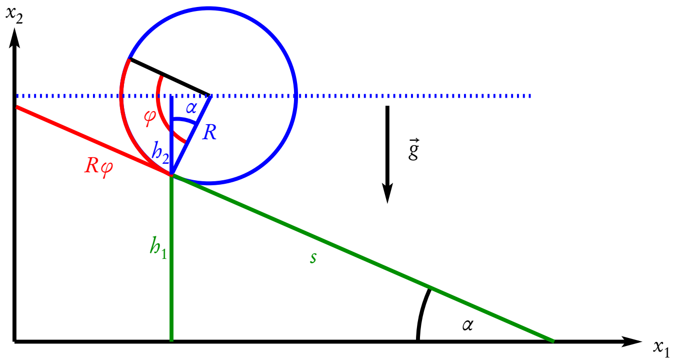
Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 11

Aufgabe 1: Abrollen eines Zylinders

Ein Zylinder mit Masse M und Radius R rolle ohne zu gleiten mit waagrecht gelegter Achse eine schiefe Ebene hinunter.



Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Zylinders mit Hilfe des Lagrange-Fromalismus'.

Betrachten Sie sowohl einen homogenen Zylinder als auch einen Hohlzylinder und berechnen Sie zunächst deren Trägheitsmomente.

Hinweis: Beachten Sie, dass die kinetische Energie $T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$ einen Anteil von der translatorischen Bewegung des Schwerpunkts und einen Anteil von der Rotation des Zylinders um seine Achse besitzt. Parametrisieren Sie zur Berechnung der kinetischen Energie die Bewegung zunächst mit den generalisierten Koordinaten s und φ und arbeiten Sie dann die „Rollbedingung" $\dot{s} = R\dot{\varphi}$ ein (warum ist das die Rollbedingung?). Eliminieren Sie damit φ aus den Gleichungen, so dass die einzige verbliebene generalisierte Koordinate s ist. Die potentielle Energie ist offenbar $V = Mg(h_1 + h_2)$. Für die Berechnung der Lagrangefunktion, $L(s, \dot{s}) = T - V$, müssen Sie auch noch h_1 mittels s ausdrücken!

Lösung: Wir beschreiben die Bewegung durch die Koordinate s, und den Rotationswinkel φ um die Zylinderachse. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Horizontale ist α. Die kinetische Energie setzt sich aus der Translations- und Rotationsenergie zusammen:

$$T = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Dabei ist Θ das Trägheitsmoment für Rotationen um die Zylinderachse. Da der Zylinder ohne zu gleiten rollt, gilt $R\varphi + s = \text{const}$ und damit

$$R\dot{\varphi} = -\dot{s} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{1}{R}\dot{s}. \tag{2}$$

Es ist also

$$T = \left(\frac{M}{2} + \frac{\Theta}{2R^2}\right)\dot{s}^2. \tag{3}$$

Die potentielle Energie ist durch die Höhe des Schwerpunktes über dem Boden gegeben. Aus der Skizze auf dem Blatt liest man unmittelbar ab

$$V = Mg(h_1 + h_2)Mg(s \sin\alpha + R\cos\alpha). \tag{4}$$

Die Lagrange-Funktion ist demnach

$$L = T - V = \left(\frac{M}{2} + \frac{\Theta}{2R^2}\right)\dot{s}^2 - Mg(s\sin\alpha + R\cos\alpha). \tag{5}$$

Die Bewegungsgleichung folgt aus den Euler-Lagrangegleichungen:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{s}, \quad \dot{p}_s = \left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{s} = \frac{\partial L}{\partial s} = -Mg\sin\alpha. \tag{6}$$

Die Lösung ist

$$s(t) = -\frac{MR^2}{MR^2 + \Theta} g\sin\alpha \frac{t^2}{2} + s_0 + v_0 t. \tag{7}$$

Die Trägheitsmomente berechnet man am bequemsten in Zylinderkoordinaten. Für einen Vollzylinder ist

$$\Theta_{\text{voll}} = \frac{M}{\pi R^2 L} \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\rho\rho\rho^3 = \frac{MR^2}{2}. \tag{8}$$

Für einen Hohlzylinder mit vernachlässigbarer Wanddicke ist die ganze Masse auf dem Rand konzentriert, und es ist

$$\Theta_{\text{hohl}} = \frac{M}{2\pi RL} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^L \mathrm{d}z R^3 = MR^2. \tag{9}$$

Gemäß (7) ist also für den Vollzylinder

$$s = -\frac{2}{3} g\sin\alpha \frac{t^2}{2} + s_0 + v_0 t. \tag{10}$$

Die Beschleunigung beträgt also nur 2/3 des Wertes für einen reibungsfrei auf der Ebene herabgleitenden Massenpunkt.

Entsprechend ergibt sich für den Hohlzylinder

$$s = -\frac{1}{2} g\sin\alpha \frac{t^2}{2} + s_0 + v_0 t. \tag{11}$$

Die Beschleunigung ist also gegenüber einem reibungsfrei gleitenden Massenpunktes auf die Hälfte reduziert.