Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 10 Lösungen

Aufgabe 1 (10 Punkte): Poisson-Klammeralgebra

Es seien A, B und C beliebige Phasenraumfunktionen, also Funktionen von $(q,p) \equiv (q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots q_f)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln für Poisson-Klammern erfüllt sind:

(a) (2 Punkte) $\{A,\lambda_1 B+\lambda_2 C\}_{\text{pb}} = \lambda_1 \{A,B\}_{\text{pb}} + \lambda_2 \{A,C\}_{\text{pb}}$, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

Lösung: Mit der abkürzenden Schreibweise aus dem Hinweis folgt die Behauptung sofort aus der Linearität der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\{A,\lambda_1 B+\lambda_2 C\}_{\text{pb}} &= J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A)[\partial_\beta(\lambda_1 B+\lambda_2 C)]\\ &= J_{\alpha\beta}\partial_\alpha A(\lambda_1 \partial_\beta B+\lambda_2\partial_\beta C)\\ &= \lambda_1\{A,B\}_{\text{pb}}+\lambda_2\{A,C\}_{\text{pb}}.\end{aligned} \tag{1}$$

(b) (1 Punkt) $\{B,A\}_{\text{pb}} = -\{A,B\}_{\text{pb}}$.

Lösung: Dies ergibt sich aus der Antisymmetrie der Matrix $\hat{J}$:

$$\{B,A\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha B)(\partial_\beta A) = -J_{\beta\alpha}(\partial_\beta A)(\partial_\alpha B) = -\{A,B\}_{\text{pb}}. \tag{2}$$

(c) (4 Punkte) $\left\{A,\{B,C\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} + \left\{B,\{C,A\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} + \left\{C,\{A,B\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} = 0$. (Jacobi-Identität)

Lösung: Für den ersten Term gilt

$$\left\{A,\{B,C\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A)\partial_\beta[J_{\gamma\delta}(\partial_\gamma B)(\partial_\delta C) = J_{\alpha\beta}J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha A)[(\partial_\beta\partial_\gamma B)(\partial_\delta C)+(\partial_\gamma B)(\partial_\beta\partial_\delta C)]. \tag{3}$$

Die anderen beiden Terme erhält man daraus durch die „zyklische Permutation" $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$:

$$\left\{B,\{C,A\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha B)[(\partial_\beta\partial_\gamma C)(\partial_\delta A)+(\partial_\gamma C)(\partial_\beta\partial_\delta A)], \tag{4}$$

$$\left\{C,\{A,B\}_{\text{pb}}\right\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta}J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha C)[(\partial_\beta\partial_\gamma A)(\partial_\delta B)+(\partial_\gamma A)(\partial_\beta\partial_\delta B)], \tag{5}$$

Um die linke Seite des Ausdrucks zu erhalten, müssen wir (3-5) addieren. Betrachten wir nun die beiden rot gefärbten Beiträge zu dieser Summe, folgt aus der Antisymmetrie der Matrix $\hat{J}$ und der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen von B

$$\begin{aligned}&J_{\alpha\beta}J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha A)(\partial_\delta C)(\partial_\beta\partial_\gamma B)+J_{\alpha\beta}J_{\gamma\delta}(\partial_\gamma A)(\partial_\alpha C)(\partial_\beta\partial_\delta B)\\ =&J_{\alpha\beta}J_{\gamma\delta}(\partial_\alpha A)(\partial_\delta C)(\partial_\beta\partial_\gamma B)-J_{\gamma\delta}J_{\beta\alpha}(\partial_\gamma A)(\partial_\alpha C)(\partial_\delta\partial_\beta B)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass sich der zweite Term vom ersten nur durch das Vorzeichen unterscheidet, da nur Summationsindizes umbenannt sind, d.h. die beiden Beiträge heben sich gegenseitig auf. Die gleiche Überlegung zeigt, dass sich auch die blau bzw. grün gefärbten Beiträge jeweils gegenseitig wegheben. Damit ist die Jacobi-Identität gezeigt.

(d) (3 Punkte) $\{AB,C\}_{\mathrm{pb}} = A\{B,C\}_{\mathrm{pb}} + \{A,C\}_{\mathrm{pb}}B$.

Lösung: Dies lässt sich auf die Produktregel für partielle Ableitungen zurückführen:

$$\{AB,C\}_{\mathrm{pb}} = J_{\alpha\beta}[\partial_\alpha(AB)](\partial_\beta C) = J_{\alpha\beta}[(\partial_\alpha A)B + A(\partial_\alpha B)](\partial_\beta C) = \{A,C\}_{\mathrm{pb}}B + A\{B,C\}_{\mathrm{pb}}. \quad (7)$$

Hinweis: Die Rechnungen mit Poisson-Klammern werden erheblich vereinfacht, wenn man die Phasenraumvariablen wie folgt organisiert: $(\eta_1,\ldots,\eta_f,\eta_{f+1},\ldots,\eta_{2f}) = (q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots,p_f)$ und die reelle $(2f)\times(2f)$-Matrix J_{ab} einführt mit

