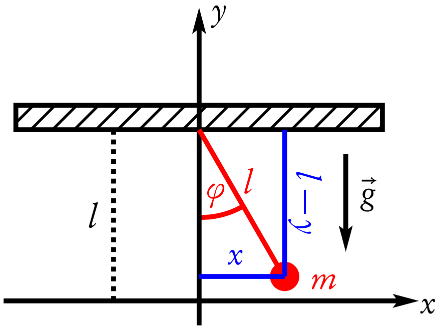
H. van Hees Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte): Fadenpendel

Wir betrachten einen Massenpunkt, der an einem masselosen Faden der Länge l an der Decke im homogenen Schwerefeld der Erde befestigt ist.



(a) Zeigen Sie, dass $V = mgy$ das Potential der Schwerkraft ist.

Lösung: Die Schwerkraft ist $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$. Es ist

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} V = -\begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Offensichtlich ist also $V = V(y)$ mit $V'(y) = mg$. Damit ist bis auf eine physikalisch irrelevante Integrationskonstante $V = mgy$.

(b) Parametrisieren Sie nun den Ortsvektor des Massenpunktes mit dem in der obigen Zeichnung eingezeichneten Winkel φ und zeigen Sie, dass

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2}$$

ist.

Lösung: Aus der Skizze liest man sofort ab, dass $x = l\sin\varphi$ und $l - y = l\cos\varphi$ und folglich $y = l(1-\cos\varphi)$ ist, und das war zu zeigen.

(c) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = m\dot{\underline{x}}^2/2$.

Lösung: Wir leiten (2) nach t ab. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\underline{x} = l\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\underline{x}}^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

(d) Mit dem Energiesatz

$$E = \frac{m}{2}\underline{\dot{x}}^2 + V(y) = \text{const} \tag{5}$$

folgt $\dot{E} = 0$. Zeigen Sie damit, dass die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{6}$$

gilt.

Lösung: Es ist mit (4) $V = mgy = mgl(1-\cos\varphi)$

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi). \tag{7}$$

Leiten wir dies nach der Zeit ab, erhalten wir mit dem Energiesatz

$$\dot{E} = ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = ml^2\dot{\varphi}\left(\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi\right) = 0. \tag{8}$$

Von der trivialen Lösung $\dot{\varphi} = 0$, wo sich das Pendel nicht bewegt sondern einfach in der Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$ verharrt, abgesehen, muss die Klammer verschwinden, und das führt auf (6).

(e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Ruhelage, indem Sie die Näherung $\sin\varphi \simeq \varphi$ für $|\varphi| \ll 1$ verwenden.

Lösung: Für $|\varphi| \ll 1$ können wir die Näherung $\sin\varphi \simeq \varphi$ in (8) einsetzen. Dann vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zur Gleichung für einen harmonischen Oszillator

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9}$$

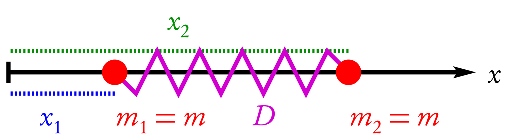
Die allgemeine Lösung lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t) + \frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega t). \tag{10}$$

Dabei sind $\varphi_0 = \varphi(0)$ die Anfangsauslenkung und $\Omega = \dot{\varphi}(0)$ die Anfangswinkelgeschwindigkeit des Pendels.

Aufgabe 2: Zwei durch eine Feder verbundene Massen

Zwei Massenpunkte mit Massen $m_1 = m_2 = m$ gleiten auf einer in x-Richtung orientierten Stange reibungsfrei (d.h. die Bewegung jedes Massenpunktes ist eindimensional und kann durch die Komponenten der diversen Vektoren in x-Richtung ausgedrückt werden) und sind durch eine Feder mit der Federkonstanten D verbunden. Die Länge der ungespannten Feder sei L_0.



(a) Berechnen Sie die auf die Massenpunkte jeweils wirkende Federkraft, die proportional zur Längenänderung der Feder relativ zur Länge L_0 ist (Federkonstante D).

Hinweis: Bedenken Sie dabei genau die Richtung der Kraft!

