Vorlesung Theoretische Physik 2 (11.04.2013)

(1) Newtonsche Postulate (Wiederholung)

(I) Es existiert ein Bezugssystem, in dem ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, in gleichförmig geradlinigen Bewegung (oder in der Ruhe) verharrt. (Inertialsystem)

(II) Für einen Körper konstanter Masse gilt

$$m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}, \qquad (1)$$

wobei $\vec{F}$ die gesamte auf diesen Körper ein wirkende Kraft ist.

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t) \qquad (2)$$

(momentane Geschwindigkeit)

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \text{ Beschleunigung} \qquad (3)$$

$\vec{x}$: Ortsvektor bzgl einem Inertialsystem

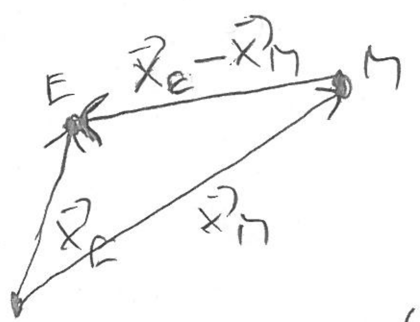
(III) Besteht zwischen zwei Körpern eine Wechselwirkung, d.h. übt Körper 2 auf Körper 1 eine Kraft $\vec{F}_1^{(2)}$ aus, so übt auch Körper 1 auf Körper 2 eine Kraft $\vec{F}_2^{(1)}$ aus, und es gilt:

$$\vec{F}_2^{(1)} = -\vec{F}_1^{(2)} \quad (\text{"actio = reactio"})$$

<u>Beispiel</u>: Gravitationskraft zwischen Erde und Mond

$$\vec{F}_{Mond}^{(Erde)} = -\gamma\, m_{Mond}\, m_{Erde} \frac{\vec{x}_{Mond} - \vec{x}_{Erde}}{|\vec{x}_{Mond} - \vec{x}_{Erde}|^3}$$

$$= -\vec{F}_{Erde}^{(Mond)}$$



(4) Bewegung im Nichtinertialsystem

(a) Rotation

Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ kartesische Vektoren, die in einem Inertial-system (Laborsystem) ruhen und $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ solche, die sich relativ zum Inertialsystem drehen, d.h. sie sind zeitabhängig, und es gilt für alle Zeiten

$$\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_k' = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}, \quad j,k \in \{1,2,3\} \qquad (4)$$

Beispiel

Koordinaten eines Beobachters auf einem rotierenden Karussell

Betrachte beliebigen zeitabhängigen Vektor $\vec{A}$. Im Bezugssystem des rotierenden Bezugssystems wird der Beobachter Komponenten A_j' verwenden:

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^{3} A_j' \vec{e}_j' = A_1' \vec{e}_1' + A_2' \vec{e}_2' + A_3' \vec{e}_3' \qquad (5)$$

Dieser Beobachter wird die zeitliche Änderung von $\vec{A}$ als die Änderung seiner Komponenten A_j' wahrnehmen. Wir definieren daher die Zeitableitung bzgl. des rotierenden Beobachters als

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B = \sum_{j=1}^{3} \dot{A}_j' \vec{e}_j' = \dot{A}_1' \vec{e}_1' + \dot{A}_2' \vec{e}_2' + \dot{A}_3' \vec{e}_3', \qquad (6)$$

denn für ihn sind die $\vec{e}_j'$ zeitunabhängig. Dabei steht B für "beschleunigtes Bezugssystem".

Um die Bewegungsgleichung zu formulieren, brauchen wir aber ③ die Beschleunigung im <u>Inertialsystem</u>, das wir als das "Laborsystem" bezeichnen wollen. Dazu brauchen wir die Zeitableitungen von Vektoren in diesem Laborsystem:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3} \left(\dot{A}'_k \vec{e}\,'_k + A'_k \dot{\vec{e}}\,'_k \right) \qquad (7)$$

$$= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + A'_1 \dot{\vec{e}}\,'_1 + A'_2 \dot{\vec{e}}\,'_2 + A'_3 \dot{\vec{e}}\,'_3$$

Die Zeitableitungen können wir wieder als Linearkombination der $\vec{e}\,'_j$ darstellen, da diese eine Basis bilden:

$$\dot{\vec{e}}\,'_j = \sum_{k=1}^{3} c_{jk} \vec{e}\,'_k \qquad (8)$$

Nun gilt $\vec{e}\,'_j \cdot \vec{e}\,'_k = \delta_{jk} = \text{const}$

$$\dot{\vec{e}}\,'_j \cdot \vec{e}\,'_k + \vec{e}\,'_j \cdot \dot{\vec{e}}\,'_k = 0$$

$$\Rightarrow c_{jk} + c_{kj} = 0 \Rightarrow \boxed{c_{jk} = -c_{kj}} \qquad (9)$$

c_{jk} ist antisymmetrische Matrix

$$\Rightarrow \hat{C} = (c_{jk})$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_3 & -\omega'_2 \\ -\omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>NB</u>

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \omega_i \qquad (11)$$

Levi-Civita-Symbol

$\varepsilon_{123} = +1$ und ansonsten total antisymmetrisch unter Vertauschung von beliebigen Index-paaren, e.g.

