**H. van Hees** **Wintersemester 2024/2025**

# Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
# Lösungen zu Blatt 3

---

### Aufgabe 1: Satellit auf Kreisbahn

Wie lautet das effektive Potenzial $V_{\text{eff}}$ für die Bahn eines Erdsatelliten mit der Masse $m$? Dabei darf von der Näherung Gebrauch gemacht werden, dass die Erde als festes Zentrum behandelt werden darf, d.h. $m \ll m_{\text{Erde}}$.

Gehen Sie vom Energieerhaltungssatz

$$E = m\dot{r}^2/2 + V_{\text{eff}}(r) \tag{1}$$

mit diesem Potential aus. Bestimmen Sie den Radius $r_0$ der Kreisbahn als Funktion der Umlauffrequenz $\omega$ des Satelliten. Welcher Radius ergibt sich für eine geostationäre Bahn, d.h. eine Bahn, für die der Satellit stets über demselben Punkt der Erde steht?

Die Gravitationskonstante ist $\gamma = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ und die Erdmasse $m_{\text{Erde}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg.

**Hinweis:** Alle Resultate aus der Vorlesung (Skript Abschnitt 2.8) dürfen ohne Beweis verwendet werden!

**Lösung:** Wir dürfen wegen $m \ll m_{\text{Erde}}$ die reduzierte Masse $\mu = m m_{\text{Erde}}/(m+m_{\text{Erde}}) \simeq m m_{\text{Erde}}/m_{\text{Erde}} = m$ setzen und die Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt (der in den Rechnungen in der Vorlesung der Koordinatenursprung für die Relativkoordinaten $\vec{r}$ ist) vernachlässigen. Damit sitzt der Mittelpunkt der Erde fest bei $\vec{r} = 0$.

Mit Hilfe des Drehimpuls- und Energiesatzes konnten wir die Relativbewegung auf die Gleichung für die Energieerhaltung einer effektiven eindimensionalen Bewegung für die Koordinate $r = |\vec{r}|$ zurückführen. Gemäß Gl. (2.8.18) im Skript gilt

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma m m_{\text{Erde}}}{r}}_{V_{\text{eff}}(r)} = \text{const.} \tag{2}$$

Außerdem gilt in unseren üblichen Polarkoordinaten (mit der Erde im Ursprung des Koordinatensystems) gemäß Gl. (2.8.16) im Skript

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \tag{3}$$

Die Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate folgt durch Ableiten von (2) nach der Zeit. Da $E =$ const folgt

$$\dot{r}[m\ddot{r} + V'_{\text{eff}}(r)] = 0. \tag{4}$$

Da i.a. $\dot{r} \neq 0$ ist, folgt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r). \tag{5}$$

Für eine Kreisbahn $r = r_0 = \text{const}$ ist $\ddot{r} = 0$ und damit

$$V'_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{\gamma m m_{\text{Erde}}}{r_0^2} = 0. \tag{6}$$

Außerdem ist $L = mr_0^2\omega$, wobei $\omega = \dot{\varphi} = \text{const}$ ist, da $L = \text{const}$ gilt. Damit wird (6)

$$\frac{\gamma m m_{\text{Erde}}}{r_0^2} - mr_0\omega^2 = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{\gamma m_{\text{Erde}}}{\omega^2}\right)^{1/3}. \tag{7}$$

Für eine geostationäre Bahn ist $\omega_{\text{stat}} = \frac{2\pi}{1\,\text{Tag}} = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60\,\text{s}} \simeq 7{,}272 \cdot 10^{-5}/\text{s}$. Mit den angegebenen Werten für die Gravitationskonstante und die Masse der Erde folgt

$$r_{0\text{stat}} = \left(\frac{\gamma m_{\text{Erde}}}{\omega_{\text{stat}}^2}\right)^{1/3} \simeq 42{,}2 \cdot 10^6 \text{m}. \tag{8}$$

Der geostationäre Orbit ist also in einer Höhe von ca. $42{,}2 \cdot 10^3$ km.

