H. van Hees Wintersemester 2024/2025

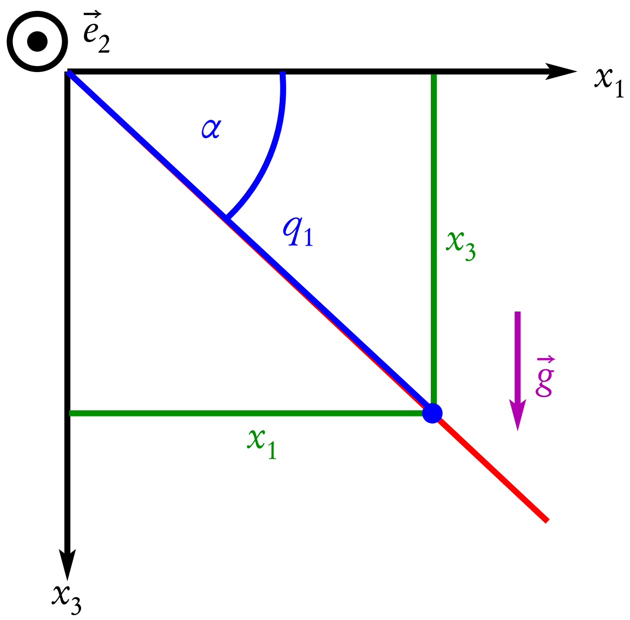
Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 8

Aufgabe 1: Schiefe Ebene

Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse m, das sich auf der Ebene (s. Skizze)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \cos\alpha \\ q_2 \\ q_1 \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Die konstant angenommene Schwerebeschleunigung weise in positive x_3-Richtung: $\underline{g} = (0, 0, g)^{\mathrm{T}}$.



Stellen Sie mit Hilfe der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten (q_1, q_2) auf und lösen sie diese. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = m\underline{\dot{x}}^2/2$ als Funktion von (q_1, q_2) und $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$.

Lösung: Es gilt

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \cos\alpha \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \sin\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}}^2 = \dot{q}_1^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \dot{q}_2^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2. \tag{2}$$

Die kinetische Energie lautet also

$$T = \frac{m}{2}\underline{\dot{x}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2). \tag{3}$$

Bemerkung: Dieses Ergebnis hätte man auch ohne Rechnung raten können, denn offenbar sind (q_1, q_2) kartesische Koordinaten der Ebene!

(b) Berechnen Sie das Potential V der Kraft $\underline{F} = m\underline{g}$ als Funktion der (q_1, q_2).

Lösung: Der Zusammenhang zwischen Kraft und Potential ist definitionsgemäß

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} V = -\begin{pmatrix} \partial V/\partial x_1 \\ \partial V/\partial x_2 \\ \partial V/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Durch Integration erhalten wir sofort (bis auf eine unwichtige additive Konstante)

$$V = -mgx_3 = -mgq_1 \sin\alpha. \tag{5}$$

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{6}$$

mit $L = T - V$ auf.

Lösung: Mit (3) und (5) folgt

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + mgq_1 \sin\alpha. \tag{7}$$

Die benötigten partiellen Ableitungen sind

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = mg\sin\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0. \tag{8}$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen durch

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= m\ddot{q}_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = mg\sin\alpha, \\ \dot{p}_2 &= m\ddot{q}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für eine beliebige Anfangsbedingung $q_k(0) = q_{0k}$, $\dot{q}_k(0) = \dot{q}_{0k}$.

Lösung: Wir müssen nur die beiden Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen zweimal bzgl. der Zeit integrieren, da die Kraft offenbar konstant ist:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{g}{2}\sin\alpha t^2 + \dot{q}_{10}t + q_{10}, \\ q_2(t) &= \dot{q}_{20}t + q_{20}. \end{aligned} \tag{10}$$

Bemerkung: Physikalisch ist auch dieses Resultat sofort verständlich. Die Restriktion des Massenpunktes auf die Ebene bewirkt, dass die Komponente der Schwerkraft senkrecht zur Ebene durch die entsprechende Kraft der Ebene auf den Massenpunkt (die Normalkraft) aufgehoben wird. Es bleibt also nur die Komponente der Schwerkraft entlang der q_1-Richtung übrig (Hangabtriebskraft), und diese Komponente ist $F_{\mathrm{H}} = mg\sin\alpha$. Da $x_2 = q_2$ sich auf die x_2-Achse des Koordinatensystems beziegt, die senkrecht auf der in x_3-Richtung wirkenden Schwerkraft steht, wirkt entlang dieser Richtung keine Kraft. Daher ist der entsprechende generalisierte Impuls $p_2 = \partial L/\partial \dot{q}_2 = m\dot{q}_2 =$ const, weil die Lagrange-Funktion nicht von q_2 abhängt. Durch die geeignete Wahl der generalisierten Koordinaten lassen sich also die Bewegungsgleichungen bereits erheblich vereinfachen: Es sind stets solche generalisierten Koordinaten zu bevorzugen, die aufgrund der Geometrie (bzw. einer entsprechenden Symmetrie) des Problems dann nicht in der Lagrange-Funktion vorkommen.

bitte wenden!

Aufgabe 2: Kugelpendel

Wir verwenden das kartesische Koordinatensystem der vorigen Aufgabe weiter. Ein Punktteilchen der Masse m sei an einem im Ursprung befestigten masselosen Faden der Länge R befestigt. Es ist klar, dass sich das Teilchen dadurch nur auf einer Kugelschale mit Radius R bewegen kann, sodass sich Kugelkoordinaten zur Parametrisierung des Ortsvektors am besten eignen:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Gesucht sind die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten (ϑ, φ). Gehen Sie dazu wieder wie folgt vor

(a) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = m\dot{\underline{x}}^2/2$ als Funktion von (ϑ, φ) und $(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$.

Lösung: Es ist

$$\dot{\underline{x}} = R \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ \dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{x}}^2 = R^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta). \tag{12}$$

Die kinetische Energie ist also

$$T = \frac{mR^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta). \tag{13}$$

(b) Berechnen Sie das Potential der Schwerkraft $\underline{F} = m\underline{g}$ als Funktion von (ϑ, φ). **Hinweis:** Sie können teilweise das entsprechende Resultat der vorigen Aufgabe wiederverwenden.

Lösung: Unter Verwendung des Potentials aus der vorigen Aufgabe (5) folgt

$$V = -mgx_3 = -mgR\cos\vartheta. \tag{14}$$

(c) Stellen Sie durch Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichungen (6) (mit $q_1 = \vartheta$ und $q_2 = \varphi$) die Bewegungsgleichungen für ϑ und φ auf.

Lösung: Es ist

$$L = T - V = \frac{mR^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) + mgR\cos\vartheta \tag{15}$$

und die kanonischen Impulse daher

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = mR^2\dot{\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}\sin\vartheta. \tag{16}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$\begin{aligned} \dot{p}_\vartheta = mR^2\ddot{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} &= mR^2\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - mgR\sin\vartheta, \\ \dot{p}_\varphi = mR^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\varphi}\sin^2\vartheta) = mR^2(\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta) &= \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

(d) Was fällt Ihnen im Zusammenhang mit der Variablen φ auf?

Lösung: Der zweiten Bewegungsgleichung (17) ist der generalisierte Impuls p_φ erhalten, weil L nicht von der dazugehörigen generalisierten Koordinate φ abhängt. In diesem Fall ist das die Folge der Symmetrie des Problems unter Rotationen um die x_3-Achse, also Änderungen von φ.