Lineare gew. Differentialgln.

Wir betrachten lineare gew. DGLn 2. Ordnung. Die meisten Resultate lassen sich auf Gln. n-ter Ordnung verallgemeinern. Die Normalform lautet

$$y''(x) + u(x)\, y'(x) + v(x)\, y(x) = w(x) \qquad (1)$$

Falls $w=0$, heißt die DGL homogen, andernfalls inhomogen.

(1) Falls y_1 und y_2 zwei Lsgn der DGL (1) sind, dann ist

$$y_3(x) = y_2(x) - y_1(x)$$

Lsg. der homogenen Gl. Der Beweis ist sehr einfach:

$$y_3'' = y_2'' - y_1'' \text{ usw.}$$

$$\Rightarrow y_2'' - y_1'' + u(y_2' - y_1') + v(y_2' - y_1') = w - w = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

(2) Die Lsgn. der homogenen Gl. bilden einen Vektorraum. Der Beweis geht analog wie der von (1).

(3) Der VR der Lsgn. ist zweidimensional. Zum Beweise bilden wir die Wronskideterminante zu zwei Lösungen der hom. Gl.:

$$W(y_1; y_2) := \det \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = y_1' y_2 - y_2' y_1$$

Die Ableitung ist

$$W'(y_1; y_2) = y_1'' y_2 + y_1' y_2' - y_2'' y_1 - y_1' y_2'$$

$$= y_1'' y_2 - y_2'' y_1$$

②

$$\Rightarrow W'(y_1; y_2) = -y_2(y_1' \tau + \cancel{y_1 \sigma}) + y_1(y_2' \tau + \cancel{y_2 \sigma})$$

$$= -\tau\, W(y_1; y_2)$$

Falls $W \neq 0$ für $x = x_0$, so gilt $W \neq 0$ in einer Umgebung von x_0, und

$$\frac{W'(y_1; y_2)}{W(y_1; y_2)} = -\tau$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{W(y_1; y_2)}{W(y_1; y_2)|_{x=x_0}}\right) = -\int_{x_0}^{x} dx'\, \tau(x')$$

oder $W(y_1; y_2) = W(y_1; y_2)|_{x=x_0} \exp\left[-\int_{x_0}^{x} dx'\, \tau(x')\right]$

$\Rightarrow W(y_1; y_2) \neq 0$ für alle x.

Sei nun y_3 irgendeine Lösung der hom. Gl. Diese ist eindeutig bestimmt, wenn wir $y_3(x_0)$ und $y_3'(x_0)$ vorgeben. Sie kann als Linearkombination von y_1 und y_2 dargestellt werden, falls $W(y_1; y_2) \neq 0$. Es ist nämlich mit $y_3 = A y_1 + B y_2$

$$\Rightarrow y_3(x_0) = A y_1(x_0) + B y_2(x_0)$$

$$y_3'(x_0) = A y_1'(x_0) + B y_2'(x_0)$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_3'(x_0) \\ y_3(x_0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \\ y_1(x_0) & y_2(x_0) \end{pmatrix}}_{\hat{A}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Da $W \neq 0$, hat die Matrix $\hat{A}$ ein Inverses, so daß

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{A}^{-1} \begin{pmatrix} y_3'(x_0) \\ y_3(x_0) \end{pmatrix}$$

die damit bestimmt ist.
Da es nach dem Satz von Picard-Lindelöf für hinreichend gutartige DGLn (also hinreichend stetige a und v) immer eine Lösung der Anfangswertprobleme

$$y_1(x_0) = 0 \quad ; \quad y_2(x_0) = 1$$

$$y_1'(x_0) = 1 \quad ; \quad y_2'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2)\big|_{x=x_0} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ zwei linear unabh. Lösungen. qed.

(iii) Zusammen mit (i) folgt, daß jede Lösung y der inhom. Gl. die Gestalt

$$y = y_I + A\, y_1 + B\, y_2$$

haben muß, wenn y_I irgendeine spezielle Lsg. der inh. Gl. und y_1 und y_2 zwei linear unabh. Lsgn. der hom. Gl. sind.