**Bemerkung:** Da für eine Kreisbahn natürlich $r = \text{const}$ und damit $\dot{r} = 0$ ist, folgt aus der Energieerhaltungsgleichung für diesen Fall nicht notwendig (5). Man kann aber (5) auch aus der Gleichung für die Relativbewegung herleiten. Es ist in Polarkoordinaten (bzw. Zylinderkoordinaten für die vollständigen 3D-Vektoren)

$$\underline{r} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{r}} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Daraus folgt für den Drehimpuls

$$\underline{L} = m\underline{r} \times \underline{\dot{r}} = m r^2 \dot{\varphi}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{const}. \tag{10}$$

Dabei haben wir das Koordinatensystem so gewählt, dass $L = m r^2 \dot{\varphi} > 0$ ist. Nun ist wegen (10)

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2} \tag{11}$$

und damit wegen (9)

$$\underline{\dot{r}} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{L}{\mu r}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Damit folgt für die Beschleunigung nach einigen einfachen Umformungen

$$\underline{\ddot{r}} = \left(\ddot{r} - \frac{L}{\mu r}\dot{\varphi}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{r}\left(\dot{\varphi} - \frac{L}{\mu r^2}\right)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\ddot{r} - \frac{L}{\mu r}\dot{\varphi}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt (11) verwendet.
Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}\right) = -\frac{\gamma m m_{\text{Erde}}}{r^2}, \tag{14}$$

und das stimmt mit (5) mit dem in (2) angegebenen effektiven Potential $V_{\text{eff}}$ überein.

---

**Aufgabe 2: Bewegung im allgemeinen Zentralkraftfeld**

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{e}_r \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = F_r \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r}$$

gilt.

**Lösung:** Der Gradient des Potentials ist nach der Kettenregel

$$\vec{\nabla} V(r) = V'(r)\vec{\nabla} r, \tag{15}$$

wobei der Strich die Ableitung nach $r$ bezeichnet. Weiter gilt, wieder nach der Kettenregel,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \tag{16}$$

und analog für die Ableitungen nach $y$ und $z$. Insgesamt ist also

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{x}}{r} = \vec{e}_r \tag{17}$$

und damit folgt die Formel für die Kraft.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die Erhaltung der Gesamtenergie des Teilchens

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(r)$$

und des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

folgen.

**Lösung:** Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r. \tag{18}$$

Für die Zeitableitung der Gesamtenergie folgt

$$\dot{E} = m\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + \dot{r}V'(r). \tag{19}$$

Wegen der Kettenregel ist

$$\dot{r} = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} r \overset{(17)}{=} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_r. \tag{20}$$

Damit folgt

$$\dot{E} = \dot{\vec{x}} \cdot [m\ddot{\vec{x}} + \vec{e}_r V'(r)] = \dot{\vec{x}} \cdot [m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}] \overset{(18)}{=} 0. \tag{21}$$

Für den Drehimpuls finden wir

$$\dot{\vec{L}} = m(\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + \vec{x} \times \ddot{\vec{x}}) = \vec{x} \times (m\vec{F}) \overset{(18)}{=} \vec{x} \times F_r\vec{e}_r = 0. \tag{22}$$

Sowohl die Energie als auch der Drehimpuls sind also für Zentralkräfte erhalten. Im Folgenden drehen wir das Koordinatensystem so, dass $\vec{L} = L\vec{e}_z$. Dann ist die Bewegung auf die dazu senkrechten $xy$-Ebene beschränkt.

(c) (2 Punkte) Drücken Sie $L = |\vec{L}|$ durch die Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ und deren Zeitableitungen $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ aus, wobei die Polarkoordinaten durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert sind.

**Lösung:** Für die Geschwindigkeit folgt damit in Zylinderkoordinaten $(r, \varphi, z)$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{23}$$

Da weiter $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ gilt, folgt

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \Rightarrow L = mr^2\dot{\varphi}. \tag{24}$$

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung von Energie- und Drehimpulserhaltung Bewegungsgleichungen für $r$ und $\varphi$. Zeigen Sie, dass die Bewegung für $r$ durch eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem „effektiven Potential" (welchem?) beschrieben wird.

