H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte): Getriebener ungedämpfter Oszillator

Betrachten Sie einen ungedämpften harmonischen Oszillator, der mit einer harmonischen Kraft der Kreisfrequenz Ω angetrieben wird. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + mA\cos(\Omega t). \tag{1}$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz $x = \operatorname{Re} z$ für eine komplexe Funktion $z(t)$ die Bewegungsgleichung äquivalent zur Gleichung

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A\exp(-\mathrm{i}\Omega t) \tag{2}$$

ist.

Lösung: Da ω_0, A und Ω reell sind, ergibt sich aus (2) und $\operatorname{Re}\exp(-\mathrm{i}\Omega t) = \cos(\Omega t)$ sofort, dass jede Funktion z, die (2) erfüllt, $x = \operatorname{Re} z$ (1) löst.

(b) (2 Punkte) Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung für die homogene Gleichung

$$\ddot{z}_{\text{hom}} + \omega_0^2 z_{\text{hom}} = 0 \tag{3}$$

an.

Lösung: Die allgemeine Lösung der DGL (3) ist durch die allgemeine Superposition zweier beliebiger linear unabhängier Lösungen gegeben:

$$z_{\text{hom}}(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t). \tag{4}$$

Da $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$ beide (3) lösen und offenbar linear unabhängig voneinander sind, ist dies die allgemeine Lösung der homogenen DGL (3).

(c) (2 Punkte) Finden Sie nun eine spezielle Lösung für die inhomogene Gleichung für $\Omega \neq \omega_0$. Geben Sie insbesondere auch die reelle physikalische Lösung $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ an.

Lösung: Wie bei der in dem Vorlesung behandelten Fall eines gedämpften Oszillators erscheint hier der Ansatz

$$z = AB\exp(-\mathrm{i}\Omega t) \Rightarrow \dot{z} = -AB\mathrm{i}\Omega\exp(-\mathrm{i}\Omega t), \quad \ddot{z} = -AB\Omega^2\exp(-\mathrm{i}\Omega t) \tag{5}$$

aussichtsreich. Setzen wir dies nämlich in (2) ein und kürzen mit dem allen Termen gemeinsamen Faktor $A\exp(-\mathrm{i}\Omega t)$ ergibt sich

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{6}$$

Hierbei muss natürlich $\Omega \neq \omega_0$ sein. Für diesen Fall ist also eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}\exp(-\mathrm{i}\Omega t), \tag{7}$$

und es ist

$$x_{\text{inh}}(t) = \operatorname{Re} z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \tag{8}$$

eine spezielle Lösung der Bewegungsgleichung (1). Deren allgemeine Lösung ergibt sich dann durch Superposition mit der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (4), also

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \tag{9}$$

mit Integrationskonstanten C_1 und C_2.

(d) (3 Punkte) Was passiert im Resonanzfall $\Omega = \omega_0$?

Hinweis: In diesem Fall empfiehlt sich ein Ansatz der Form

$$z(t) = \tilde{z}(t) \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t). \tag{10}$$

Es ergibt sich durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (2) eine einfach zu lösende Gleichung für $\tilde{z}$. Beachten Sie, dass Sie nur eine spezielle Lösung finden müssen, da die allgemeine Lösung die Superposition aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung z_{hom} und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Lösung: Hier führt offenbar der Ansatz (5) nicht zum Ziel. Für (10) folgt

$$\dot{z} = (\dot{\tilde{z}} - \mathrm{i}\omega_0 \tilde{z}) \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t), \quad \ddot{z} = (\ddot{\tilde{z}} - 2\mathrm{i}\omega_0 \dot{\tilde{z}} - \omega_0^2 \tilde{z}) \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t). \tag{11}$$

Setzt man dies in (2) mit $\Omega = \omega_0$ ein, folgt nach Kürzen des gemeinsamen Faktors $\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)$

$$\ddot{\tilde{z}} - 2\mathrm{i}\omega \dot{\tilde{z}} = A. \tag{12}$$

Wir benötigen nur eine spezielle Lösung, und offensichtlich ist der Ansatz

$$\tilde{z}(t) = ABt \Rightarrow \dot{\tilde{z}} = AB \; \ddot{\tilde{z}} = 0 \tag{13}$$

erfolgreich, denn Einsetzen in (12) liefert

$$-2\mathrm{i}\omega_0 AB = A \Rightarrow B = \frac{\mathrm{i}}{2B} \tag{14}$$

und damit als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z_{\text{inh}}(t) = \frac{\mathrm{i}A}{2\omega_0} t \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{15}$$

und für die physikalische reelle Lösung von (1) also

$$x_{\text{inh}}(t) = \operatorname{Re} z_{\text{inh}}(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung von (1) ist also in diesem Fall

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + \left(C_2 + \frac{A}{2\omega_0} t \right) \sin(\omega_0 t). \tag{17}$$

Für große t ergibt sich also eine Lösung $\propto t \sin(\omega_0 t)$, also eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 mit einer linear mit t wachsenden Amplitude. Die Amplitude wird also mit der Zeit beliebig groß. Dies bezeichnet man als „Resonanzkatastrophe“.

(e) (2 Punkte) Geben Sie schließlich für alle Ω jeweils die Lösungen des Anfangswertproblems für vorgegebene Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ an.

Lösung: Für $\Omega \neq \Omega_0$ setzen wir in (9) die Anfangsbedingungen ein. Die erste Ableitung ist

$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{A\omega_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin(\omega_0 t) \tag{18}$$

und damit

$$x(0) = C_1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} = x_0, \quad \dot{x}(0) = C_2 \omega_0 = v_0. \tag{19}$$

Das lineare Gleichungssystem ergibt schließlich für die Integrationskonstanten

$$C_1 = x_0 - \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \tag{20}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also in diesem Fall

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t). \tag{21}$$

Für $\Omega = \omega_0$ haben wir als allgemeine Lösung (17). Die erste Ableitung lautet

$$\dot{x} = \left(C_2 + \frac{At}{2}\right) \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{A}{2\omega_0} - C_1 \omega_0\right) \sin(\omega_0 t). \tag{22}$$

Für die Anfangsbedingungen ergibt sich also

$$x(0) = C_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = C_2 \omega_0 = v_0. \tag{23}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{At}{2\omega_0}\right) \sin(\omega_0 t). \tag{24}$$