

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte): Energiesatz beim harmonischen Oszillator

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

und die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2. \quad (2)$$

Berechnen Sie $\dot{E} = dE/dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

Lösung: Die Zeitableitung der Gesamtenergie ist

$$\dot{E} = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x). \quad (3)$$

Mit der Bewegungsgleichung folgt

$$\dot{E} = -2m\gamma\dot{x}^2 \geq 0, \quad (4)$$

d.h. für $\gamma > 0$ verliert der Massenpunkt beständig Energie durch Reibung (die in Wärme der umgebenden Materialien umgewandelt wird). Für $\gamma = 0$ ist die Energie erhalten.

Bemerkung: Wir können (2) noch weiter auswerten, indem wir die Lösung aus der Vorlesung verwenden. Nehmen wir als Beispiel den Schwingfall:

$$x(t) = \hat{x} \exp(-\gamma t) \cos(\omega t - \varphi_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} > 0. \quad (5)$$

Dann ist

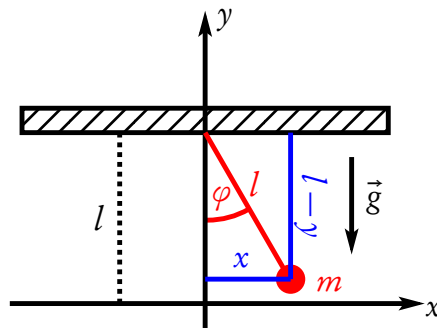
$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{m^2}{2} \hat{x}^2 \exp(-2\gamma t) [\omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi_0) + (\gamma^2 + \omega_0^2) \cos^2(\omega t - \varphi_0)] \\ &= \frac{m^2}{2} \hat{x}^2 \exp(-2\gamma t) \left\{ \omega_0^2 + \gamma^2 [\cos^2(\omega t - \varphi_0) - \sin^2(\omega t - \varphi_0)] \right. \\ &\quad \left. + 2\omega\gamma \sin(\omega t - \varphi_0) \cos(\omega t - \varphi_0) \right\} \\ &= \frac{m}{2} \hat{x}^2 \exp(-2\gamma t) \{ \omega_0^2 + \gamma^2 \cos[2(\omega t - \varphi_0)] + \omega\gamma \sin[2(\omega t - \varphi_0)] \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei haben wir im Schritt von der 1. zur 2. Zeile $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ und im Schritt von der 2. zur 3. Zeile die Doppelwinkeltheoreme für cos und sin verwendet.

Für $\gamma = 0$ erhalten wir erwartungsgemäß $E(t) = m\hat{x}^2/2 = V_{\max} = \text{const.}$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Fadenpendel

Wir betrachten einen Massenpunkt, der an einem masselosen Faden der Länge l an der Decke im homogenen Schwerfeld der Erde befestigt ist.



- (a) Zeigen Sie, dass $V = mgy$ das Potential der Schwerkraft ist.

Lösung: Die Schwerkraft ist $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$. Es ist

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}V = -\begin{pmatrix} \frac{\partial_x V}{\partial_y V} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Offensichtlich ist also $V = V(y)$ mit $V'(y) = mg$. Damit ist bis auf eine physikalisch irrelevante Integrationskonstante $V = mgy$.

- (b) Parametrisieren Sie nun den Ortsvektor des Massenpunktes mit dem in der obigen Zeichnung eingezeichneten Winkel φ und zeigen Sie, dass

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (8)$$

ist.

Lösung: Aus der Skizze liest man sofort ab, dass $x = l \sin \varphi$ und $l - y = l \cos \varphi$ und folglich $y = l(1 - \cos \varphi)$ ist, und das war zu zeigen.

- (c) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = m\dot{\underline{x}}^2/2$.

Lösung: Wir leiten (8) nach t ab. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\underline{\dot{x}} = l\dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Daraus folgt für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\underline{x}}^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (10)$$

- (d) Mit dem Energiesatz

$$E = \frac{m}{2} \dot{\underline{x}}^2 + V(y) = \text{const} \quad (11)$$

folgt $\dot{E} = 0$. Zeigen Sie damit, dass die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (12)$$

gilt.

Lösung: Es ist mit (10) $V = mgy = mgl(1 - \cos \varphi)$

$$E = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (13)$$

Leiten wir dies nach der Zeit ab, erhalten wir mit dem Energiesatz

$$\dot{E} = ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = ml^2 \dot{\varphi} \left(\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \right) = 0. \quad (14)$$

Von der trivialen Lösung $\dot{\varphi} = 0$, wo sich das Pendel nicht bewegt sondern einfach in der Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$ verharrt, abgesehen, muss die Klammer verschwinden, und das führt auf (12).

- (e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Ruhelage, indem Sie die Näherung $\sin \varphi \simeq \varphi$ für $|\varphi| \ll 1$ verwenden.

Lösung: Für $|\varphi| \ll 1$ können wir die Näherung $\sin \varphi \simeq \varphi$ in (14) einsetzen. Dann vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zur Gleichung für einen harmonischen Oszillator

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (15)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t) + \frac{\Omega}{\omega} \sin(\omega t). \quad (16)$$

Dabei sind $\varphi_0 = \varphi(0)$ die Anfangsauslenkung und $\Omega = \dot{\varphi}(0)$ die Anfangswinkelgeschwindigkeit des Pendels.