Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1: Energie-, Impuls- und Drehimpulsdichte einer ebenen Welle

Wir betrachten eine allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen in Form einer sich in x_3-Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle (s. auch Abschnitt 2.6 im Skript). Wir rechnen zunächst mit komplexwertigen Vektoren $\vec{E}_c$ und $\vec{B}_c$. Die reellen physikalischen Felder sind dann $\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{E}_c$ und $\vec{B} = \mathrm{Re}\,\vec{B}_c$. Wir gehen von dem Ansatz

$$\vec{E}_c(t,\vec{x}) = \hat{\vec{E}}_c \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)] = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \exp(-\mathrm{i}\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)] \tag{1}$$

aus. Dabei haben wir bereits ausgenutzt, dass das elektrische Feld transversal ist, also $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ ist, wobei wir hier $\vec{k} = k\vec{e}_3$ angenommen haben; es seien $\hat{E}_1, \hat{E}_2 \in \mathbb{R}$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Außerdem haben wir bereits die Dispersionsrelation $\omega = ck$ für elektromagnetische Wellen verwendet.

Die Maxwell-Gleichungen mit $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$ lauten

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} = 0, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \tag{5}$$

(a) Verwenden Sie die Maxwell-Gleichungen, um zu zeigen, dass

$$\vec{B}_c(t,\vec{x}) = \frac{1}{c} \vec{e}_3 \times \vec{E}_c(t,\vec{x}) \tag{6}$$

ist.

Lösung: Wir machen den Ansatz

$$\vec{B}_c(t,\vec{x}) = \hat{\vec{B}}_c \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)]. \tag{7}$$

Um diesen Ansatz in (4) zu verwenden, berechnen wir zunächst die Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_c = -\hat{\vec{B}}_c \times \vec{\nabla} \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)] = -\hat{\vec{B}}_c \times \mathrm{i}k\vec{e}_3 \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)] = +\mathrm{i}k\vec{e}_3 \times \hat{\vec{B}}_c \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)] \tag{8}$$

und

$$\partial_t \vec{E}_c = -\mathrm{i}kc \hat{\vec{E}}_c \exp[-\mathrm{i}k(ct - x_3)]. \tag{9}$$

Damit liefert (4) nach einfachen Umformungen

$$\vec{e}_3 \times \hat{\vec{B}}_c = -c\mu_0\epsilon_0 \hat{\vec{E}}_c = -\frac{1}{c} \hat{\vec{E}}_c. \tag{10}$$

Daraus folgt mit der „bac-cab-Formel“ für das doppelte Vektorprodukt

$$-\frac{1}{c}\vec{e}_3 \times \hat{\vec{E}}_c = \vec{e}_3 \times (\vec{e}_3 \times \hat{\vec{B}}_c) = \vec{e}_3(\vec{e}_3 \cdot \hat{\vec{B}}_c) - \hat{\vec{B}}_c. \tag{11}$$

Nun folgt aus (3), dass auch $\vec{B}_c$ transversal ist, d.h. $\vec{e}_3 \cdot \vec{B}_c = 0$ und damit $\vec{e}_3 \cdot \hat{\vec{B}}_c = 0$. Also folgt aus (11) in der Tat (6), d.h.

$$\hat{\vec{B}}_c = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\hat{E}_1\\ \hat{E}_2\exp(-\mathrm{i}\phi)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}-\hat{E}_2\exp(-\mathrm{i}\phi)\\ \hat{E}_1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

(b) Berechnen Sie nun die physikalischen Felder $\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{E}_c$ und $\vec{B} = \mathrm{Re}\,\vec{B}_c$

Lösung: Für die x_2-Komponente von $\vec{E}$ bemerken wir, dass $\exp(-\mathrm{i}\phi)\exp[-\mathrm{i}k(ct-x_3)] = \exp[-\mathrm{i}(ckt-kx_3+\phi)]$ gilt. Damit wird

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\,\vec{E}_c(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix}\hat{E}_1\cos(ckt-kx_3)\\ \hat{E}_2\cos(ckt-kx_3+\phi)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Genauso folgt

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\,\vec{B}_c(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}-\hat{E}_2\cos(ckt-kx_3+\phi)\\ \hat{E}_1\cos(ckt-kx_3)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{14}$$

(c) Berechnen Sie die Energiedichte w, die Impulsdichte $\vec{g}$ und die Drehimpulsdichte $\vec{J} = \vec{x} \times \vec{g}$ des elektromagnetischen Feldes (vgl. Skript Abschnitte 2.8-2.10).

