H. van Hees Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 11 Lösungen

Aufgabe 1 (10 Punkte): Kanonische Transformationen und Poisson-Klammern
Es sei durch

$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p) \tag{1}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen Phasenraumvariablen $(Q,P) = (Q_1,\ldots,Q_f,P_1,\ldots,P_f)$ und $(q,p) = (q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots p_f)$ gegeben. Die Poisson-Klammern für beliebige Phasenraumfunktionen f und g bzgl. dieser Phasenraumkoordinaten seien wie üblich definiert:

$$\{f,g\}^{(q,p)} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{2}$$

bzw.

$$\{f,g\}^{(Q,P)} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q} \tag{3}$$

Die Transformation ist definitionsgemäß genau dann kanonisch, wenn $\{f,g\}^{(Q,P)} = \{f,g\}^{(q,p)}$ gilt.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\{f,g\}^{(q,p)} = \{f,g\}^{(Q,P)}\{Q,P\}^{(q,p)} \tag{4}$$

gilt, d.h. dass die Transformation genau dann kanonisch ist, wenn $\{Q,P\}^{(q,p)} = 1$ gilt.

Lösung: Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}.\end{aligned} \tag{5}$$

Da die beiden roten Terme symmetrisch unter Vertauschung von f und g sind, heben sich die entsprechenden Terme in der Poisson-Klammer weg, und die beiden anderen liefern bei der „Antisymmetrisierung"

$$\begin{aligned}\{f,g\}^{(q,p)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial f}{\partial P}\right)\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial g}{\partial Q}\frac{\partial f}{\partial P}\right)\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\\ &= \{f,g\}^{(Q,P)}\{Q,P\}^{(q,p)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Die Poisson-Klammer bleibt also in der Tat forminvariant under der Transformation (1) genau dann, wenn $\{Q,P\}^{(q,p)} = 1$ ist, d.h. wenn diese Poisson-Klammerbeziehung erfüllt ist, ist diese Transformation eine kanonische Transformation.

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P = q^\alpha \sin(\beta p) \tag{7}$$

eine kanonische Transformation ist.

Lösung: Wir wenden dieses Kriterium für eine kanonische Transformation auf (7) an:

$$\begin{aligned}\{Q,P\}^{(q,p)} &= \frac{\partial Q}{q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{p}\frac{\partial P}{\partial q} \\ &= \alpha q^{\alpha-1}\cos(\beta p) q^{\alpha}\beta\cos(\beta p) - [-q^{\alpha}\beta\sin(\beta p)]\alpha q^{\alpha-1}\sin(\beta p) \\ &= \alpha\beta q^{2\alpha-1}[\cos^2(\beta p)+\sin^2(\beta p)] \\ &= \alpha\beta q^{2\alpha-1} \stackrel{!}{=} 1.\end{aligned} \tag{8}$$

Es muss also $2\alpha - 1 = 0$, d.h. $\alpha = 1/2$ und $\alpha\beta = 1$ d.h. $\beta = 1/\alpha = 2$ sein, damit die Transformation (7) kanonisch ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Dynamische Symmetrie beim isotropen harmonischen Oszillator
Die Hamiltonfunktion des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators lautet

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{q}^2. \tag{9}$$

(a) (3 Punkte) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{q}$ und $\vec{p}$ her.

Lösung: Mit den kanonischen Hamiltonschen Gleichungen bzw. mit den äquivalenten Poisson-Klammern erhalten wir

$$\dot{\vec{q}} = \{\vec{q},H\}_{\text{pb}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \dot{\vec{p}} = \{\vec{p},H\}_{\text{pb}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -m\omega^2\vec{q}. \tag{10}$$

Ableiten der ersten Gleichung nach der Zeit liefert dann mit der zweiten Gleichung die Bewegungsgleichung für den isotropen harmonischen Oszillator:

$$\ddot{\vec{q}} = -\omega^2\vec{q}. \tag{11}$$

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Komponenten des Tensors

$$T_{jk} = p_j p_k + (m\omega)^2 q_j q_k \tag{12}$$

Erhaltungsgrößen sind.

Lösung: Mit den beiden kanonischen Bewegungsgleichungen (10) folgt

$$\dot{T}_{jk} = \dot{p}_j p_k + p_j\dot{p}_k + (m\omega)^2(\dot{q}_j q_k + q_j\dot{q}_k) = -m\omega^2(q_j p_k + p_j q_k) + m\omega^2(p_j q_k + q_j p_k) = 0. \tag{13}$$

Alle Komponenten des Tensors (12) sind also Erhaltungsgrößen.

Bemerkung: Von den 6 unabhängigen Komponenten dieses Tensors sind nur 5 nichttriviale Erhaltungsgrößen, da die Spur des Tensors

$$T_{jj} = \vec{p}^2 + m^2\omega^2\vec{q}^2 = 2mH \tag{14}$$

ist, und die Hamilton-Funktion H ist eine Erhaltungsgröße, wenn sie nicht explizit zeitabhängig ist, denn dann gilt $\dot{H} = \{H,H\}_{\text{pb}} = 0$.

Die übrigen 5 unabhängigen Komponenten, des entsprechenden „spurfreien Tensors“

$$\tilde{T}_{jk} = T_{jk} - \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{jk}. \tag{15}$$

Zusammen mit den drei Drehimpulskomponenten, die wegen der Isotropie des Oszillators, also der Drehinvarianz der Hamilton-Funktion ebenfalls Erhaltungsgrößen sind, bilden sie 8 Generatoren einer Symmetriegruppe.

Man kann zeigen, dass dies die Gruppe SU(3) ist, die spezielle unitäre Gruppe des $\mathbb{C}^3$. Diese ist durch die Matrizen $\hat{U} \in \mathbb{C}^3$, für die $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ und $\det U = 1$ gilt. Dabei ist $\hat{U}^\dagger$ die transponierte und konjugiert komplexe Matrix $\hat{U}^{\mathrm{T}*}$.

Die entsprechende Symmetrie des Hamiltonoperators wird klar, wenn man die komplexen Vektoren $\vec{a} = m\omega\vec{q} + \mathrm{i}\vec{p}$ einführt, denn dann ist $H = \vec{a}^* \cdot \vec{a}/(2m)$, und dies ist invariant unter SU(3)-Transformationen: $\vec{a}' = \hat{U}\vec{a}$, denn es ist

$$\vec{a}'^* \cdot \vec{a}' = \vec{a}'^{\mathrm{T}*} \vec{a}' = \vec{a}'^\dagger \vec{a}' = (\hat{U}\vec{a})^\dagger \hat{U}\vec{a} = \vec{a}^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{U}\vec{a} = \vec{a}^\dagger \vec{a} = \vec{a}^* \cdot \vec{a}. \tag{16}$$