H. van Hees **Sommersemester 2024**

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 7 – Lösungen

Aufgabe 1: Strahlungseichung für freie Felder

In der Vorlesung haben wir die Potentiale Φ und $\vec{A}$ für das elektromagnetische Feld im Vakuum eingeführt. Bei Anwesenheit von (vorgegebenen) Ladungs- und Stromverteilungen ρ bzw. $\vec{j}$ lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\Phi, \tag{1}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{2}$$
$$\Box\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{3}$$
$$\Box\vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{4}$$

Dabei müssen die Potentiale die Lorenz-Eichbedingung

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{5}$$

erfüllen.

Im folgenden betrachten wir den Fall **freier elektromagnetischer Wellen**, d.h. $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$.

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall *zusätzlich* zur Lorenz-Eichbedingung noch

$$\Phi' = 0 \tag{6}$$

gefordert werden darf, und dass dies durch eine Eichtransformation

$$\Phi' = \Phi + \partial_t \chi \stackrel{!}{=} 0, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \tag{7}$$

mit der Nebenbedingung

$$\Box\chi = 0 \tag{8}$$

erreicht werden kann.

Lösung: Aus der ersten Gleichung (7) folgt, dass

$$\partial_t \chi = -\Phi \tag{9}$$

gelten muss. Da Φ die Gleichung (3) mit $\rho = 0$, also $\Box\Phi = 0$, erfüllt, ist die Nebenbedingung (8) kompatibel mit den Bewegungsgleichungen

$$\Box\partial_t \chi = \partial_t \Box\chi = -\Box\Phi = 0, \tag{10}$$

da der d'Alembert-Operator $\Box = 1/c^2 \partial_t^2 - \Delta$ mit der Zeitableitung vertauscht. Aus (9) folgt, dass eine Lösung für χ durch

$$\chi(t, \vec{r}) = -\int_0^t \mathrm{d}t' \Phi(t', \vec{r}) \tag{11}$$

gegeben ist.

(b) Vergewissern Sie sich, dass nun auch für die neuen Potentiale $\Phi' = 0, \vec{A}'$ immer noch die Lorenz-Eichbedingung erfüllt ist. Welche Eichbedingung ergibt sich daraus für $\vec{A}'$? Man nennt diese Eichung die **Strahlungseichung**. Warum kann es Potentiale in dieser Eichung nur für $\rho = 0$ geben?

Lösung: Zuerst prüfen wir, ob die Lorenz-Eichbedingung (5) für die Potentiale Φ' und $\vec{A}'$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi' + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' &\stackrel{(7)}{=} \frac{1}{c^2}\partial_t(\Phi + \partial_t \chi) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{A} - \vec{\nabla}\chi) \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \chi - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\chi \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Box\chi = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass voraussetzungsgemäß die Potentiale Φ und $\vec{A}$ die Lorenz-Eichbedingung (5) und das Eichfeld χ die homogene Wellengleichung (8) erfüllen. Da nun $\Phi' = 0$ ist, folgt aus (12)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0. \tag{13}$$

Diese **Strahlungseichung** für freie Felder erfüllt also sowohl die Lorenz- also auch die Coulomb-Eichbedingung.

Diese Strahlungseichbedingungen, also $\Phi' = 0$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$ kann nur für $\rho = 0$ erfüllt sein, weil auch (3) erfüllt sein muss. Es ist klar, dass nur für $\rho = 0$ die Forderung $\Phi' = 0$ erfüllt werden kann.

(c) Finden Sie nun die allgmeine Ebene-Wellen-Lösung für in $\vec{k}$-Richtung fortschreitende Wellen mit dem komplexen Ansatz

$$\vec{A}'(t, \vec{r}) = \vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathrm{i}\omega t), \quad \vec{A}_0 = \text{const.} \tag{14}$$

Was ergibt sich für $\omega = \omega(\vec{k})$? Welche Einschränkung muss $\vec{A}_0$ erfüllen, damit die Strahlungseichbedingung für $\vec{A}'$ erfüllt ist.

