H. van Hees **Sommersemester 2025**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3
Blätter 7+8 (Probeklausur)

Aufgabe 1 (10 Punkte): Grundlagen der Mechanik
Erläutern Sie stichpunktartig anhand der folgenden Fragen die Grundlagen der Mechanik.

(a) (3 Punkte) Wie werden Raum und Zeit in der Newtonschen Mechanik beschrieben?

(b) (4 Punkte) Wie lauten die Newtonschen Axiome?

(c) (3 Punkte) Wie lässt sich ein Inertialsystem konkret festlegen?

Hinweis: in dieser Teilaufgabe genügen qualitative Aussagen. Sie müssen keine mathematischen Herleitungen referieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte): Allgemeine Galilei-Transformation
Wir betrachten die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes in einem Inertialsystem. Die allgemeine Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen lautet

$$t' = t - a, \quad \vec{x}' = \hat{D}(\vec{x} - \vec{v}t - \vec{b}). \tag{1}$$

Dabei parametrisieren $a \in \mathbb{R}$ eine zeitliche und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ eine räumliche Translation, $\vec{v}$ einen Galilei-Boost und $\hat{D} \in \mathrm{SO}(3)$ eine Drehung. Wir bezeichnen diese Galilei-Transformation mit $G(a, \vec{b}, \vec{v}, \hat{D})$.
Wir schreiben die Transformation in Operatorschreibweise als

$$(t', \vec{x}') = G(a, \vec{b}, \vec{v}, \hat{D})(t, \vec{x}) \tag{2}$$

(a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen $G_3 = G_2 G_1$ mit $G_1 = G(a_1, \vec{b}_1, \vec{v}_1, \hat{D}_1)$ und $G_2 = G(a_2, \vec{b}_2, \vec{v}_2, \hat{D}_2)$ wieder eine Galilei-Transformation ist. Berechnen Sie dazu die Parameter a_3, $\vec{b}_3$, $\vec{v}_3$ und $\hat{D}_3$, indem sie die Transformationen $(t', \vec{x}') = G_1(t, \vec{x})$ und $(t'', \vec{x}'') = G_2(t', \vec{x}')$ konkret ausführen.

Lösung:

$$G_3 = G(a_3, \vec{b}_3, \vec{v}_3, \hat{D}_3) = G(a_1 + a_2, \vec{b}_1 + \hat{D}_1^{-1}(\vec{b}_2 - \vec{v}_2 a_1), \vec{v}_1 + \hat{D}_1^{-1}\vec{v}_2, \hat{D}_2\hat{D}_1) \tag{3}$$

(b) (5 Punkte) Verwenden Sie (3), um die Umkehrtransformation der Galileitransformation G_1 zu berechnen, indem Sie die Parameter für G_2 so bestimmen, dass $G_2 G_1 = \mathbb{1} = G(0, \vec{0}, \vec{0}, \mathbb{1})$ ergibt.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Kreisbahnen beim Keplerproblem

Betrachten Sie die Bewegung eines Planeten um die als „unendlich schwer" angenommene Sonne, d.h. die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld mit der im Ursprung des Bezugssystems festgehaltenen Sonne:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\mathrm{G}} = -\frac{\gamma M m}{r^3}\vec{x}. \tag{4}$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ erhalten ist.

(b) (2 Punkte) Wie lautet der Energiesatz? Geben Sie dazu das Potential der Gravitationskraft an.

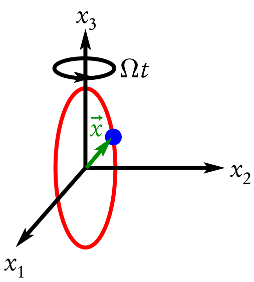
(c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durchlaufene Kreisbahn mit Radius $a = \text{const}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ a\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, indem Sie dies als Ansatz in (4) einsetzen. Bestimmen Sie daraus für vorgegebenen Radius a die Winkelgeschwindigkeit ω und damit die Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$.

(d) (3 Punkte) Erläutern Sie die 3 Keplerschen Gesetze anhand dieses Spezialfalls.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Massenpunkt auf rotierendem Kreis



Ein Massenpunkt bewege sich reibungsfrei auf einem um die x_3-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Kreis im homogenen Schwerefeld der Erde $F_G = -mg\vec{e}_3$ (also mit dem Potential $V = mgx_3$). Die Parametrisierung lautet

$$\vec{x} = \hat{D}_3(\Omega t)\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ 0 \\ a\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ 0 \\ a\sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{6}$$

und die Lagrange-Funktion ist durch

$$L = T - V = \frac{m}{2}a^2(\dot{\varphi}^2 + \Omega^2\cos^2\varphi) - mga\sin\varphi. \tag{7}$$

gegeben.

Hinweis: Sie müssen die Lagrange-Funktion nicht herleiten!

(a) (4 Punkte) Wie lautet die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$?

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion (Energie) und zeigen Sie explizit, dass sie erhalten ist. Warum weiß man das auch ohne Rechnung?

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Massenpunktes.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo1-l3-SS25/index.html`