiben können

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \text{mit} \quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Dabei ist ρ die Ladungs- und \vec{j} die Stromdichte, und weil die linke Seite ein Vektor ist, wenn wir die Felder so transformieren, dass $F^{\mu\nu}$ ein Tensorfeld 2. Stufe ist, muss folglich (j^μ) ein Vierervektor sein.

Wir haben andererseits in Theoretische Physik 2 gesehen, dass die Stromdichte für eine kontinuierliche Ladungsverteilung durch

$$\vec{j}(t, \vec{x}) \equiv \vec{j}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}) \vec{v}(\underline{x}) \quad (3)$$

gegeben ist, wobei $\vec{v}(\underline{x})$ das Strömungsfeld der geladenen Materie ist, also die Geschwindigkeit eines kleinen materiellen Volumens zur Zeit t am Ort \vec{x} und $\rho = dq/d^3x$, also die Ladung im Volumenelement d^3x pro Volumeneinheit.

Wir wollen zeigen, dass diese physikalischen Bedeutung von ρ und \vec{j} tatsächlich damit kompatibel ist, dass j^μ ein Vierervektor ist.

Dazu betrachten wir ein Inertialsystem Σ^* wo das Fluidvolumenelement am Raumzeit-Punkt \underline{x} momentan in Ruhe ist. Offenbar gilt in diesem System

$$(j^{*\mu}) = \begin{pmatrix} c\rho^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Wir nehmen weiter an, dass die räumlichen Achsen des Systems Σ so orientiert sind, dass $\vec{v} = \beta c \vec{e}_1$ ist. In diesem Ruhesystem des Fluidelements ist die Vierergeschwindigkeit

$$u^{*\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow j^{*\mu} = \rho^* c u^{*\mu}. \quad (5)$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie dass der „inverse Lorentz-Boost“

$$\hat{\Lambda}(-\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

die korrekte Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \Lambda^\mu_\rho(-v)u^{*\rho} \quad (7)$$

ergibt.

(b) (3 Punkte) Argumentieren Sie, dass demnach

$$j^\mu = \rho^* c u^\mu \quad (8)$$

sein muss, wenn (j^μ) sich wie ein Vierervektor transformiert.

(c) (4 Punkte) Zeigen Sie weiter, dass das kompatibel mit der Formel

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho\vec{v} \end{pmatrix} \quad (9)$$

ist.

Anleitung: Dazu bemerken wir, dass die Ladung ein Lorentz-Skalar ist, und die im Fluidelement enthaltene Ladung demnach durch

$$dq^* = \rho^* d^3x^* = \rho d^3x = dq \quad (10)$$

gegeben ist. Dabei ist d^3x^* das Volumen des Fluidelements, wie es ein Beobachter zum festen Zeitpunkt t^* im Ruhesystem Σ^* des Fluidelements misst, während d^3x das Volumen dieses Fluidelements für einen Beobachter im System Σ zum entsprechenden festen Zeitpunkt t ist. Demnach ist das Volumenelement bzgl. Σ in der Boost-Richtung \vec{e}_1 Lorentz-kontrahiert gegenüber der entsprechenden Länge in Σ^* , während die dazu senkrechten Richtungen nicht kontrahiert sind, d.h. es gilt $d^3x = d^3x^*/\gamma$. Verwenden Sie nun (10), um die Ladungsdichte ρ^* bzgl. des Ruhesystems Σ^* des Fluidelements durch die Ladungsdichte ρ bzgl. des Laborsystems Σ auszudrücken. Verwenden Sie dann dieses Resultat in (8) und vergleichen das Ergebnis mit (9).