Lösung: Zunächst stellen wir noch einmal alle Gleichungen zusammen, die $\vec{A}'$ erfüllen muss. Wir müssen die Maxwell-Gleichung (4) mit $\vec{j} = 0$, also

$$\Box\vec{A}' = 0 \tag{15}$$

und die Eichbedingung (13), also

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0 \tag{16}$$

erfüllen. Beginnen wir also mit (15). Dazu bemerken wir, dass für Zeitableitungen und Ortsableitungen für den Ansatz (14) nach der Kettenregel

$$\partial_t \vec{A}' = -\mathrm{i}\omega\vec{A}', \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}' = \mathrm{i}k_j \vec{A}' \tag{17}$$

gilt,

$$\Box\vec{A}' = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}' - \Delta\vec{A}' = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right)\vec{A}' = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right)\vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \stackrel{!}{=} 0. \tag{18}$$

Dies kann für $\vec{A}_0 \neq 0$ offenbar nur erfüllt werden, wenn die sog. Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \omega_k^2 = c^2 \vec{k}^2 = c^2 k^2 \tag{19}$$

erfüllt ist. Da wir reine in $+\vec{k}$ fortschreitende Wellen haben wollen, müssen wir die positive Wurzel für ω wählen, also

$$\omega = +\omega_k = ck > 0. \tag{20}$$

Dabei ist $k = |\vec{k}|$. Die Strahlungseichbedingung verlangt gemäß (16) weiter, dass

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) = 0 \tag{21}$$

ist. Das kann nur erfüllt sein, wenn

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_0 = 0 \tag{22}$$

ist. Das bedeutet, dass $\vec{A}_0$ und damit auch das Feld $\vec{A}'$ stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ gerichtet sein muss, d.h. $\vec{A}'$ ist eine **Transversalwelle**.

(d) Berechnen Sie nun $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mittels (1). Dazu beachte man, dass die physikalischen Felder durch den Realteil der soeben berechneten komplexen Felder gegeben sind.

Lösung: Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ergeben sich aus den Potentialen durch (1) und (2). Berechnen wir zunächst die komplexwertigen Felder:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\partial_t \vec{A}' - \vec{\nabla}\Phi' = -\partial_t \vec{A}' = \mathrm{i}\omega_k \vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) \stackrel{(11.7)}{=} \mathrm{i}ck\vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) \\
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = -\vec{A}_0 \times \vec{\nabla} \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) \\
&= -\mathrm{i}\vec{A}_0 \times \vec{k} \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) \\
&= +\mathrm{i}\vec{k} \times \vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) \\
&= \frac{\vec{k}}{ck} \times \vec{E}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Für die physikalischen Felder folgt daraus

$$\vec{E}_{\text{phys}} = \operatorname{Re} \vec{E} = -\omega_k \operatorname{Im}[\vec{A}_0 \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t)]. \tag{24}$$

Mit

$$\exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathrm{i}\omega_k t) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t) + \mathrm{i}\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t) \tag{25}$$

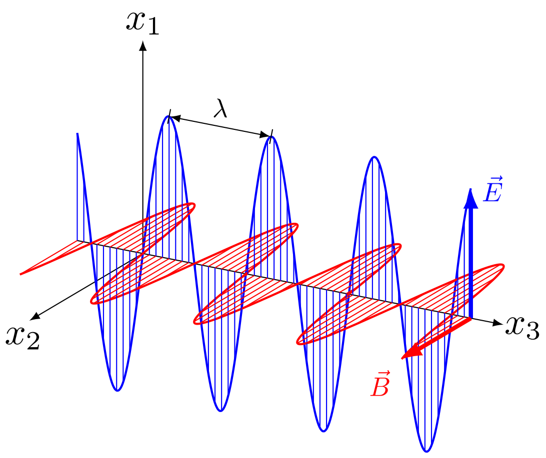
folgt

$$\vec{E}_{\text{phys}} = -\omega_k [\operatorname{Re} \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t) + \operatorname{Im} \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)]. \tag{26}$$

Für das Magnetfeld folgt daraus sofort gemäß (23)

$$\vec{B}_{\text{phys}} = \frac{\vec{k}}{ck} \times \vec{E}_{\text{phys}}, \tag{27}$$

d.h. $\vec{E}_{\text{phys}}$, $\vec{B}_{\text{phys}}$ und $\vec{k}$ bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges orthogonales System von Vektoren. Dies lässt sich wie folgt veranschaulichen:



Dabei ist die Wellenlänge λ die räumliche Periode der Wellen (26), d.h. $k\lambda = 2\pi$ oder $\lambda = 2\pi/k$. Als Funktion der Zeit schwingen die Felder an jedem festgehaltenen Ort harmonisch hin und her. Es ergibt sich eine Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Denn die Flächen gleicher Phasen in Ausbreitungsrichtung $\vec{n} = \vec{k}/k$ ergeben sich aus $\omega t - kx = \text{const}$ oder für $x/t = \omega/k = ck/k = c$ in Übereinstimmung mit dem Ergebnis im Skript (Abschnitt 2.6).

