H. van Hees **Wintersemester 2024/2025**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 11

Aufgabe 1 (10 Punkte): Kanonische Transformationen und Poisson-Klammern
Es sei durch

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p) \tag{1}$$

eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen Phasenraumvariablen $(Q, P) = (Q_1, \ldots, Q_f, P_1, \ldots, P_f)$ und $(q, p) = (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots p_f)$ gegeben. Die Poisson-Klammern für beliebige Phasenraumfunktionen f und g bzgl. dieser Phasenraumkoordinaten seien wie üblich definiert:

$$\{f, g\}^{(q,p)} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{2}$$

bzw.

$$\{f, g\}^{(Q,P)} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q} \tag{3}$$

Die Transformation ist definitionsgemäß genau dann kanonisch, wenn $\{f, g\}^{(Q,P)} = \{f, g\}^{(q,p)}$ gilt.

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\{f, g\}^{(q,p)} = \{f, g\}^{(Q,P)}\{Q, P\}^{(q,p)} \tag{4}$$

gilt, d.h. dass die Transformation genau dann kanonisch ist, wenn $\{Q, P\}^{(q,p)} = 1$ gilt.

(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P = q^\alpha \sin(\beta p) \tag{5}$$

eine kanonische Transformation ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Dynamische Symmetrie beim isotropen harmonischen Oszillator
Die Hamiltonfunktion des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators lautet

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{q}^2. \tag{6}$$

(a) (3 Punkte) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{q}$ und $\vec{p}$ her.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Komponenten des Tensors

$$T_{jk} = p_j p_k + (m\omega)^2 q_j q_k \tag{7}$$

Erhaltungsgrößen sind.
