

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 6

Aufgabe 1 [10 Punkte]: Magnetostatisches Vektorpotential

Wir betrachten die stationären Maxwell-Gleichungen (im Vakuum), also die Maxwell-Gleichungen, wenn alle Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ und $\vec{j}$ zeitunabhängig sind. Dann zerfallen die Maxwell-Gleichungen in getrennte Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Für $\vec{E}$ ergeben sich dieselben Gleichungen wie für die Elektrostatik, und diese interessieren uns in dieser Aufgabe nicht, d.h. wir beschäftigen uns nur mit dem $\vec{B}$ -Feld. Gehen Sie dazu wie folgt vor

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich für zeitunabhängige Felder die Maxwell-Gleichungen zu

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

vereinfachen. Wie oben gesagt, interessieren uns die elektrostatischen Gleichungen (1) nicht weiter.

Lösung: Setzt man in den Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

alle Zeitableitungen von Feldern Null, ergeben sich sofort die Gleichungen der Magnetostatik (1) und (2).

- (b) (4 Punkte) Argumentieren Sie, warum es ein Vektorpotential $\vec{A}$ für $\vec{B}$ geben muss, so dass

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5)$$

ist und dass man zusätzlich die **Coulomb-Eichbedingung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (6)$$

fordern darf, ohne die Lösungen für $\vec{B}$ irgendwie einzuschränken.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate der Aufgabe 1 vom vorigen Übungsblatt!

Lösung: Auf dem vorigen Übungsblatt wurde gezeigt, dass es wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ immer ein Vektorpotential für $\vec{B}$ gibt, so dass (5) gilt. Für vorgegebenes $\vec{B}$ ist das Vektorpotential allerdings nur bis auf ein beliebiges Gradientenfeld bestimmt, d.h. für ein beliebiges Skalarfeld χ ergibt

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi \quad (7)$$

das gleiche Magnetfeld wie $\vec{A}$, denn es ist $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi = 0$. Dies bezeichnet man als **Eichinvarianz**.

Verlangen wir nun, dass $\vec{A}'$ die Coulomb-Eichbedingung (6) erfüllt. Dann muss gelten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Delta \chi = 0 \Rightarrow -\Delta \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (8)$$

Die Lösung für diese Poisson-Gleichung kennen wir aus der Elektrostatik, bzw. vom Coulomb-Potential als Greensche Funktion für den Operator $(-\Delta)$:

$$\chi(\vec{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (9)$$

Wir können also immer ein „Eichfeld“ χ finden, so dass $\vec{A}'$ (5) erfüllt, d.h. die Eichbedingung schränkt die Lösungen der magnetostatischen Maxwell-Gleichungen nicht ein. Im Folgenden nehmen wir an, dass $\vec{A}$ die Coulomb-Eichbedingung (5) erfüllt.

- (c) (2 Punkte) Zeigen Sie dann mit Hilfe von (2-6), dass

$$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (10)$$

gelten muss.

Lösung: Setzen wir (5) in die erste Gleichung (2), also das Ampéresche Durchflutungsgesetz, ein, folgt mit der „bac-cab-Formel“, angewandt auf die Nabla-Symbole

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (11)$$

Das vereinfacht sich wegen der Coulomb-Eichbedingung (6) zu (10).

- (d) (3 Punkte) Die Lösungen kennen wir aus der Elektrostatik (s. Green-Funktion für $(-\Delta)$ im Skript!):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (12)$$

Berechnen Sie schließlich das Magnetfeld aus

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (13)$$

Das Resultat kennt man als **Biot-Savart-Gesetz**.

Lösung: Da wir Ableitungen nach den Komponente von $\vec{r}$ mit der Integration über $\vec{r}'$ vertauschen dürfen, folgt

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Bemerkung: Es ist wichtig, zu überprüfen, dass (12) nicht nur (10) löst sondern auch die Coulomb-Eichbedingung erfüllt. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (15)$$

Weiter gilt

$$\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (16)$$

Nun muss *notwendig* $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ erfüllt sein, damit die erste Gleichung (2) überhaupt eine Lösung haben kann, d.h. es muss notwendig die Ladungserhaltung erfüllt sein. Damit ist

$$\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (17)$$

Setzt man dies in (14) ein, kann man den Gaußschen Integralsatz anwenden. Der Rand von $\mathbb{R}^3$ liegt im Unendlichen. Nimmt man dann an, dass in physikalisch realistischen Fällen $\vec{j}$ nur in einem endlichen Raumbereich von 0 verschieden ist, ergibt sich also tatsächlich $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$, wie in (6) gefordert.

