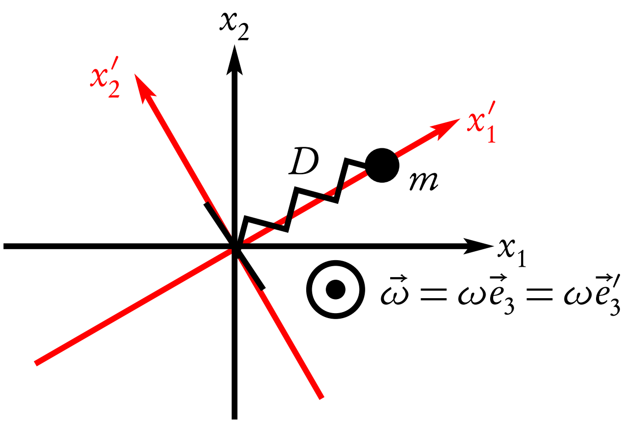
H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 1: Perle auf rotierendem Stab

Eine Perle der Masse m sei auf einem Stab befestigt, auf dem sie reibungsfrei gleiten kann, sowie an einer Feder mit der Federkonstanten D und der Länge L (wenn sie entspannt ist) befestigt. Der Stab rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die $\vec{e}_3$-Achse eines kartesischen Koordinatensystems.



Wir nehmen im folgenden an, dass am Stabende bei $x_1' = 0$ die Perle festgehalten wird, d.h. es kann nicht $x_1' < 0$ sein.

(a) Welche Kräfte wirken auf dem Stab aus Sicht eines mitrotierenden Beobachters? Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Perle im rotierenden Bezugssystem? Das rotierende Bezugssystem sei so gewählt, dass der Stab die $\vec{e}_1'$-Richtung bestimmt.

Lösung: Vom rotierenden Bezugssystem aus betrachtet wirken auf die Perle die Trägheitskräfte (Coriolis- und Zentrifugalkraft), die Federkraft $\underline{F}'_{\text{Feder}} = -D(x_1' - L)(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ und die Zwangskraft $\vec{F}_{\text{Z}}$, die die Perle auf dem Stab hält und offenbar in Richtung von $\vec{e}_2'$ gerichtet sein muss, d.h. es ist $\underline{F}'_{\text{Z}} = (0, Z', 0)^{\mathrm{T}}$ mit noch zu bestimmender Komponente Z'. Die Komponenten der Coriolis-Kraft im rotierenden Bezugsssystem sind

$$\underline{F}'_{\text{Cor}} = -2m\underline{\omega}' \times \underline{\dot{x}}' = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\omega \dot{x}_1' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und die Zentrifugalkraft ist

$$\underline{F}'_{\text{Zf}} = -m\underline{\omega}' \times (\underline{\omega}' \times \underline{x}') = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = +m\omega^2 \begin{pmatrix} x_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung gemäß Gl. (2.9.35) im Skript

$$m\underline{\ddot{x}}' = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{F}'_{\text{Cor}} + \underline{F}'_{\text{Zf}} + \underline{F}'_{\text{Feder}} + \underline{F}'_{\text{Z}} = \begin{pmatrix} m\omega^2 x_1' - D(x_1' - L) \\ Z' - 2m\omega \dot{x}_1' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Für die $1'$-Komponente gilt also die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_1' = m\omega^2 x_1' - D(x_1' - L) = (m\omega^2 - D)x_1' + DL. \tag{4}$$

(b) Welchen Wert D_{min} muss die Federkonstante D mindestens besitzen, damit es eine stabile Ruhelage für die Perle gibt, also $x_1'(t) = x_{10}'$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist?

Lösung: Damit $x_1' = x_{10}' = \text{const}$ eine Lösung sein kann, muss offenbar $m\omega^2 - D < 0$, also $D > m\omega^2$ sein. Es ist also $D_{\text{min}} = m\omega^2$.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für beliebige Werte der Federkonstanten D und die Anfangsbedingungen $x_1'(0) = x_{10}' > 0$ und $\dot{x}_1'(0) = 0$.

Hinweis: Es ist sinnvoll, eine Fallunterscheidung $D < D_{\text{min}}$ und $D > D_{\text{min}}$ vorzunehmen.

Lösung: Für $D < \mathrm{D}_{\text{min}}$ setzen wir $m\omega^2 - D = m\Omega^2 > 0$. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_1' - \Omega^2 x_1' = \frac{D}{m} L. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist durch die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Letztere ist offenbar durch $x_1' = -DL/(m\Omega^2)$ gegeben. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x}_{1\text{hom}}' - \Omega^2 x_{1\text{hom}}' = 0 \tag{6}$$

ist

$$x_{1\,\text{hom}}'(t) = A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t). \tag{7}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$x_1'(t) = A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t) - \frac{DL}{m\Omega^2}. \tag{8}$$

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen liefert schließlich

$$x_1'(t) = \left(x_{10}' + \frac{DL}{m\Omega^2}\right)\cosh(\Omega t) - \frac{DL}{m\Omega^2}. \tag{9}$$

Die Perle fliegt also stets unbegrenzt nach außen.

Für $D > D_{\text{min}}$ setzen wir $\Omega^2 = (D - m\omega^2)/m > 0$. Dann ist die Gleichgewichtslage offenbar $x_{1\text{hom}}' = +DL/(m\Omega^2)$, und die allgemeine Lösung ergibt sich analog wie bei der Herleitung von (9) zu

$$x_1'(t) = \left(x_{10}' - \frac{DL}{m\Omega^2}\right)\cos(\Omega t) + \frac{DL}{m\Omega^2}. \tag{10}$$

Für den Spezialfall $D = D_{\text{min}}$ kompensiert offenbar die Federkraft die Zentrifugalkraft, und gemäß (4) wirkt dann die konstante Kraft $F_1' = DL$ auf die Perle, d.h. auch dann bewegt sie sich unbegrenzt nach außen gemäß der entsprechenden Lösung

$$x_1'(t) = \frac{DL}{2m} t^2 + x_{10}'. \tag{11}$$

(d) Berechnen Sie die Zwangskraft, die die Perle auf dem Stab festhält.

Lösung: Aus (3) ergibt sich für die Zwangskraft, die der Stab auf die Perle ausübt

$$\underline{F}_Z' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2m\omega \dot{x}_1' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Nach dem 3. Newtonschen Axiom wirkt also auf den Stange die Kraft $-\underline{F}_Z = F_{\text{Cor}}$. Der Stab muss also in jedem Moment die Coriolis-Kraft kompensieren.

Für den Fall, dass $D \leq D_{\text{min}}$ ist, wächst die Geschwindigkeit unbegrenzt an, d.h. irgendwann wird der Stab brechen (bzw. die Feder zerreißen).