Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 1 (10 Punkte): Gravitationspotential

Wir betrachten die Gravitationskraft, die ein sehr schwerer Körper der Masse M, den wir als Punktmasse idealisieren, auf eine andere Punktmasse mit der Masse $m \ll M$. Wir können dann annehmen, dass der schwere Körper im Koordinatenursprung ruht und auf die Punktmasse m (Ortsvektor $\vec{x}$) die Kraft

$$F(\vec{x}) = -\frac{\gamma m M}{r^3}\vec{x} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{x}| \tag{1}$$

wirkt. Dabei ist $\gamma = 6{,}67430 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg}\,\text{s}^2)$ die **Newtonsche Gravitationskonstante**. Es handelt sich also um eine Zentralkraft mit dem Ursprung des Koordinatensystems als Zentrum.

(a) (4 Punkte) Es sei ein Potential V gegeben, das nur vom Abstand vom Koordinatenursprung abhängt, also $V(\vec{x}) = V(r)$ mit $r = |\vec{x}|$. Zeigen Sie, dass die dazugehörige Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ eine Zentralkraft ist.

Lösung: Wir müssen die Kettenregel verwenden, um den Gradienten des Potentials zu berechnen. Offenbar ist nämlich $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) = -(\vec{\nabla} r) V'(r)$, wobei der Strich die Ableitung nach r bedeutet. Weiter gilt

$$\vec{\nabla} r = \vec{\nabla}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{r} = \vec{e}_r. \tag{2}$$

Damit wird also

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) = -(\vec{\nabla} r) V'(r) = -\frac{\vec{x}}{r} V'(r) = -\vec{e}_r V'(r). \tag{3}$$

(b) (3 Punkte) Stellen Sie nun die entsprechende Differentialgleichung für $V(r)$ für die oben angegebene Gravitationskraft auf.

Lösung: Die Differentialgleichung lautet wegen (3)

$$-\frac{\vec{x}}{r} V'(r) = -\frac{\gamma m M}{r^2}\frac{\vec{x}}{r} \;\Rightarrow\; V'(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}. \tag{4}$$

(c) (3 Punkte) Lösen Sie diese Differentialgleichung.

Lösung: Wir müssen nur die DGL (4) nach r integrieren:

$$V(r) = \gamma m M \int \mathrm{d}r \frac{1}{r^2} = -\frac{\gamma m M}{r} + C, \quad C = \text{const.} \tag{5}$$

(d) **Zusatzaufgabe:** (2 Extrapunkte) Ist das Potential durch die Kraft eindeutig bestimmt? Diskutieren Sie, inwiefern diese Frage für die Bewegungsgleichung eines Körpers im Gravitationsfeld eines anderen (sehr schweren) Körpers relevant ist.

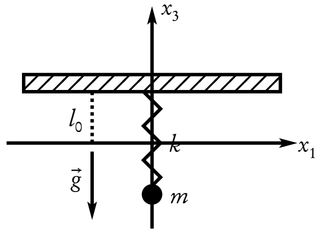
Lösung: Da sich das Potential aus der Kraft aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung ergibt, ist das Potential nur bis auf die additive Konstante C bestimmt. Diese Konstante ist aber physikalisch irrelevant, da die Bewegungsgleichung nur von der Kraft abhängt, und weil $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ ist, fällt die Konstante bei der Ableitung weg.

Bemerkung: Es ist allgemein üblich, dass man die Konstante des Potentials so bestimmt, dass $V(r) \to 0$ für $r \to \infty$ ist, falls der entsprechende Grenzwert existiert. Dies ist hier der Fall, d.h. man verwendet für das Gravitationspotential gewöhnlich

$$V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}. \tag{6}$$

Aufgabe 2: Feder

Eine Feder sei an der Decke befestigt und besitze unbelastet die Länge l_0. Im folgenden sei die x_3-Achse nach oben (also entgegen der Richtung der Schwerkraft) gerichtet. Das Ende der unbelasteten Feder sei dann bei $x_3 = 0$. Wirkt am Ende der Feder die Kraft $\vec{F}$, dann gilt (für nicht zu große Auslenkungen) $\vec{F} = -k x_3 \vec{e}_3$ (Hooksches Gesetz). Nun wird am Ende der Feder eine Masse m befestigt.