Freiwillige Knobelaufgabe (mit 10 Zusatzpunkten!): magnetostatischer Punktdipol

In der folgenden Aufgabe wollen wir untersuchen, inwiefern sich ein magnetisches Dipolfeld unterscheidet, wenn man annimmt, dass es einerseits aus „Molekularströmen“ stammt (entsprechend der gewöhnlichen Maxwell-Gleichungen mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, also der Annahme, dass es keine magnetischen Ladungen/Monopole gibt), vielleicht andererseits aber auch aus einem statischen Dipol aus einer positiven und einer negativen Magnetladung $\pm Q_{\text{mag}}$ besteht. Wir nennen dies das „**Strommodell**“ bzw. das „**Polmodell**“ für das magnetische Moment von Teilchen.

Dass überhaupt ein Unterschied besteht, ergibt sich nur mit Hilfe der „regularisierten Punktmultipolrechnung“ im Skript (Abschnitt 1.7.1¹), verallgemeinert auf die Magnetostatik

Für das „**Strommodell**“ gilt für das regularisierte Vektorpotential eines Punktdipols, der im Ursprung lokalisiert ist,

$$\vec{A}_\epsilon(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{m} \times \nabla \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 + \epsilon^2}} = + \frac{\mu_0}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \vec{m} \times \vec{r}. \quad (18)$$

- (a) (3 Punkte) Zeigen Sie durch Berechnung der Rotation, dass

$$\vec{B}_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m}}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} + \frac{2\epsilon^2 \vec{m}}{(\epsilon^2 + r^2)^{5/2}} \right] \quad (19)$$

gilt.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} \vec{B}_\epsilon(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_\epsilon = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|r^2 + \epsilon^2|^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla} \frac{1}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2\vec{m}}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} + \frac{3(\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r}}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{m} + 2\vec{m}\epsilon^2}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

und das ist in der Tat (19).

- (b) (3 Punkte) Zeigen Sie weiter, indem Sie wie im Skript erklärt den “schwachen Limes” $\epsilon \rightarrow 0$ berechnen, dass sich dann

$$\vec{B}(\vec{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{B}_\epsilon = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2] + \frac{2}{3} \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (21)$$

ergibt.

Lösung: Wie im Skript erläutert, ist die regularisierte δ -Distribution durch

$$\delta_\epsilon^{(3)}(\vec{r}) = -\Delta \frac{1}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{1/2}} = -\frac{1}{r} \partial_r^2 \frac{r}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{1/2}} = \frac{3\epsilon^2}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \quad (22)$$

gegeben. Bildet man den schwachen Limes von (20), ergibt sich also in der Tat (21).

¹Achtung: das ist erst Ende Mai 2025 eingefügt worden, also Skript ggf. neu herunterladen!

- (c) (4 Punkte) In einem von der Standardelektrodynamik abweichenden Modell, in dem es magnetische Monopole gibt, gilt in Analogie zum elektrischen Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_{\text{mag}}. \quad (23)$$

Selbst wenn man keine isolierten Magnetladungen annimmt, könnte es gleichwohl sein, dass es dann Punktdipole, die sich aus zwei Magnetladungen $\pm Q_{\text{mag}}$ zusammensetzen, gibt. Nehmen wir weiter an, dass dies die einzige Quelle für das magnetische Moment ist, d.h. dass nicht auch noch zusätzlich eine Stromquelle vorliegt, folgt in vollkommener Analogie zum entsprechenden elektrostatischen Fall (s. Skript Abschn. 1.7.1) für das „regularisierte Punktdipolfeld“

$$\vec{B}_\epsilon(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi_\epsilon(\vec{r}) \quad (24)$$

mit dem magnetostatischen Potential

$$\Phi_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{(\epsilon^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (25)$$

Zeigen Sie, dass dann (natürlich analog wie in der Elektrostatik)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{B}_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m} r^2] - \frac{1}{3} \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (26)$$

gilt.

