Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 10

Aufgabe 1 (10 Punkte): Poisson-Klammeralgebra

Es seien A, B und C beliebige Phasenraumfunktionen, also Funktionen von $(q,p) \equiv (q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots q_f)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln für Poisson-Klammern erfüllt sind:

(a) (2 Punkte) $\{A,\lambda_1 B+\lambda_2 C\}_{\text{pb}} = \lambda_1\{A,B\}_{\text{pb}}+\lambda_2\{A,C\}_{\text{pb}}$, wobei $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

(b) (1 Punkt) $\{B,A\}_{\text{pb}} = -\{A,B\}_{\text{pb}}$.

(c) (4 Punkte) $\left\{A,\{B,C\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}}+\left\{B,\{C,A\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}}+\left\{C,\{A,B\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} = 0$. (Jacobi-Identität)

(d) (3 Punkte) $\{AB,C\}_{\text{pb}} = A\{B,C\}_{\text{pb}}+\{A,C\}_{\text{pb}}B$.

Hinweis: Die Rechnungen mit Poisson-Klammern werden erheblich vereinfacht, wenn man die Phasenraumvariablen wie folgt organisiert: $(\eta_1,\ldots,\eta_f,\eta_{f+1},\ldots,\eta_{2f}) = (q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots,p_f)$ und die reelle $(2f)\times(2f)$-Matrix J_{ab} einführt mit

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0_{f\times f} & 1_{f\times f} \\ -1_{f\times f} & 0_{f\times f} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $0_{f\times f}$ die $f\times f$-Matrix mit allen Matrixelementen gleich 0 und $1_{f\times f} = \text{diag}(1,\ldots,1)$ (f-dimensionale Einheitsmatrix) sind. Mit dieser Notation ist dann

$$\{A,B\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A)(\partial_\beta B), \tag{2}$$

wobei griechische Indizes von 1 bis $2f$ laufen und $\partial_\alpha A = \partial A/\partial\eta_\alpha$ ist. Auch hier wird wieder die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Beim Beweis der Jacobi-Identität benötigt man dann nur noch, dass $\partial_\alpha\partial_\beta A = \partial_\beta\partial_\alpha A$ und die Antisymmetrie von $\hat{J}$, also $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$.

Bemerkung: Mit den Identitäten (a)-(c) erweist sich die Poisson-Klammer als eine Lie-Algebra, die auf dem Vektorraum der Phasenraumfunktionen operiert.

Die Eigenschaft (d) macht die Poisson-Klammer zugleich zu einer sog. Derivation. Definiert man nämlich als **Lie-Ableitung** einer Phasenraumfunktion B nach A als

$$\mathfrak{L}_A B = \{B,A\}_{\text{pb}}, \tag{3}$$

gilt für diesen Operator gemäß (d) nämlich die Produktregel

$$\mathfrak{L}_C(AB) = A\mathfrak{L}_C B + (\mathfrak{L}_C A)B. \tag{4}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Poisson-Klammern und Drehimpuls

Es seien $(\vec{x},\vec{p})$ die kartesischen Koordinaten und die dazugehörigen kanonischen Impulse für ein einzelnes Teilchen im Sinne des Hamilton-Formalismus. Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammern der Drehimpulskomponenten $L_a = \epsilon_{abc}x_a p_b$ (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird) durch

$$\left\{L_j,L_k\right\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl}L_l \tag{5}$$

gegeben sind.
Tip: Zeigen Sie zuerst, dass die „kanonischen Poisson-Klammerrelationen“

$$\{x_a, x_b\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{p_a, p_b\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{x_a, p_b\}_{\text{pb}} = \delta_{ab} \tag{6}$$

gelten und wenden Sie dann die allgemeinen Beziehungen aus Aufgabe 1 an.