$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$

usw.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}\,'_1 \\ \dot{\vec{e}}\,'_2 \\ \dot{\vec{e}}\,'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_3 & -\omega'_2 \\ -\omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \\ \vec{e}\,'_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega'_3 \vec{e}\,'_2 - \omega'_2 \vec{e}\,'_3 \\ -\omega'_3 \vec{e}\,'_1 + \omega'_1 \vec{e}\,'_3 \\ \omega'_2 \vec{e}\,'_1 - \omega'_1 \vec{e}\,'_2 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + A_1'\left(\omega_3'\vec{e}_2{}' - \omega_2'\vec{e}_3{}'\right)$$
$$+ A_2'\left(-\omega_3'\vec{e}_1{}' + \omega_1'\vec{e}_3{}'\right)$$
$$+ A_3'\left(\omega_2'\vec{e}_1{}' - \omega_1'\vec{e}_2{}'\right)$$

sortiere nach Basisvektoren ⇒

$$= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + \left(\omega_2' A_3' - \omega_3' A_2'\right)\vec{e}_1{}'$$
$$+ \left(\omega_3' A_1' - \omega_1' A_3'\right)\vec{e}_2{}'$$
$$+ \left(\omega_1' A_2' - \omega_2' A_1'\right)\vec{e}_2{}'$$

Betrachte Vektor
$$\vec{\omega} = \sum_{k=1}^{3} \omega_k' \vec{e}_k{}'$$
Dann lautet die obige Gleichung

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_B + \vec{\omega}\times\vec{A}} \qquad (12)$$

Betrachte Vektor $\vec{B}$, der fest mit rotierendem System verbunden ist. Dann ist definitionsgemäß

$$\left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_B = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\vec{B}}{dt}\right|_L = \vec{\omega}\times\vec{B} \qquad (13)$$

Im Laborsystem dreht sich der Vektor $\vec{B}$. In einem Zeitintervall dt bewegt er sich um

$$d\vec{B} = dt\,(\vec{\omega}\times\vec{B}), \qquad (14)$$

$d\ldots dt\vec{\omega}\times\vec{B}$ beschreibt eine infinitesimale Drehung.

Weiter ist $\vec{B} = \vec{B}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\omega}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\omega} + \vec{B}_\perp$

senkrecht zu $\vec{\omega}$

$$d\vec{B} = d\vec{B}\cdot\frac{\vec{\omega}}{\omega}\,\frac{\vec{\omega}}{\omega} + d\vec{B}_\perp = d\vec{B}_\perp \text{, denn}$$

$$d\vec{B}\cdot\vec{\omega} = dt\,(\vec{\omega}\times\vec{B})\cdot\vec{\omega} = 0 \text{, denn } \vec{\omega}\times\vec{B} \perp \vec{\omega}, \vec{B}$$

Betrachte Ebene $\perp \vec{\omega}$:

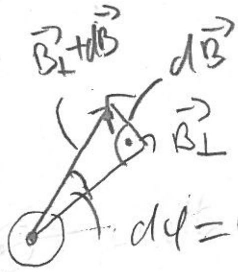
weist aus Papier heraus

$\downarrow$

$\vec{\omega}\ \odot$; $d\vec{B} \doteq dt(\vec{\omega}\times\vec{B}) = dt\cdot(\vec{\omega}\times\vec{B}_\perp)$

$\perp \vec{B}_\perp$

$\boxed{\text{Richtung von } d\vec{B} \iff \text{Rechtehandregel}}$



; $|d\vec{B}| = |\vec{B}_\perp|\cdot|\vec{\omega}|\,dt$

$= |\vec{B}_\perp|\,d\varphi$

$\Rightarrow d\varphi = \omega\,dt$ infinitesimaler Drehwinkel

$\Rightarrow d\vec{B} = dt\,\vec{\omega}\times\vec{B}$ beschreibt infinitesimale Drehung um eine Achse in Richtung $\vec{\omega}$ um den infinitesimalen Drehwinkel $dt\,\omega$. Der Drehsinn ist durch Rechte-Hand-Regel festgelegt.

