

# Einführung in die Elementarteilchenphysik

## Lösungen zu Übungsaufgaben 1

Hendrik van Hees

<http://theory.gsi.de/~vanhees/index.html>

27.04.2001

Wir setzen im folgenden wie in der Vorlesung stets  $c = 1$  und  $\hbar = 1$  (natürliche Einheiten). Weiter benutzen wir die in der Vorlesung verwendeten Konventionen, d.h. die Metrik ist  $(g^{\mu\nu}) = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Bzgl. der  $\gamma$ -Matrizen (Cliffordalgebra zur Minkowskimetrik) sei auf [IZ80] verwiesen.

### 1 Lorentztransformationen

In der Vorlesung wurde die Lorentztransformation, die einen Boost entlang der  $x$ -Achse beschreibt, in der Form

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

angegeben. Die Geschwindigkeit des Ursprungs des neuen Systems, gemessen im alten Bezugssystem ist

$$v_x = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} = \tanh \eta \Leftrightarrow \eta = \text{artanh } v_x. \quad (2)$$

Jetzt müssen wir nur die Regel zum „Indexziehen“ benutzen, d.h. wenn man irgendeine Tensorkomponente oder eine Lorentztransformationsmatrix gegeben hat, wird ein Index von oben nach unten gemäß der Regel  $T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu$  gezogen. Entsprechend gilt für das Heben eines Index' von unten nach oben  $T^\mu = g^{\mu\nu} T_\nu$ , wobei stets über gleichlautende Indizes über die vier Komponenten, nach der Konvention von 0 bis 3 durchnummeriert, zu summieren ist. Es ist dabei wichtig, daß eine solche Summation *niemals* über zwei Indizes geführt werden darf, wenn beide oben oder beide unten stehen!

Die Aufgabe ist also damit auf eine einfache Matrizenmultiplikation reduziert:

$$(\Lambda^{\mu\nu}) = (\Lambda^\mu{}_\rho)(g^{\rho\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & -\cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & -\cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 (\Lambda_{\mu}{}^{\nu}) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

## 2 Pseudoorthogonalität

Die Gleichung

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\alpha} \tag{5}$$

folgt sofort durch Matrizenmultiplikation und der allgemeinen Beziehung  $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$ . Man bezeichnet diese Eigenschaft in der Mathematik als „Pseudoorthogonalität“ der Lorentztransformationen. Die Lorentztransformationen lassen nämlich das Pseudoskalarprodukt zwischen Vierervektoren, also

$$x \cdot y = x_{\mu} y^{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} = x^0 y^0 - \vec{x} \vec{y} \tag{6}$$

unverändert, ganz analog zur Tatsache, daß Drehungen (orthogonale Transformationen) im dreidimensionalen Raum das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt  $\vec{x} \vec{y}$  unverändert lassen.

## 3 Das Kleinsche Paradoxon

Wir betrachten den Tunneleffekt für die Diracgleichung. Dazu ändern wir obdA. die Aufgabe dahingehend ab, daß das rein elektrostatische Potential durch

$$e\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ V & \text{für } z \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

ist. Dies ist bequem, weil die benutzte Standarddarstellung der Diracmatrizen mit den Paulimatrizen konstruiert ist, bei denen die Quantisierungsrichtung des Spins der Elektronen in  $z$ -Richtung gewählt ist.

Die Diracgleichung lautet in kovarianter Schreibweise

$$(i\hat{\partial} - e\hat{A} - m)\psi = 0. \tag{8}$$

In unserem Fall ist  $(A^{\mu}(x)) = \Phi(\vec{x})$ .

Die Energieeigenlösungen haben die Form

$$\psi(x) = u(\vec{x}) \exp(-iEt), \tag{9}$$

wobei wir hier und im folgenden wieder  $\hbar = c = 1$  setzen wollen.

Die Ortswellenfunktion setzen wir entsprechend der Konstanz des Potentials in beiden Halbräumen in der Form

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} u_{\text{ein}} \exp(ip_{<}z) + u_{\text{ref}} \exp(-ip_{<}z) & \text{für } z < 0 \\ u_{\text{d}} \exp(ip_{>}) & \text{für } z \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

an.

Die Diracgleichungen für die Amplituden lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (E\gamma^0 - p_{<}\gamma^3 - m)u_{\text{ein}} &= 0 \\ (E\gamma^0 + p_{<}\gamma^3 - m)u_{\text{ref}} &= 0 \\ [(E - V)\gamma^0 - p_{>}\gamma^3 - m]u_{\text{d}} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß die Diracgleichungen (11) für den Halbraum  $z < 0$ , verlangen, daß

$$E^2 - p = m^2 \Leftrightarrow p = \pm p_{<} = \pm \sqrt{E^2 - m^2} \quad (12)$$

sein muß<sup>1</sup>, und wir haben die Lösung entsprechend als Superposition aus einem reflektierten (Amplitude  $u_{\text{ref}}$ ) und einem einfallenden Anteil angesetzt.