Lösung: Das regularisierte Magnetfeld ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \vec{B}_\epsilon(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \Phi_\epsilon(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{(\epsilon^2 + r^2)^{3/2}} + \vec{m} \cdot \vec{r} \vec{\nabla} \frac{1}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m}}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m} - \epsilon^2 \vec{m}] \end{aligned} \quad (27)$$

Beachtet man wieder (22) ergibt sich durch Bilden des schwachen Limes in der Tat (26).

Bemerkung: Auf den ersten Blick scheint der Unterschied zwischen (21) und (26) irrelevant zu sein, da man aus „makroskopischer Sicht“ behaupten kann, dass sich dieser Unterschied nicht nachmessen lässt, da er nur den singulären Anteil mit der δ -Distribution betrifft, und man bei $\vec{r} = 0$ auch noch die Singularität von dem „gewöhnlichen Dipolfeld“ hat. Makroskopisch kann man also mit einigem Recht behaupten, dass man das „Strommodell“ vom „Polmodell“ eines magnetischen Punktdipols nie unterscheiden kann, d.h. es könnte sehr wohl sein, dass gewöhnliche makroskopische Permanentmagneten, wo man ohnehin nur weit weg vom Magneten selber in guter Näherung ein reines Dipolfeld, hat, sich aus Polpunktdipolen und nicht aus Strompunktdipolen zusammensetzt, wie in den gewöhnlichen Maxwell-Gleichungen angenommen.

Das ändert sich aber in der Atomphysik. Betrachtet man z.B. ein Wasserstoffatom etwas genauer, kann man als Korrektur zur üblichen Rechnung mit der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron im Coulomb-Feld des Protons auch noch die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Dipolmoment des Protons und dem des Elektrons als Störung in Betracht ziehen. In der niedrigsten Ordnung der Störungsrechnung

für den Grundzustand des Wasserstoffatoms (ein s -Wellen-Zustand, mit Drehimpulsquantenzahl $\ell = 0$) ergibt dies eine Feinstrukturaufspaltung des Grundzustandes

$$\Delta E = -\langle \psi_0 | \vec{m}_e \cdot \vec{B}_p | \psi_0 \rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \vec{m}_e \cdot \vec{B}_p(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2, \quad (28)$$

wobei die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(\vec{r}) = \psi_0(r)$ entsprechend der Bahndrehimpulsquantenzahl radialsymmetrisch ist (in Kugelkoordinaten also nicht von ϑ und φ abhängt). Das Winkelintegral über das gewöhnliche Dipolfeld des Protons $\vec{B}_p$ verschwindet, und es bleiben nur der Beitrag von dem singulären δ -Distributionsbeitrag, die sog. Kontaktwechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten von Proton und Elektron, übrig, und der unterscheidet sich ja gerade zwischen Pol- und Strommodell. Entsprechend erhält man

$$\Delta E = -\frac{2}{3} \lambda \langle \vec{m}_e \cdot \vec{m}_p \rangle |\psi_0(0)|^2. \quad (29)$$

Dabei ist $\lambda = 1$ für das von der Standard-Elektrodynamik zu erwartende Resultat des Strommodells bzw. $\lambda = -1/2$ für das alternative Polmodell. Die Spektroskopie ergibt eindeutig mit höchster Präzision $\lambda = 1$. Für Wasserstoff ist das die berühmte 21 cm-Linie der Radioastronomie (21 cm ist dabei die Wellenlänge der entsprechenden Mikrowellenstrahlung dieses Hyperfeinübergangs von atomarem (!) Wasserstoff). Genaueres dazu finden Sie in [Jac77].

Literatur

[Jac77] J. D. Jackson, The Nature of Intrinsic Magnetic Dipole Moments, CERN-77-17, CERN-YELLOW-77-17 (1977).
URL <https://doi.org/10.5170/CERN-1977-017>

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo2-13-SS24/index.html>