

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte): Spin-Messungen

Wir betrachten ein Elektron mit Spin $1/2$. Es sei im \hat{S}_3 -Eigenzustand zum Eigenwert $+\hbar/2$ („Spin up“) präpariert. Wir arbeiten im Folgenden in der \hat{S}_3 -Eigenbasis, d.h. der Spin-Zustand ist in dieser Basis durch den Spinor $\psi = u_{1/2}(\vec{e}_3) = (1, 0)^T$ gegeben.

Die Pauli-Matrizen bzgl. dieser Basis lauten

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Im Skript wurden die Eigenvektoren für eine beliebige Spin-Komponente in Richtung

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

angegeben, s. Gl. (3.14.28):

$$u_{1/2}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) \exp(-i\alpha/2) \\ \sin(\beta/2) \exp(i\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad u_{-1/2}(\vec{n}) = \begin{pmatrix} -\sin(\beta/2) \exp(-\alpha/2) \\ \cos(\beta/2) \exp(i\alpha/2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie den Operator für die Spinkomponente in Richtung von \vec{n} :

$$\vec{n} \cdot \hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{n} \cdot \hat{\sigma}. \quad (4)$$

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass in der Tat die Spinoren in (3) die Eigenvektoren dieses Operators sind, d.h. dass

$$\vec{n} \cdot \hat{S} u_{1/2}(\vec{n}) = \frac{\hbar}{2} u_{1/2}(\vec{n}), \quad \vec{n} \cdot \hat{S} u_{-1/2}(\vec{n}) = -\frac{\hbar}{2} u_{-1/2}(\vec{n}), \quad (5)$$

gilt.

(c) (2 Punkte) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer Messung von $\vec{n} \cdot \hat{S}$ die Eigenwerte $\hbar/2$ und $-\hbar/2$?

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Spinkomponente $\vec{n} \cdot \hat{S}$.