Lösung: Aus der Skizze liest man ab, dass die Wechselwirkungskräfte $\propto (x_2 - x_1 - L_0)$ sind. Die Kraft auf Teilchen 1 ist dabei für $(x_2 - x_1 - L_0)$ in die positive x-Richtung gerichtet, denn die Feder bewirkt immer eine Kraft, die der Änderung ihre Länge gegenüber L_0 *entgegengerichtet* ist. Damit haben wir

$$F_{12} = D(x_2 - x_1 - L_0) = -F_{21}. \tag{11}$$

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und rechnen Sie in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten um und lösen Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen für allgemeine Anfangsbedingungen $x_j(0) = x_{j0}$, $\dot{x}_{j0} = v_{j0}$ ($j \in \{1,2\}$).

Lösung: Die Bewegungsgleichungen lauten gemäß Newtons 2. Axiom

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{12} = D(x_2 - x_1 - L_0), \\ m\ddot{x}_2 &= F_{21} = -D(x_2 - x_1 - L_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten sind per Definition

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad r = x_1 - x_2. \tag{13}$$

Umgekehrt folgt

$$x_1 = R + \frac{r}{2}, \quad x_2 = R - \frac{r}{2}. \tag{14}$$

Setzen wir dies in die Bewegungsgleichungen (12) ein, folgt durch Addition der Bewegungsgleichungen (12) nach einigen einfachen Umformungen

$$2m\ddot{R} = 0 \Rightarrow R(t) = R_0 + V_0 t \quad \text{mit} \quad R_0 = \frac{1}{2}(x_{10} + x_{20}), \quad V_0 = \frac{1}{2}(v_{10} + v_{20}) \tag{15}$$

und durch Subtraktion

$$\mu \ddot{r} = -D(r + L_0) \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}. \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\mu \ddot{r} + D r = 0 \tag{17}$$

und einer speziellen Lösung $r(t) = L_0 = \text{const}$ der inhomogenen Differentialgleichung zu

$$r(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - L_0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{\mu}}. \tag{18}$$

Die Zeitableitung ist

$$\dot{r}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t). \tag{19}$$

Setzt man dies in die Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = v_0$ mit $r_0 = r_{10} - r_{20}$ und $v_0 = v_{10} - v_{20}$ ein, folgt nach kurzer Rechung

$$A = r_0 + L_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{\mu}{D}}. \tag{20}$$

(c) Berechnen Sie das Potential $V(x_1 - x_2) = V(r)$ der Wechselwirkungskräfte.

Lösung: Definitionsgemäß gilt

$$F_{12} = -\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1 - x_2) = -V'(x_1 - x_2) = -V'(r) = D(x_2 - x_1 - L_0) = -D(r + L_0)$$
$$\Rightarrow \; V'(r) = D(r + L_0). \tag{21}$$

Durch Integration erhält man bis auf eine physikalisch irrelevante (*warum?*) Konstante

$$V(r) = \frac{D}{2}(r + L_0)^2. \tag{22}$$

(d) Welche Erhaltungssätze gelten für dieses System? Überprüfen Sie diese explizit anhand der Lösungen.

Lösung: Es gilt der Schwerpunktssatz bzw. die Gesamtimpulserhaltung, denn mit der Lösung der Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt (13) folgt

$$P = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = M\dot{R} = MV_0 = \text{const.} \tag{23}$$

Da die Wechselwirkungskraft ein Potential besitzt, gilt auch der Energiesatz. Dies rechnet man auch aus der Lösung der Bewegungsgleichung explizit nach. Die Definition der Gesamtenergie ist

$$E = T + V = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + V(r). \tag{24}$$

Rechnet man dies in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten um, folgt nach einigen einfachen Umformungen

$$E = \frac{M}{2}V_0^2 + \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{D}{2}(r + L_0)^2 \tag{25}$$

Setzt man darin die Lösung für die Relativbewegung (18), folgt nach längeren aber einfachen Umformungen

$$E = \frac{M}{2}V_0^2 + \frac{\mu}{2}v_0^2 + \frac{D}{2}(r_0 + L_0)^2 = E_0 = \text{const.} \tag{26}$$

Der Energiesatz ist also, wie zu erwarten, erfüllt.