Aufgabe 2: Eichtransformation von Lorenz- zu Coulomb-Eichung

In der Vorlesung haben wir als spezielle Eichbedingungen an die elektromagnetischen Potentiale die Lorenz-Eichung

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \Phi_{\mathrm{L}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\mathrm{L}} = 0 \tag{28}$$

und die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\mathrm{C}} = 0 \tag{29}$$

kennengelernt.

(a) Finden Sie eine partielle Differentialgleichung für das skalare Eichfeld χ, mit dem die beiden Eichungen via

$$\Phi_{\mathrm{C}} = \Phi_{\mathrm{L}} + \frac{1}{c^2}\partial_t \chi, \quad \vec{A}_{\mathrm{C}} = \vec{A}_{\mathrm{L}} - \vec{\nabla}\chi \tag{30}$$

ineinander umgerechnet werden können.

Lösung: Wie wir aus dem Skript (Abschnitt 2.11) wissen, bedeutet (30), dass dann die Potentiale in der Lorenz- und in der Coulomb-Eichung die gleichen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ergeben. Das kann man auch leicht direkt aus (1) und (2) nachrechnen, denn es ist demnach

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\mathrm{C}} &= -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{C}} - \partial_t \vec{A}_{\mathrm{C}} = -\vec{\nabla}(\Phi_{\mathrm{L}} + \partial_t \chi) - \partial_t(\vec{A}_{\mathrm{L}} - \vec{\nabla}\chi) = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{L}} - \partial_t \vec{A}_{\mathrm{L}} = \vec{E}_{\mathrm{L}} = \vec{E}, \\ \vec{B}_{\mathrm{C}} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\mathrm{C}} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_{\mathrm{L}} - \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\mathrm{L}} = \vec{B}_{\mathrm{L}} = \vec{B}. \end{aligned} \tag{31}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0$ für alle Skalarfelder χ ist.

Die Coulomb-Eichbedingung (29) ergibt nun mit (30)

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\mathrm{C}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\mathrm{L}} - \Delta\chi \Rightarrow \Delta\chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\mathrm{L}} \tag{32}$$

Mit der Lorenz-Eichbedingung (28) können wir also die DGL in der Form

$$\Delta\chi = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{c^2}\partial_t\Phi_{\mathrm{L}} \tag{33}$$

schreiben.

(b) Verwenden Sie die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{34}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} = \mu_0\vec{j}, \tag{35}$$

um Feldgleichungen für die Potentiale in Coulomb-Eichung Φ_{C} und $\vec{A}_{\mathrm{C}}$ herzuleiten.

Lösung: Setzen wir (1) für die Potentiale in Coulomb-Eichung in (34) ein, folgt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{C}} - \partial_t\vec{A}_{\mathrm{C}}) = -\Delta\Phi_{\mathrm{C}} - \vec{\nabla}\cdot\partial_t\vec{A}_{\mathrm{C}} = -\Delta\Phi_{\mathrm{C}} - \partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\mathrm{C}} = -\Delta\Phi_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho. \tag{36}$$

Dabei haben wir die Coulomb-Eichbedingung (29) verwendet. Das Skalarpotential erfüllt also in der Coulomb-Eichung dieselbe Poisson-Gleichung wie das Potential in der Elektrostatik. Allerdings hängt nun ρ i.a. auch von t ab.

