

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte): Schwerpunkt und Trägheitsmoment

Der Schwerpunkt eines Körpers K ist durch

$$\vec{x}_s = \frac{1}{M} \int_K d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x} \quad (1)$$

gegeben. Dabei ist $\rho(\vec{x})$ die Massendichte des Körpers, und M die Gesamtmasse. Das Trägheitsmoment um die x_3 -Achse durch den Schwerpunkt ist

$$\Theta_{33} = \int_K d^3x \rho(\vec{x}) [(x_1 - x_{s1})^2 + (x_2 - x_{s2})^2] \quad (2)$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment Θ_{33} folgender homogener ($\rho = \text{const}$) Körper mit Gesamtmasse M :

- (a) (5 Punkte) der Halbkugel vom Radius a

$$\vec{x}(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0, a], \quad \vartheta \in [0, \pi/2], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Hinweise: Berechnen Sie zunächst das Volumen V der Halbkugel und damit $\rho = M/V$.

Das Volumenelement in den hier verwendeten Kugelkoordinaten ist $d^3\vec{x} = dr d\vartheta d\varphi r^2 \sin \vartheta$. Weiter gilt

$$\int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^3 \vartheta = \frac{2}{3}. \quad (4)$$

- (b) (5 Punkte) des geraden Kreiskegels vom Radius a und Höhe h

$$\vec{x}(R, \varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Dabei ist $z \in [0, h]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und für jedes z ist $R \in [0, az/h]$ (warum?).

Hinweis: Berechnen Sie zunächst wieder das Volumen des Kegels und damit $\rho = M/V$. Das Volumenelement der hier verwendeten Zylinderkoordinaten ist $d^3\vec{x} = dR d\varphi dz R$.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Satz von Steiner

Wir legen zunächst den Ursprung eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers, d.h. es gilt

$$\int_V d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x} = \vec{0}. \quad (6)$$

Der Trägheitstensor um den Schwerpunkt ist dann durch

$$\Theta_{jk}^{(S)} = \int_V d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta^{jk} - x^j x^k) \quad (7)$$

definiert.

- (a) (6 Punkte) Es sei dann \vec{r} der Ortsvektor eines beliebigen anderen festen Punktes P in diesem Körper. Wie hängen der Trägheitstensor $\Theta_{jk}^{(P)}$ bzgl. dieses Punktes

$$\Theta_{jk}^{(P)} = \int_V d^3x \rho(\vec{x}) [(\vec{x} - \vec{r})^2 \delta_{jk} - (x_j - r_j)(x_k - r_k)] \quad (8)$$

mit dem Trägheitstensor $\Theta_{jk}^{(S)}$ um den Schwerpunkt zusammen?

- (b) (4 Punkte) Das Trägheitsmoment um eine Achse in Richtung \vec{n} (mit $|\vec{n}| = 1$) durch den Schwerpunkt bzw. durch den Punkt P ist durch

$$\Theta_{\vec{n}}^{(S)} = \Theta_{jk}^{(S)} n_j n_k \quad \text{bzw.} \quad \Theta_{\vec{n}}^{(P)} = \Theta_{jk}^{(P)} n_j n_k \quad (9)$$

gegeben (wobei hier die Einsteinschen Summenkonvention gelten soll).

Was folgt aus der oben hergeleiteten Beziehung zwischen $\Theta_{jk}^{(S)}$ und $\Theta_{jk}^{(P)}$ für diese Trägheitsmomente um zwei zueinander parallele Achsen.

Bemerkung: Die entsprechende Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten ist als **Satz von Steiner** bekannt (Jakob Steiner, 1796-1863) oder **Parallelachsen-Theorem** bekannt.