Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 6 (02.12.-06.12.2013)

Präsenzübungen

(P16) Energiedissipation

Auf einen Massepunkt wirke zum einen eine konservative Kraft

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

und zum anderen eine Reibungskraft der allgemeinen Form

$$\vec{F}_r = -A(|\vec{v}|)\vec{v}, \quad A(|\vec{v}|) \geq 0$$

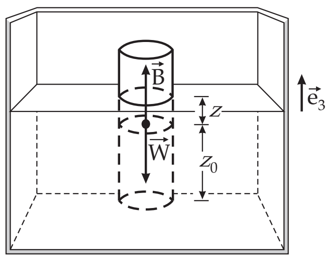
ein. Berechnen Sie die Zeitableitung der Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}).$$

Gilt der Energieerhaltungssatz?

(P17) Schwimmender Zylinder

Ein Zylinder schwimmt mit vertikaler Achse in einer Flüssigkeit der Dichte σ. Er besitzt eine Masse m und eine Querschnittsfläche A. Wie groß ist die Schwingungsdauer, wenn man ihn leicht niederdrückt? Vernachlässigen Sie jegliche Reibungseffekte.



(P18) Resonanzkatastrophe

Ein Oszillator mit der Eigenfrequenz ω besitze keine Dämpfung und werde mit einer harmonischen, äußeren Kraft derselben Frequenz ω (z.B. durch ein Schwungrad) erregt. Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$) an und zeigen Sie, daß für lange Zeiten die Amplitude des Oszillators als Funktion der Zeit wie

$$x(t) \underset{t\to\infty}{\cong} \frac{f_0 t}{2\omega}\sin(\omega t)$$

anwächst. Zeichnen Sie die Funktion. Geben Sie dazu eine physikalische Interpretation.

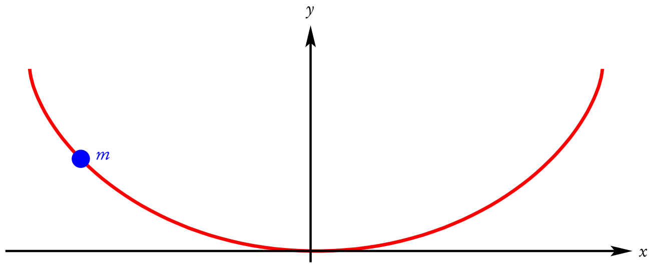
Hausübungen (Abgabe: 13.12.2013)

(H13) Schwingung auf einer Tautochrone (3 Punkte)

Eine Masse m gleite reibungsfrei auf einer zykloidenförmig geformten Schiene

$$\begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda + \sin\lambda \\ 1 - \cos\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

im homogenen Schwerefeld der Erde $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ (s. Abbildung). Zeigen Sie, daß dieser Massenpunkt unabhängig von der Amplitude (vorausgesetzt der Massenpunkt bleibt auf der Schiene) harmonische Schwingungen ausführt.



Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie die Gesamtenergie des Massepunktes als Funktion von λ und $\dot{\lambda}$.

(b) Zeigen Sie, daß sich mit der Substitution $u = \sin(\lambda/2)$ die Energie in der Form

$$E = 8mR^2\dot{u}^2 + 2mgRu^2$$

schreiben läßt.

(c) Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz, um die Bewegungsgleichung für u aufzustellen und zeigen Sie so, daß es sich bei der Bewegung wirklich um eine harmonische Schwingung handelt. Geben Sie Kreisfrequenz und Schwingungsdauer an.

(d) Zeigen Sie, daß ein Körper, der von irgendeinem Punkt der Zykloide aus der Ruhe losgelassen wird, unabhängig von der Startposition stets nach der gleichen Laufzeit bei $x = y = 0$ ankommt.

Bemerkung: Daher stammt der Ausdruck „Tautochrone“ von griech. tauto (das Gleiche) und chronos (Zeit).

(e) wie groß ist diese Laufzeit?.

(H14) Schwingung mit Reibung (4 Punkte)

Eine Masse m sei mit einer Feder (Federkonstante k) verbunden und bewege sich entlang der x-Achse auf einer Ebene. Der Haftreibungskoeffizient sei μ_h und der Gleitreibungskoeffizient sei μ_g. Geben Sie die Auslenkung der Feder x als eine Funktion der Zeit t an. Zeichnen Sie die Funktion $x(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{k/m}$. Die Anfangsbedingungen seien $x(t=0) = x_0 = 10\text{m}$ und $\dot{x}(t=0) = 0\ \text{m/s}$. Außerdem werden die Konstanten so gewählt, daß $\mu_g mg/k = 1\ \text{m}$ und $\mu_h mg/k = 2\ \text{m}$. Wann kommt die Masse zum Stehen?

Hinweis: *Ruht* eine Masse auf einer ebenen Fläche, so wirkt einer horizontalen Verschiebung der Masse die **Haftreibungskraft** $F_h = \mu_g mg$ entgegen. *Bewegt* sich diese Masse auf der ebenen Fläche, so wirkt die **Gleitreibungskraft** $\vec{F}_g = -\mu_g mg\vec{v}/|\vec{v}|$.

(H15) Alternativer Zugang zur Resonanzkatastrophe (3 Punkte)

Betrachten Sie eine gedämpfte Schwingung mit einer periodischen äußeren Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0\cos(\alpha t).$$

Lösen Sie das allgemeine Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Zeigen Sie, daß für $\alpha = \omega$ diese Lösung im Limes $\gamma \to 0$ in die Lösung von (P18) (s.o.) übergeht.