Setzen wir weiter (2) mit den Potentialen in Coulomb-Eichung in (35) ein, folgt

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}_{\mathrm{C}}) + \frac{1}{c^2}\partial_t(\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{C}} + \partial_t\vec{A}) = \mu_0\vec{j}. \tag{37}$$

Nun gilt

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}_{\mathrm{C}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\mathrm{C}}) - \Delta\vec{A}_{\mathrm{C}} = -\Delta\vec{A}_{\mathrm{C}}. \tag{38}$$

Dabei haben wir die allgemeine Formel (C.3.18) im Skript und im letzten Schritt die Coulomb-Eichbedingung (29) verwendet. Setzen wir dies in (37) ein, folgt mit einigen einfachen Umformungen

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} - \Delta\vec{A}_{\mathrm{C}} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{C}} = \mu_0\vec{j}. \tag{39}$$

Es gelten also schließlich gemäß (36) und (39) die Gleichungen

$$\Box\vec{A}_{\mathrm{C}} = \mu_0\vec{j} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{C}}, \tag{40}$$

$$-\Delta\Phi_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho. \tag{41}$$

(c) Zeigen Sie, dass die gefundenen Feldgleichungen mit der Coulomb-Eichbedingung (29) kompatibel sind.

Lösung: Um zu zeigen, dass die Coulomb-Eichbedingung (29) mit (40) konsistent ist, bilden wir die Divergenz dieser Gleichung, denn wegen (29) gilt

$$\vec{\nabla}\cdot\Box\vec{A}_{\mathrm{C}} = \Box(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{\mathrm{C}}) = 0. \tag{42}$$

Damit also (40) eine konsistente Gleichung ist, muss auch die Divergenz der rechten Seite verschwinden. In der Tat ist wegen (41) und wegen $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} - \frac{1}{c^2} \partial_t \Delta \Phi_C = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \partial_t \rho = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho), \tag{43}$$

und dies verschwindet wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \tag{44}$$

also der lokale Form des Erhaltungssatzes für die elektrische Ladung.

Bemerkung: Es ist wichtig in Erinnerung zu behalten, dass die Maxwell-Gleichungen bereits diese Erhaltungsgleichung für die elektrische Ladung erfordern, damit sich kein Widerspruch ergibt, die Gleichungen also überhaupt lösbar sind. Führt man nun die Potentiale Φ und $\vec{A}$ ein, muss wegen der Uneindeutigkeit der Potentiale für eine gegebene physikalische Situation, also für gegebene messbare Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ und $\vec{j}$ eine Eichtransformation zu neuen Potentialen

$$\Phi' = \Phi + \partial_t \chi, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi \tag{45}$$

für jedes *beliebige* Skalarfeld χ dieselbe physikalische Situation beschreiben. Diese Forderung ist ebenfalls nur dann mit den inhomgenen Maxwell-Gleichungen (34) und (35) kompatibel, wenn die Kontinuitätsgleichung, also Ladungserhaltung gilt. Man nennt eine solche Feldtheorie eine **Eichfeldtheorie**.

Aufgabe 3 [10 Punkte]: Review zur Vektoranalysis

Fassen Sie kurz die grundlegende Mathematik der Vektoranalysis zusammen.

- die Operationen grad, div, rot und der Operator $\vec{\nabla}$
- Weg-, Flächen- und Volumenintegrale
- Koordinatenunabhängige Definitionen von div und rot mittels Flächen- bzw. Wegintegralen
- Gaußscher und Stokesscher Integralsatz
- Erläutern Sie die Bedeutung der Divergenz am Beispiel der Stromdichte der elektrischen Ladung $\vec{j}$ und der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, wobei ρ die Dichte der elektrischen Ladung ist.
- Existenz eines skalaren Potentials für wirbelfreie Vektorfelder
- Existenz eines Vektorpotentials für quellenfreie Vektorfelder; Eichinvarianz
- Helmholtzscher Zerlegungssatz (Fundamentalsatz der Vektoranalysis)

Das Skript und Lehrbücher dürfen selbstverständlich verwendet werden!

Lösung: Im Folgenden seien $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein skalares und $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dabei ist $D \subseteq \mathbb{R}^3$ der Definitionsbereich. Wir setzen voraus, dass die Felder hinreichend oft stetig partiell differenzierbar sind; $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ sind die Komponenten des Ortsvektors bzgl. einer beliebigen rechthändigen kartesischen Basis.