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0_{f\times f} & 1_{f\times f} \\ -1_{f\times f} & 0_{f\times f} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

wobei $0_{f\times f}$ die $f\times f$-Matrix mit allen Matrixelementen gleich 0 und $1_{f\times f} = \mathrm{diag}(1,\ldots,1)$ (f-dimensionale Einheitsmatrix) sind. Mit dieser Notation ist dann

$$\{A,B\}_{\mathrm{pb}} = J_{\alpha\beta}(\partial_\alpha A)(\partial_\beta B), \quad (9)$$

wobei griechische Indizes von 1 bis $2f$ laufen und $\partial_\alpha A = \partial A/\partial\eta_\alpha$ ist. Auch hier wird wieder die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Beim Beweis der Jacobi-Identität benötigt man dann nur noch, dass $\partial_\alpha\partial_\beta A = \partial_\beta\partial_\alpha A$ und die Antisymmetrie von $\hat{J}$, also $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$.

Bemerkung: Mit den Identitäten (a)-(c) erweist sich die Poisson-Klammer als eine Lie-Algebra, die auf dem Vektorraum der Phasenraumfunktionen operiert.

Die Eigenschaft (d) macht die Poisson-Klammer zugleich zu einer sog. Derivation. Definiert man nämlich als **Lie-Ableitung** einer Phasenraumfunktion B nach A als

$$\mathfrak{L}_A B = \{B,A\}_{\mathrm{pb}}, \quad (10)$$

gilt für diesen Operator gemäß (d) nämlich die Produktregel

$$\mathfrak{L}_C(AB) = A\mathfrak{L}_C B + (\mathfrak{L}_C A)B. \quad (11)$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Poisson-Klammern und Drehimpuls

Es seien $(\vec{x},\vec{p})$ die kartesischen Koordinaten und die dazugehörigen kanonischen Impulse für ein einzelnes Teilchen im Sinne des Hamilton-Formalismus. Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammern der Drehimpulskomponenten $L_a = \epsilon_{abc}x_a p_b$ (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird) durch

$$\left\{L_j, L_k\right\}_{\mathrm{pb}} = \epsilon_{jkl}L_l \quad (12)$$

gegeben sind.

Tip: Zeigen Sie zuerst, dass die „kanonischen Poisson-Klammerrelationen“

$$\{x_a,x_b\}_{\mathrm{pb}} = 0, \quad \{p_a,p_b\}_{\mathrm{pb}} = 0, \quad \{x_a,p_b\}_{\mathrm{pb}} = \delta_{ab} \quad (13)$$

gelten und wenden Sie dann die allgemeinen Beziehungen aus Aufgabe 1 an.

Lösung: (13) zeigt man durch einfaches Ausrechnen der Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned}
\{x_a, x_b\}_{\text{pb}} &= \frac{\partial x_a}{\partial x_c}\frac{\partial x_b}{\partial p_c} - \frac{\partial x_b}{\partial x_c}\frac{\partial x_b}{\partial p_c} = 0, \\
\{p_a, p_b\}_{\text{pb}} &= \frac{\partial p_a}{\partial x_c}\frac{\partial p_b}{\partial p_c} - \frac{\partial p_b}{\partial p_c}\frac{\partial x_b}{\partial p_c} = 0, \\
\{x_a, p_b\}_{\text{pb}} &= \frac{\partial x_a}{\partial x_c}\frac{\partial p_b}{\partial p_c} - \frac{\partial p_b}{\partial x_c}\frac{\partial x_a}{\partial p_c} = \delta_{ac}\delta_{bc} = \delta_{ab}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Damit folgt unter Verwendung der Poisson-Klammeregeln aus Aufgabe 1 (a), (b) und (d):

$$\begin{aligned}
\left\{L_j, L_k\right\}_{\text{pb}} &= \left\{\epsilon_{jab} x_a p_b, \epsilon_{kcd} x_c p_d\right\}_{\text{pb}} \\
&= \epsilon_{jab}\epsilon_{kcd} \{x_a p_b, x_c p_d\}_{\text{pb}} \\
&= \epsilon_{jab}\epsilon_{kcd} \left(x_a \{p_b, x_c p_d\}_{\text{pb}} + \{x_a, x_c p_d\}_{\text{pb}} p_b\right) \\
&= \epsilon_{jab}\epsilon_{kcd} \left(x_a x_c \{p_b, p_d\}_{\text{pb}} + x_a p_d \{p_b, x_c\}_{\text{pb}} + x_c p_b \{x_a, p_d\}_{\text{pb}} + p_d p_b \{x_a, x_c\}_{\text{pb}}\right) \\
&= \epsilon_{jab}\epsilon_{kcd}(-x_a p_d \delta_{bc} + x_c p_b \delta_{ad}) \\
&= x_a p_d(\delta_{jk}\delta_{ad} - \delta_{jd}\delta_{ak}) - x_c p_b(\delta_{jk}\delta_{bc} - \delta_{jc}\delta_{bk}) \\
&= x_a p_a \delta_{jk} - x_k p_j - x_b p_b \delta_{jk} + x_j p_k \\
&= x_j p_k - x_k p_j = \epsilon_{jkl} L_l.
\end{aligned} \tag{15}$$