(a) Die Feder und die angehängte Masse sei danach wieder in Ruhe. Um wieviel dehnt sich die Feder aus, d.h. welchen Wert hat die x_3-Koordinate x_{03} des ruhenden Massepunktes?

Lösung: Da sich der Massenpunkt nicht bewegt, insbesondere also auch nicht beschleunigt wird, ist die Gesamtkraft auf die Masse Null. Auf den Massenpunkt wirkt einerseits die Schwerkraft $F_{g3} = -mg$ und andererseits die Rückstellkraft der Feder $F_{F3} = -k x_{03}$, d.h.

$$F_3 = F_{g3} + F_{F3} = -mg - k x_{03} = 0 \Rightarrow x_{03} = -\frac{mg}{k}. \tag{7}$$

(b) Der Massepunkt werde nun zur Anfangszeit $t = 0$ um Δx_{03} ausgelenkt und dann losgelassen. Wie lautet die Bewegungsgleichung?

Lösung: Die Bewegungsgleichung lautet

$$m a_3 = m \ddot{x}_3 = F_3 = -mg - k x_3. \tag{8}$$

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Lösung: Wir formen die Differentialgleichung zuerst etwas um:

$$m \ddot{x}_3 + k x_3 = -mg. \tag{9}$$

Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$m \ddot{x}_{3h} + k x_{3h} = 0 \tag{10}$$

und einer beliebigen speziellen Lösung x_{3_s} der inhomogenen Gleichung. Letztere können wir leicht raten, denn offenbar erfüllt der Ansatz $x_{3_s} = C = \text{const}$ die Gleichung. Setzen wir den Ansatz in (9) ein, folgt

$$kC = -mg \Rightarrow C = -\frac{mg}{k} = x_{03}. \tag{11}$$

Die homogene Gleichung (10) formen wir wieder ein wenig um:

$$\ddot{x}_{3h} = -\frac{k}{m} x_{3h}. \tag{12}$$

Die Lösung muss also eine Funktion sein, deren 2. Ableitung bis auf konstante Faktoren die Funktion selbst reproduziert. Offenbar sind solche Lösungen durch den Ansatz

$$x_{3h1} = A\cos(\omega t), \quad x_{3h2} = B\sin(\omega t) \tag{13}$$

gegeben. Denn dann gilt

$$\dot{x}_{3h1} = -A\omega\sin(\omega t), \quad \ddot{x}_{3h2} = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x_{3h1} \tag{14}$$

und analog $\ddot{x}_{3h2} = -\omega^2 x_{3h2}$. Setzt man dies in (12) ein, ergibt sich eine Lösung, wenn man

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

setzt. Damit lautet die allgmeine Lösung der homogenen Gleichung

$$x_{3h} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{16}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich daraus, indem man die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu (16) addiert:

$$x_3(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + x_{03}. \tag{17}$$

Die Anfangsbedingungen lauten $x_3(0) = x_{03} + \Delta x_{03}$, $\dot{x}_3(0) = 0$. Diese Anfangsbedingungen verwenden wir, um die Integrationskonstanten A und B zu bestimmen. Es gilt $x_3(0) = A + x_{03} = x_{03} + \Delta x_{03}$ und folglich $A = \Delta x_{03}$ und

$$\dot{x}_3(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t). \tag{18}$$

Wegen $\dot{x}_3(0) = 0$ folgt $B = 0$. Die Lösung lautet also

$$x_3(t) = \Delta x_{03}\cos(\omega t) + x_{03}. \tag{19}$$

Der Massepunkt schwingt also harmonisch mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ um die Gleichgewichtslage $x_{03} = -mg/k$.