Dann ist der Gradient eines Skalarfeldes durch

$$\operatorname{grad}\Phi(\underline{x}) = \underline{\nabla}\Phi(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \Phi(\underline{x}) \tag{46}$$

gegeben. Im Ricci-Index-Kalkül für kartesische Komponenten sind die Komponenten des Gradienten $\partial_j \Phi$ ($j \in \{1,2,3\}$). Hierbei bedeutet $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.
Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes sind durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{V}(\underline{x}) &= \underline{\nabla} \cdot \underline{V}(\underline{x}) = \partial_1 V_1(\underline{x}) + \partial_2 V_2(\underline{x}) + \partial_3 V_3(\underline{x}) = \partial_j V_j(\underline{x}), \\ \operatorname{rot} \underline{V}(\underline{x}) &= \underline{\nabla} \times \underline{V}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 V_3(\underline{x}) - \partial_3 V_2(\underline{x}) \\ \partial_3 V_1(\underline{x}) - \partial_1 V_3(\underline{x}) \\ \partial_1 V_2(\underline{x}) - \partial_2 V_1(\underline{x}) \end{pmatrix} \\ [\operatorname{rot} \underline{V}(\underline{x})]_j &= \epsilon_{jkl} \partial_k V_l(\underline{x}) \end{aligned} \tag{47}$$

gegeben. Dabei gilt im Ricci-Kalkül die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über in einem Ausdruck doppelt vorkommende Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert.
Das **Wegintegral** eines Vektorfeldes entlang eines Weges $C : \vec{x} = \vec{x}(\lambda)$ mit $\lambda \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist durch

$$\int_C \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \int_a^b \mathrm{d}\lambda\, \dot{\vec{x}}(\lambda) \cdot \vec{V}[\vec{x}(\lambda)] \tag{48}$$

definiert.
Das **Flächenintegral** eines Vektorfeldes über eine (offene oder geschlossene) Fläche $F : \vec{x} = \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, ist durch

$$\int_F \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{V}(\vec{x}) = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}\lambda_1 \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}\lambda_2 \left(\frac{\partial \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \right) \cdot \vec{V}[\vec{x}(\lambda_1, \lambda_2)] \tag{49}$$

definiert. Dabei ist $\mathrm{d}^2\vec{f}$ der Flächennormalenvektor. In den Anwendungen ist auf die Orientierung dieses Vektors zu achten. Ggf. kann man die Orientierung durch Vertauschen der Parameter λ_1 und λ_2 ändern, was das Integral um einen Faktor (-1) ändert.
Das **Volumenintegral** eines Skalarfeldes über ein Volumen $V : \vec{x} = \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist durch

$$\begin{aligned} \int_V \mathrm{d}^3 x \Phi(\vec{x}) = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}\lambda_1 \int_{a_2}^{b_2} \mathrm{d}\lambda_2 \int_{a_3}^{b_3} \mathrm{d}\lambda_3 & \left(\frac{\partial \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_2} \right) \cdot \frac{\partial \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} \\ & \Phi[\vec{x}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)] \end{aligned} \tag{50}$$

definiert. Auch hier ist ggf. auf die Orientierung des Volumens (relativ zum rechtshändigen kartesischen Basissystems) zu achten. Ggf. kann man die Reihenfolge der Parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ändern, um das für die Anwendung gewünschte Vorzeichen zu erhalten. Meist benötigt man positiv orientierte Volumen, d.h. man wählt die Reihenfolge der Parameter so, dass das unter dem Integral auftretende Spatprodukt positiv ist.
Aufgrund der geometrischen Bedeutung von Punkt- und Kreuzprodukt sind die Integrale unabhängig von der Parametrisierung.

Die **Divergenz eines Vektorfeldes** kann als Limes über ein Flächenintegral definiert werden. Sei dazu ΔV ein kleines Volumen, das den Punkt $\vec{x}$ im Inneren enthält und $\partial\Delta V$ der Rand von ΔV. Die Normalenvektoren der Fläche sind dabei definitionsgemäß so gerichtet, dass sie aus dem Volumen herauszeigen. Dann ist

$$\operatorname{div}\vec{V}(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \to \{\vec{x}\}} \int_{\partial\Delta V} \mathrm{d}^2\vec{f}' \cdot \vec{V}(\vec{x}'). \tag{51}$$

Die **Rotation eines Vektorfeldes** kann als Limes von Flächenintegralen koordinatenunabhängig definiert werden. Sei dazu ΔF eine kleine ebene Fläche mit $\vec{x}$ im Inneren und einem beliebig orientierten Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ und ∂F der Rand dieser Fläche. Dabei wird die Randkurve gemäß der Rechtehandregel relativ zum Normalenvektor $\vec{n}$ orientiert, d.h. streckt man den Daumen der rechten Hand in Richtung von $\vec{n}$, zeigen die Finger den Umlaufsinn der geschlossenen Randkurve an. Dann ist