**Lösung:** Im Ausdruck für die Gesamtenergie können wir $\dot{\varphi}$ mit Hilfe des Drehimpulsbetrags gemäß (24) eliminieren:

$$E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \tag{25}$$

Dies ist analog zur Gesamtenergie eines Teilchens, das sich entlang einer festen Richtung im „effektiven Potential"

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \tag{26}$$

bewegt. Ableiten von $E$ nach der Zeit liefert wegen (21) die entsprechende Bewegungsgleichung

$$\dot{E} = \dot{r}[m\ddot{r} + V'_{\text{eff}}(r)] = 0, \tag{27}$$

also

$$m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r) = \frac{L^2}{mr^3} + F_r(r). \tag{28}$$

Neben der Radialkraft wirkt also bei der effektiven Radialbewegung auch noch die momentane Zentrifugalkraft.

$$F_Z = \frac{L^2}{mr^3} \overset{(24)}{=} \frac{m^2r^4\dot{\varphi}^2}{mr^3} = mr\dot{\varphi}^2. \tag{29}$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses folgt

$$\dot{L} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0 \rightarrow mr^2\ddot{\varphi} = -2mr\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{30}$$

(e) (2 Punkte) Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass für vorgegebene Energie $E$ und Drehimpuls $L = |\vec{L}|$ eine Kreisbahn $r = R = \text{const}$ als Lösung existiert.

**Lösung:** Offenbar besitzt die Radialbewegungsgleichung (28) genau dann eine Lösung $r = R = \text{const}$, wenn es eine Lösung der Gleichung $V'_{\text{eff}}(R) = 0$ gibt, also wenn $V$ entweder ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum) oder einen Sattelpunkt mit horizontaler Wendetangente besitzt.

(f) **Zusatzaufgabe zum Knobeln (3 Zusatzpunkte):** Diskutieren Sie, ob diese Kreisbahn stabil gegen kleine Störungen ist. Setzen Sie dazu $r = R + \eta$ und Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für $r$ bis zur linearen Ordnung nach $\eta$ und diskutieren Sie die entstehende näherungsweise Bewegungsgleichung für $\eta$.

**Lösung:** Anschaulich ist klar, dass die Kreisbahn nur dann stabil gegen kleine Störungen ist, wenn das Potential ein lokales Minimum bei $r = R$ besitzt. Formal erkennen wir dies, indem wir die Energie (25) bis zur zweiten Ordnung in der Störung $\eta$ entwickeln

$$E = \frac{m}{2}\dot{\eta}^2 + V_{\text{eff}}(R) + V'_{\text{eff}}(R)\eta + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r)\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3) = \frac{m}{2}\dot{\eta}^2 + V_{\text{eff}}(R) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(R)\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3), \tag{31}$$

denn voraussetzungsgemäß ist $V'_{\text{eff}}(R) = 0$. Durch Zeitableitung und Verwendung des Energiesatzes findet man

$$m\ddot{\eta} = -V''_{\text{eff}}(R)\eta + \mathcal{O}(\eta^2). \tag{32}$$

Das ist (unter Vernachlässigung der Terme $\mathcal{O}(\eta^2)$) die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator falls $V''_{\text{eff}}(R) > 0$ ist, falls $V_{\text{eff}}$ an der Stelle $r = R$ ein Minimum besitzt. Für $V''_{\text{eff}}(R) < 0$ erhält man hingegen für $\eta$ eine exponentiell mit der Zeit wachsende Lösung, d.h. die anfangs kleine Störung wächst exponentiell an, so dass die Näherung für große Zeiten sicher nicht mehr gültig ist, d.h. in diesem Fall ist die Kreisbahn mit Sicherheit instabil gegen kleine Störungen.

**Bemerkung:** Falls $V''_{\text{eff}}(R) = 0$, muss man höhere Ordnungen der Taylorreihe in (31) betrachten. Ist die erste nicht verschwindende Ableitung von $V_{\text{eff}}$ an der Stelle $r = R$ gerade, liegt wieder entweder ein Minimum oder Maximum vor, und entsprechend erhält man stabile bzw. instabile Kreisbahnen. Falls die erste nicht verschwindende Ableitung ungerade ist, besitzt $V_{\text{eff}}$ bei $r = R$ einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente, und die Bewegung ist i.a. instabil unter kleinen Störungen.