

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1: Faltungssatz für Fourier-Transformationen

Wir betrachten die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung für zeitabhängige Funktionen, die durch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \exp(i\omega t), \\ f(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t)\end{aligned}\tag{1}$$

gegeben sind.

Die Faltung zweier Funktionen f und g im Zeitbereich ist durch

$$h(t) = f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} dt' f(t-t')g(t')\tag{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierten dieser Funktionen

$$\tilde{h}(\omega) = \widetilde{f * g}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)\tag{3}$$

gilt.

Tip: Bei der Rechnung ist die Formel

$$\int_{\mathbb{R}} dt \exp(i\omega t) = 2\pi\delta(\omega)\tag{4}$$

nützlich.

Lösung: Wir drücken (2) durch die Fourier-Transformierten von f und g aus, d.h.

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_2}{2\pi} \exp[-i\omega_1(t-t')] \tilde{f}(\omega_1) \exp(-i\omega_2 t') \tilde{g}(\omega_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt' \exp(-i\omega_1 t) \exp[it'(\omega_1 - \omega_2)] \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_2}{2\pi} \exp(-i\omega_1 t) 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2) \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega_1}{2\pi} \exp(-i\omega_1 t) \tilde{f}(\omega_1) \tilde{g}(\omega_1).\end{aligned}\tag{5}$$

Daraus liest man unmittelbar ab, dass

$$\tilde{h}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)\tag{6}$$

ist, und das war zu zeigen.

Aufgabe 2: Fourier-Darstellung elektromagnetischer Wellen

Es seien die Ladungs- und Stromverteilung durch ihre Fourier-Darstellung bzgl. der Zeit

$$\begin{aligned}\rho(t, \vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\rho}(\omega, \vec{x}) \exp(-i\omega t), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\vec{j}}(\omega, \vec{x}) \exp(-i\omega t),\end{aligned}\tag{7}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(\omega, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}} dt D_{\text{ret}}(t, \vec{x}) \exp(i\omega t)\tag{8}$$

der retardierten Green-Funktion

$$D_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x}|\tag{9}$$

des D'Alembert-Operators und interpretieren Sie das Resultat physikalisch.

Lösung:

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}} dt \exp(i\omega t) \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi r} \exp(ikr) \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.\tag{10}$$

Zur physikalischen Bedeutung bemerken wir, dass die retardierte Green-Funktion die Gleichung

$$\square D_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) D_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \delta(t) \delta^3(\vec{x})\tag{11}$$

löst. Das entspricht einer impulsartigen Störung einer Quelle im Ursprung $\vec{x} = 0$ zur Zeit $t = 0$. Zusammen mit dem Exponentialfaktor in der Fourier-Rücktransformation folgt aus (10)

$$\exp(-i\omega t) \tilde{D}_{\text{ret}}(\omega, \vec{x}) = \frac{\exp[-i\omega(t - r/c)]}{4\pi r},\tag{12}$$

d.h. die Impulsstörung führt zu einer vom Ursprung (also dem Ort der Störung) **auslaufenden Kugelwelle**, die sich mit der Phasengeschwindigkeit c ausbreitet. Die retardierte Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square \chi(t, \vec{x}) = J(t, \vec{x})$ für ein Skalarfeld

$$\chi(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' D_{\text{ret}}(t - t', \vec{x} - \vec{x}') J(t', \vec{x}')\tag{13}$$

besagt dann, dass von jeder Störung zu den Zeiten t' an den Orten $\vec{x}'$ eine Kugelwelle ausgeht, und diese Kugelwellen überlagern sich additiv zur Gesamtwellen (13).

Bemerkung: Dies wird oft zur vereinfachten Erklärung für Wellenerscheinungen (z.B. bei der Beugung) einfach als **Huygenssches Prinzip** postuliert. Wie wir eben gezeigt haben, lässt sich dieses Prinzip aus den Maxwell-Gleichungen herleiten. Interessanterweise gilt es nur für die Wellengleichung, wenn der Raum eine ungerade Dimension besitzt (also wie in unserem Fall für $d = 3$). Für die Wellenausbreitung in Räumen gerader Dimension (also z.B. für Wellen, die sich in einer Ebene ausbreiten), ist es nur näherungsweise erfüllt!