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot}\vec{V} = \lim_{\Delta F \to \{\vec{x}\}} \int_{\partial\Delta F} \mathrm{d}^2\vec{f}' \cdot \vec{V}(\vec{x}'). \tag{52}$$

Setzt man hierin $\vec{n}$ der Reihe nach gleich $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, erhält man die kartesischen Komponenten von $\operatorname{rot}\vec{V}$ und damit auch das entsprechende Vektorfeld.
Aus diesen koordinatenunabhängigen Definitionen folgen die beiden Integralsätze. Der **Gaußsche Integralsatz** besagt, dass

$$\int_V \mathrm{d}^3x \operatorname{div}\vec{V} = \int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \vec{V}. \tag{53}$$

Dabei sind die Flächennormalenvektoren $\mathrm{d}^2\vec{f}$ entlang von ∂V so zu richten, dass sie aus V herausweisen.
Der Stokessche Integralsatz besagt, dass

$$\int_F \mathrm{d}^2\vec{f} \cdot \operatorname{rot}\vec{V} = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{V}, \tag{54}$$

wobei der Umlaufsinn der Randkurve ∂F gemäß der Rechtehandregel relativ zu den Flaächennormalenvektoren $\mathrm{d}^2\vec{f}$ der Fläche F definiert ist.
Wenn

$$\operatorname{rot}\vec{V} = 0 \tag{55}$$

ist, d.h. $\vec{V}$ wirbelfrei ist, so existiert zumindest in jedem einfach wegzusammenhängenden Gebiet ein **skalares Potential** Φ für dieses Vektorfeld, d.h.

$$\vec{V} = -\operatorname{grad}\Phi. \tag{56}$$

In diesem Fall hängen Wegintegrale über beliebige Wege (im Inneren des einfach wegzusammenhängenden Gebiets) nur von Anfangs- und Endpunkt und nicht vom spezifischen Weg ab. Integrale über geschlossene Wege, die Randkurven von ganz im einfach wegzusammenhängenden Gebiet gelegenen Flächen sind, verschwinden.
Wenn

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \tag{57}$$

gilt, d.h. wenn $\vec{V}$ quellenfrei ist, existiert (zumindest lokal) ein**Vektorpotential** $\vec{A}$ für $\vec{V}$, so dass

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{58}$$

Dabei ist das Vektorpotential nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt, d.h. für ein beliebiges Skalarfeld χ ist auch $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi$ ein Vektorpotential für $\vec{V}$ („Eichinvarianz").

Helmholtzscher Zerlegungssatz: Sei $\vec{V}$ ein Vektorfeld mit

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = Q, \quad \vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{W}, \tag{59}$$

mit einem Skalarfeld Q („Quellen") und Vektorfeld $\vec{W}$ („Wirbel"), für das $\vec{\nabla}\cdot\vec{W} = 0$ gilt, und geht $\vec{V}$ im Unendlichen hinreichend schnell gegen 0, kann man stets ein skalares Potential V und ein Vektorpotential $\vec{A}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ finden, so dass

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{60}$$

ist. Offenbar muss dazu gelten

$$-\Delta\Phi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = Q, \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\delta\vec{A} = \vec{W}. \tag{61}$$

Mit der aus der Elektrostatik bekannten Green-Funktion folgt, dass

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \frac{Q(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad \vec{A}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \frac{\vec{W}(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{62}$$

diese Gleichungen löst und damit (60) gilt.

Insbesondere erfüllt $\vec{A}$ tagsächlich die „Coulomb-Eichbedingung" $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, denn es ist

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \vec{W}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \vec{W}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{63}$$

Wegen $\vec{\nabla}'\vec{W}'$ können wir dafür auch

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \, \vec{\nabla}'\cdot\left[\vec{W}(\vec{x}')\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]. \tag{64}$$

Das Volumenintegral über die Divergenz können wir uns nun mit dem Gaußschen Integralsatz als Flächenintegral über eine im Unendlichen gelegene Fläche denken. Da wir annehmen, dass $\vec{W}$ im Unendlichen hinreichend schnell gegen 0 strebt, verschwindet dieses Flächenintegral, und daher ist tatsächlich $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$.