Lösung: Es gilt

$$w = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2. \tag{15}$$

Aus (13) und (14) folgt $\vec{B}^2 = \vec{E}^2/c^2 = \mu_0\epsilon_0\vec{E}^2$ und damit

$$w = \epsilon_0\vec{E}^2 = \epsilon_0[\hat{E}_1^2\cos^2(ckt-kx_3) + \hat{E}_2^2\cos^2(ckt-kx_3+\phi)]. \tag{16}$$

Weiter ist

$$\vec{g} = \epsilon_0\vec{E} \times \vec{B} = \frac{\epsilon_0}{c}\vec{E} \times (\vec{e}_3 \times \vec{E}) = \frac{\epsilon_0}{c}[\vec{e}_3\vec{E}^2 - \vec{E}\vec{e}_3 \cdot \vec{E}] = \frac{\epsilon_0}{c}\vec{E}^2\vec{e}_3 = \frac{w}{c}\vec{e}_3. \tag{17}$$

Die Impulsdichte ist also in Ausbreitungsrichtung der Welle gerichtet, und der Betrag ist w/c. Die Drehimpulsdichte ist damit

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{g} = \frac{w}{c}\vec{x} \times \vec{e}_3 = \frac{w}{c}\begin{pmatrix}x_2\\ -x_1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{18}$$

(d) Unser Auge kann die schnellen Schwingungen von Licht nicht auflösen. Eine ebene Welle erscheint uns einfach als zeitlich konstant leuchtendes Licht. Die Intensität des Lichtes ist dabei das Zeitmittel der Energiedichte. Da die ebene Welle eine periodische Lösung der Maxwellgleichungen mit der zeitlichen Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(ck)$ ist, erfolgt die Mittelung über diese Periodendauer:

$$\langle w(\vec{x})\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, w(t,\vec{x}). \tag{19}$$

Berechnen Sie damit die zeitgemittelte Energiedichte.

Lösung: Wir benötigen das Integral

$$I = \int_0^T \mathrm{d}t \cos^2(ckt+\alpha). \tag{20}$$

Dazu bemerken wir, dass

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{2}[1+\cos(2\beta)] \tag{21}$$

ist. Verwenden wir dies in (20), folgt

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{d}t\,[1+\cos(2ckt+2\alpha)] = \frac{T}{2} + \frac{1}{2ck}\,[\sin(2ckt+2\alpha)]_{t=0}^{t=T} = \frac{T}{2}. \tag{22}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $ckT = 2\pi$ ist und damit der Beitrag vom Sinus verschwindet. Damit wird

$$\langle \vec{w}(\vec{x})\rangle = \frac{\epsilon_0}{2}(\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2), \tag{23}$$

d.h. die zeitgemittelte Energiedichte ist räumlich konstant.

(e) Berechnen Sie auch die entsprechenden Zeitmittel über die Impuls- und Drehimpulsdichte.

Lösung: Aus (17) und (18) folgt

$$\langle \vec{g}(\vec{x})\rangle = \frac{1}{c}\langle w(\vec{x})\rangle\,\vec{e}_3, \quad \left\langle \vec{J}(\vec{x})\right\rangle = \frac{1}{c}\langle w(\vec{x})\rangle\,\vec{x}\times\vec{e}_3. \tag{24}$$

(f) **Zum Knobeln:** Was folgt für Gesamtenergie, -impuls und -drehimpuls der ebenen Wellen. Kann es solche Felder in der Natur wirklich geben?

Lösung: Die Erhaltungsgrößen totale Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes entspricht dem Integral der entsprechenden Dichten über den ganzen Raum. Da die zeitgemittelten Größen für die betrachtete ebene Welle räumlich konstant sind, divergieren all diese Integrale. Entsprechend kann es solche ebenen Wellen in der Natur nicht wirklich geben. Wirkliche elektromagnetische Wellenfelder sind auch stets von endlicher räumlicher Ausdehnung und zeitlicher Dauer. Diese realen „Wellenpaket“ besitzen endliche totale Energien, Impulse und Drehimpulse. Sie lassen sich aus ebenen Wellen durch Fourier-Integrale darstellen (vgl. Abschnitt 5.4 im Skript).