Im folgenden brauchen wir die Beschleunigung im Inertialsystem, also

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_L \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_L$$

ausgedrückt durch die Komponenten bzgl. des rotierenden Systems. Mit (12) gilt

$$\vec{v} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_L = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_B + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (15)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dr'_j}{dt}\,\vec{e}\,'_j + (\vec{\omega}\times\vec{r})'_j\,\vec{e}\,'_j\right)$$

Führe nun Operatoren

$$\hat{D}_B \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_B \quad \text{und} \quad \hat{D}_L \vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_L + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (16)$$

ein. Offenbar gilt

$$\hat{D}_L = \hat{D}_B + \vec{\omega}\times \quad (17)$$

Diese Operatoren sind offenbar linear (Übung)

Damit folgt

$$\vec{a} = \hat{D}_L \vec{v} = \hat{D}_L (\hat{D}_L \vec{r}) \left(= \hat{D}_L^2 \vec{r}\right)$$

$$= \hat{D}_L (\hat{D}_B \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= (\hat{D}_B + \vec{\omega}\times)(\hat{D}_B \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= \hat{D}_B^2 \vec{r} + \hat{D}_B(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times(\hat{D}_B \vec{r})$$
$$+ \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad (18)$$

Für $\hat{D}_B$ gilt die Produktregel für Vektorprodukte:

$$\hat{D}_B(\vec{A}\times\vec{B}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dt}\left[(\vec{A}\times\vec{B})'_j\right] \vec{e}\,'_j$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \vec{e}\,'_j \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} \frac{d}{dt}(A'_k B'_l)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \vec{e}\,'_j \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} (\dot{A}'_k B'_l + A'_k \dot{B}'_l)$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_B \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}\Big|_B$$

$$\Rightarrow \hat{D}_B(\vec{A}\times\vec{B}) = (\hat{D}_B\vec{A})\times\vec{B} + \vec{A}\times(\hat{D}_B \vec{B}) \quad (19)$$

Das angewandt in (18) liefert

$$\vec{a} = \hat{D}_B^2\vec{r} + (\hat{D}_B\vec{\omega})\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times(\hat{D}_B\vec{r}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \ddot{\vec{r}}' + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}'\times\vec{r}'}_{\text{„lineare Beschleunigung"}} + \underbrace{2\vec{\omega}'\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{„Coriolis-Beschleunigung"}} + \underbrace{\vec{\omega}'\times(\vec{\omega}'\times\vec{r}')}_{\text{„Zentripetal-Beschleunigung"}} \quad (20)$$

Es gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung im Inertialsystem:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Damit gilt im rotierenden System

$$m\left[\ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}}'\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}'\times\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega}'\times(\vec{\omega}'\times\vec{r}')\right] = \vec{F}' \quad (21)$$

Das können wir auch formal wie eine Newtonsche Bewegungsgleichung schreiben:

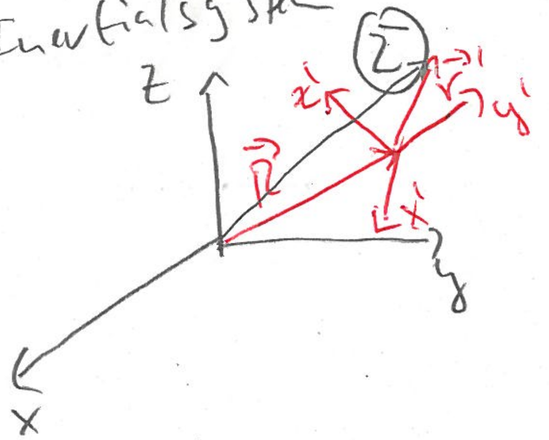
$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}' - m\dot{\vec{\omega}}'\times\vec{r}' - 2m\vec{\omega}'\times\dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega}'\times(\vec{\omega}'\times\vec{r}')} \quad (22)$$

Es treten also in beschleunigten Bezugssystem außer den echten Kräften $\vec{F}'$, die aufgrund der Wechselwirkung des Betrachteten Teilchens mit anderen Körpern entstehen (z.B. Gravitation oder elektromagnetische Kräfte) auch noch die sog. Trägheits- oder Scheinkräfte auf, die aufgrund der Beschleunigung des Bezugssystems gegen die Inertialsysteme entstehen

Beliebig beschleunigte Bezugssysteme

Bleibt auch der Koordinatenursprung des beschleunigten Bezugs-systems nicht fest, sondern bewegt sich, ergibt sich folgende Ergänzung zu den Trägheitskräften:

Sei $\vec{R}(t)$ der Ursprung des i.a. Nichtinertialsystems Σ' im Inertialsystem



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

Dabei gilt dann

$$m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\Big|_L = \vec{F} - m \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big|_L$$

bzw:

$$m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}\Big|_B = \vec{F} - m \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\Big|_L - m \frac{d\vec{\omega}'}{dt}\Big|_B - 2m\,\vec{\omega}' \times \frac{d\vec{r}'}{dt}\Big|_B - m\,\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}')$$

NB Bewegungsgleichungen invariant unter allgemeinen Galilei-Transformationen, also

$$\vec{x}' = \hat{R}\,\vec{x} + \vec{d} + \vec{V} t \quad \text{mit}$$

$\hat{R}$: konstante Drehung: $\dot{\hat{R}} = 0$ $\Rightarrow \vec{\omega} \equiv 0$; $\vec{d}$: konst $\Rightarrow \ddot{\vec{d}}\big|_L \equiv 0$

$\vec{V} = \text{const} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\vec{V} t) \equiv 0$. Bildet Inertialsysteme auf Inertialsysteme ab!