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Faltungssatzes aus der vorigen Aufgabe die Fourier-Transformierten der retardierten Lösungen der Maxwell-Gleichungen für die Potentiale in Lorenz-Eichung

$$\begin{aligned}\Phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' D_{\text{ret}}(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \rho(t', \vec{x}'), \\ \vec{A}(t, \vec{x}) &= \mu_0 \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' D_{\text{ret}}(t-t', \vec{x}-\vec{x}') \vec{j}(t', \vec{x}')\end{aligned}\quad (14)$$

Wir nehmen dabei an, dass die Ladungen und Ströme für $|\vec{x}| = r > R$, also außerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung verschwinden. Geben Sie die einfachste Näherung für das „Fernfeld“ bei $r \gg R$ an.

Lösung: Seien die Fourier-Transformierten der Ladungs- und Stromverteilungen mit $\tilde{\rho}(\omega, \vec{x})$ bzw. $\tilde{j}(\omega, \vec{x})$ bezeichnet. Nach dem Faltungssatz gilt dann für die Fourier-Transformierten der Potentiale

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\omega, \vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \tilde{D}_{\text{ret}}(\omega, \vec{x}-\vec{x}') \tilde{\rho}(\omega, \vec{x}'), \\ \tilde{A}(\omega, \vec{x}) &= \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \tilde{D}_{\text{ret}}(\omega, \vec{x}-\vec{x}') \tilde{j}(\omega, \vec{x}')\end{aligned}\quad (15)$$

Setzen wir nun (10) für die retardierte Green-Funktion ein, können wir uns für $r \gg R$ auf die niedrigste Ordnung in der Entwicklung nach Potenzen von $1/r$ beschränken. Dazu schreiben wir zunächst

$$d = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'}. \quad (16)$$

Klammern wir nun r aus und setzen $\vec{n} = \vec{x}/r$, entsteht

$$d = r \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} = r \left[1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right] = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r}\right). \quad (17)$$

Damit wird

$$\exp(ikd) = \exp[ik(r - \vec{n} \cdot \vec{x}')] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{kr'^2}{r}\right) \right]. \quad (18)$$

Dann benötigen wir noch

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r^2}\right). \quad (19)$$

Damit wird schließlich

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(\omega, \vec{x} - \vec{x}') = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \left[\exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') + \mathcal{O}\left(\frac{r'}{r}\right) \right] \quad (20)$$

und damit schließlich wegen (15)

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\omega, \vec{x}) &= \frac{\exp(ikr)}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') \tilde{\rho}(\omega, \vec{x}'), \\ \tilde{A}(\omega, \vec{x}) &= \mu_0 \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') \tilde{j}(\omega, \vec{x}').\end{aligned}\quad (21)$$

- (c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der Felder, die wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ durch

$$\vec{\tilde{E}}(\omega, \vec{x}) = -\vec{\nabla}\tilde{\Phi}(\omega, \vec{x}) + i\omega\vec{\tilde{A}}(\omega, \vec{x}), \quad \vec{\tilde{B}}(\omega, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{A}}(\omega, \vec{x}) \quad (22)$$

gegeben sind.

Behalten Sie auch hier wieder nur die führende Ordnung $\mathcal{O}(1/r)$ in Potenzen von $1/r$ („Fernfelder“) bei.

