

## Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 10

---

### Aufgabe 1 (10 Punkte): Poisson-Klammeralgebra

Es seien  $A, B$  und  $C$  beliebige Phasenraumfunktionen, also Funktionen von  $(q, p) \equiv (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln für Poisson-Klammern erfüllt sind:

(a) (2 Punkte)  $\{A, \lambda_1 B + \lambda_2 C\}_{\text{pb}} = \lambda_1 \{A, B\}_{\text{pb}} + \lambda_2 \{A, C\}_{\text{pb}}$ , wobei  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  beliebige Konstanten sind.

(b) (1 Punkt)  $\{B, A\}_{\text{pb}} = -\{A, B\}_{\text{pb}}$ .

(c) (4 Punkte)  $\{A, \{B, C\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{B, \{C, A\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} + \{C, \{A, B\}_{\text{pb}}\}_{\text{pb}} = 0$ . (Jacobi-Identität)

(d) (3 Punkte)  $\{AB, C\}_{\text{pb}} = A\{B, C\}_{\text{pb}} + \{A, C\}_{\text{pb}}B$ .

**Hinweis:** Die Rechnungen mit Poisson-Klammern werden erheblich vereinfacht, wenn man die Phasenraumvariablen wie folgt organisiert:  $(\eta_1, \dots, \eta_f, \eta_{f+1}, \dots, \eta_{2f}) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$  und die reelle  $(2f) \times (2f)$ -Matrix  $J_{ab}$  einführt mit

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0_{f \times f} & 1_{f \times f} \\ -1_{f \times f} & 0_{f \times f} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei  $0_{f \times f}$  die  $f \times f$ -Matrix mit allen Matrixelementen gleich 0 und  $1_{f \times f} = \text{diag}(1, \dots, 1)$  ( $f$ -dimensionale Einheitsmatrix) sind. Mit dieser Notation ist dann

$$\{A, B\}_{\text{pb}} = J_{\alpha\beta} (\partial_\alpha A) (\partial_\beta B), \quad (2)$$

wobei griechische Indizes von 1 bis  $2f$  laufen und  $\partial_\alpha A = \partial A / \partial \eta_\alpha$  ist. Auch hier wird wieder die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

Beim Beweis der Jacobi-Identität benötigt man dann nur noch, dass  $\partial_\alpha \partial_\beta A = \partial_\beta \partial_\alpha A$  und die Antisymmetrie von  $\hat{J}$ , also  $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$ .

**Bemerkung:** Mit den Identitäten (a)-(c) erweist sich die Poisson-Klammer als eine Lie-Algebra, die auf dem Vektorraum der Phasenraumfunktionen operiert.

Die Eigenschaft (d) macht die Poisson-Klammer zugleich zu einer sog. Derivation. Definiert man nämlich als **Lie-Ableitung** einer Phasenraumfunktion  $B$  nach  $A$  als

$$\mathcal{L}_A B = \{B, A\}_{\text{pb}}, \quad (3)$$

gilt für diesen Operator gemäß (d) nämlich die Produktregel

$$\mathcal{L}_C (AB) = A \mathcal{L}_C B + (\mathcal{L}_C A) B. \quad (4)$$


---

### Aufgabe 2 (10 Punkte): Poisson-Klammern und Drehimpuls

Es seien  $(\vec{x}, \vec{p})$  die kartesischen Koordinaten und die dazugehörigen kanonischen Impulse für ein einzelnes Teilchen im Sinne des Hamilton-Formalismus. Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammern der Drehimpuls-komponenten  $L_a = \epsilon_{abc} x_b p_c$  (wobei hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird) durch

$$\{L_j, L_k\}_{\text{pb}} = \epsilon_{jkl} L_l \quad (5)$$

gegeben sind.

**Tip:** Zeigen Sie zuerst, dass die „kanonischen Poisson-Klammerrelationen“

$$\{x_a, x_b\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{p_a, p_b\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{x_a, p_b\}_{\text{pb}} = \delta_{ab} \quad (6)$$

gelten und wenden Sie dann die allgemeinen Beziehungen aus Aufgabe 1 an.