

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 2

Aufgabe 1 [15 Punkte]: Freie Teilchen: Gaußsches Wellenpaket

Wir suchen eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(t,x). \quad (1)$$

mittels eines Fourier-Integralansatzes:

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} A(t,k) \exp(ikx). \quad (2)$$

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie durch Einsetzen des Ansatzes in die Schrödinger-Gleichung, dass für A die Gleichung

$$i\hbar\partial_t A = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 A(t,k) \quad (3)$$

gilt.

- (b) (3 Punkte) Lösen Sie diese Gleichung für die Anfangsbedingung

$$A(0,k) = A_0(k). \quad (4)$$

- (c) (5 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall einer Gaußschen Anfangsbedingung im k -Raum

$$A_0(k) = N \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \quad (5)$$

mit $N = \text{const}$ und zeigen Sie durch Einsetzen in (2), dass sich für die Wellenfunktion

$$\psi(t,x) = \frac{N}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi m\Delta k^2}{m + 2i\hbar\Delta k^2 t}} \exp\left[-\frac{m^2\Delta k^2}{m^2 + 4\hbar^2\Delta k^4 t^2} \left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2 + i\Phi(t,x)\right] \quad (6)$$

mit der Phase

$$\Phi(t,x) = \frac{m\Delta k^2}{m^2 + 4\hbar^2\Delta k^4 t^2} \left(2\hbar\Delta k^2 x^2 t + \frac{mxk_0}{\Delta k^2} - \frac{\hbar k_0^2 t}{2\Delta k^2}\right) \quad (7)$$

ergibt.

Hinweis 1: Sie können die Formel für das allgemeine Gauß-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} dk \exp(-ak^2 + bk) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \quad (8)$$

die für $\text{Re } a > 0$ gilt, ohne Beweis verwenden. Außerdem ist Anhang E im Skript zur Theoretischen Physik II [[Link zum pdf](#)] nützlich.

Hinweis 2: Sie können die beiden letzten Aufgaben auch bearbeiten, wenn Sie diesen Aufgabenteil nicht bis zu Ende gelöst haben, denn Sie benötigen nur das Endergebnis (6).

- (d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Ortswahrscheinlichkeitsverteilung $P(t, \vec{x}) = |\psi(t, \vec{x})|^2$.
- (e) (2 Punkte) Lesen Sie Mittelwert und Standardabweichung für den Ort x ab und interpretieren Sie das Resultat physikalisch.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass eine Gauß-Verteilung für x mit Mittelwert x_0 und Standardabweichung Δx durch

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}\right] \quad (9)$$

gegeben ist.