Lösung: Betrachten wir zuerst $\vec{\nabla}\tilde{\Phi}$. Es gilt für die einzelnen Terme, in denen eine $\vec{x}$ -Abhängigkeit vorkommt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^2} \vec{\nabla} r = -\frac{\vec{x}}{r^3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ \vec{\nabla} \exp(ikr) &= ik \exp(ikr) \vec{\nabla} r = \frac{ik\vec{x}}{r} \exp(ikr) = ik\vec{n} \exp(ikr) = \mathcal{O}(1), \\ \vec{\nabla} \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') &= \vec{\nabla} \exp\left(-\frac{ik\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r}\right) = -ik \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') \left(\frac{\vec{x}'}{r} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{x}')\vec{x}}{r^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Der erste Term ist bereits von $\mathcal{O}(1/r^2)$, kann also vernachlässigt werden. Der dritte Term kommt im Integral vor, und der entsprechende Beitrag wird noch mit $\exp(ikr)/r$ multipliziert, ist also auch von der Ordnung $\mathcal{O}(1/r^2)$ und damit vernachlässigbar. Wir müssen also effektiv in den Formeln (21) für die Potentiale nur den Faktor $\exp(ikr)$ ableiten, wenn wir $\vec{\nabla}$ anwenden, d.h.

$$\vec{\nabla}\tilde{\Phi}(\omega, \vec{x}) = \frac{ik\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(ikr) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') \tilde{\rho}(\omega, \vec{x}'). \quad (24)$$

Damit ergibt sich nach einigen Umformungen aus (22)

$$\vec{\tilde{E}}(\omega, \vec{x}) = \frac{i\omega\mu_0 \exp(ikr)}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') \left[\vec{j}(\omega, \vec{x}') - c\vec{n}\tilde{\rho}(\omega, \vec{x}') \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (25)$$

Dabei haben wir $\omega = ck$ und $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ verwendet.

Auch für das Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ müssen wir nur den Term mitnehmen, bei dem $\vec{\nabla}$ in (21) auf den Faktor $\exp(ikr)$ wirkt. Nach einigen einfachen Rechnungen, wieder unter Verwendung der Ableitungen (23), dass in der Fernfeldnäherung

$$\vec{\tilde{B}}(\omega, \vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{A}}(\omega, \vec{x}) = \frac{i\omega\mu_0 \exp(ikr)}{4\pi cr} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') [\vec{n} \times \vec{j}(\omega, \vec{x}')] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (26)$$

Wegen $\vec{n} \times \vec{n} = \vec{0}$ folgt aus (25)

$$\vec{\tilde{B}}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{\tilde{E}}(\omega, \vec{x}). \quad (27)$$

Bemerkung: Man kann (25) noch etwas umformen, wenn man die Kontinuitätsgleichung für die Ladung

$$-\partial_t \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \Rightarrow i\omega\tilde{\rho}(\omega, \vec{x}') = \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\omega, \vec{x}') \Rightarrow \tilde{\rho}(\omega, \vec{x}') = -\frac{i}{\omega} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\omega, \vec{x}') \quad (28)$$

Setzt man dies für $\tilde{\rho}$ in (25) ein und integriert das entsprechende Integral partiell, ergibt sich

$$\vec{\tilde{E}}(\omega, \vec{x}) = \frac{i\omega\mu_0 \exp(ikr)}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}') \left[\vec{j}(\omega, \vec{x}') - \vec{n}[\vec{n} \cdot \vec{j}(\omega, \vec{x}')] \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (29)$$

Daraus folgt sofort, dass $\vec{n} \cdot \vec{\tilde{E}} = 0$ ist, d.h. in der betrachteten Fernfeldnäherung verhält sich in einer kleinen Umgebung um jeden Punkt jede Mode¹ des elektromagnetischen Feldes wie eine sich in Radialrichtung $\vec{n} = \vec{x}/r$ ausbreitende ebene Welle, wobei $\vec{\tilde{E}}$, $\vec{\tilde{B}}$ und $\vec{n}$ ein rechtshändiges System zueinander orthogonaler Vektoren bilden. Es gilt stets die Dispersionsrelation $\omega = ck = 2\pi c/\lambda$, d.h. die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen ist die Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<https://th.physik.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-13-SS25/index.html>

¹Man nennt den Beitrag der Frequenz ω zu einer Welle in der Fourier-Entwicklung bzgl. der Zeit eine **Feldmode**.