Genauso ergibt sich für die durchlaufende Welle aus der Diracgleichung die Beziehung

$$p_{>}^2 = (E - V)^2 - m^2. \quad (13)$$

Die Stetigkeit der Wellenfunktion bei  $z = 0$  fordert nun, daß

$$u_{\text{ein}} + u_{\text{ref}} = u_{\text{d}} \quad (14)$$

ist. Die beiden ersten Gleichungen (11) addiert ergibt nun

$$(E\gamma^0 - m)(u_{\text{ein}} + u_{\text{ref}}) = p_{<}\gamma^3(u_{\text{ein}} - u_{\text{ref}}), \quad (15)$$

während mit (14) aus der dritten Gleichung (11)

$$(E\gamma^0 - m)(u_{\text{ein}} + u_{\text{ref}}) = (V\gamma^0 + p_{>}\gamma^3)(u_{\text{ein}} + u_{\text{ref}}) \quad (16)$$

folgt. Fassen wir (15) und (16) zusammen, ergibt sich schließlich

$$[V\gamma^0 + (p_{<} + p_{>})\gamma^3]u_{\text{ref}} = -[V\gamma^0 - (p_{<} - p_{>})\gamma^3]u_{\text{ein}}. \quad (17)$$

Dies wollen wir nun nach  $u_{\text{ref}}$  auflösen. Dazu multiplizieren wir die linke Seite mit  $V\gamma^0 + (p_{<} + p_{>})\gamma^3$ . Wegen der Antikommutativität von  $\gamma^0$  und  $\gamma^3$  ergibt sich<sup>2</sup>

$$(V\gamma^0 + (p_{<} + p_{>})\gamma^3)^2 = V^2 - (p_{<} + p_{>})^2. \quad (18)$$

Beim Multiplizieren entsteht auf der rechten Seite der Ausdruck

$$[V\gamma^0 + (p_{<} + p_{>})\gamma^3]u_{\text{ref}}[V\gamma^0 - (p_{<} + p_{>})\gamma^3]u_{\text{ref}} = 2V\gamma^0(E\gamma^0 - p_{<}\gamma^3), \quad (19)$$

<sup>1</sup>Man erkennt dies sofort durch Multiplikation mit  $E\gamma^0 \mp p_{<}\gamma^3 + m$  und Ausnutzen der Antikommutatorrelationen für die  $\gamma$ -Matrizen  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$

<sup>2</sup>Seien  $a^\mu$  und  $b^\mu$  irgendwelche Vektoren, dann gilt:  $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = a_\mu b_\nu [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2a \cdot b$ . Für  $a = b$  ist insbesondere  $\not{a}^2 = a^2$ .

und mit Hilfe der ersten Gleichung (11) haben wir schließlich

$$u_{\text{ref}} = -\frac{2mV\gamma^0}{V^2 - (p_{<} + p_{>})^2} u_{\text{ein}}. \quad (20)$$

Die Amplitude der durchlaufenden Welle ergibt sich dann aus (14).

Laut Aufgabenstellung soll nun der Fall  $E < V$  betrachtet werden. Im Gegensatz zur analogen Aufgabe für die Schrödingergleichung, wo dies der Situation des *Tunneleffekts* entspricht, müssen wir aber in unserem Fall der Diracgleichung auch hier eine Fallunterscheidung durchführen.

### 3.1 Normaler Tunneleffekt

Dazu betrachten wir (13) genauer. Sei zunächst  $0 < V - E < m$ . Dann ist  $p_{>}$  rein imaginär, und wir müssen es positiv imaginär wählen, damit die Wellen für  $z > 0$  exponentiell gedämpft sind, weil wir andernfalls keine „auf die  $\delta$ -Funktion normierbaren“ Zustände hätten, d.h. in diesem Fall ist eindeutig

$$p_{>} = i\mu = i\sqrt{m^2 - (E - V)^2}. \quad (21)$$

Dies ist genau der Fall, den wir von der Schrödingergleichung her kennen: Für ein klassisches Teilchen wäre es aufgrund des Energiesatzes verboten, daß es den Potentialwall überwindet, und es würde an der Ebene  $z = 0$  reflektiert, es könnte niemals in den Bereich  $z > 0$  eindringen. Quantentheoretisch gibt es aber eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in diesem „klassisch verbotenen Bereich“ zu finden.

Die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten werden i.a. durch die Teilchenströme definiert. Dazu erinnern wir uns, daß der Strom der Diracwellenfunktion durch

$$\vec{j}(x) = \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi \quad (22)$$

gegeben ist. Jetzt ist es bequem, einen konkreten Fall zu betrachten. Dazu sei  $u_{\text{ein}}$  die Amplitude für ein Elektron (positive Energie) mit Spin up  $\sigma_3 = +1/2$ . Wie wir gleich sehen werden, ist die absolute Normierung nicht relevant, so daß wir schreiben können

$$u_{\text{ein}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_{<}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Mit (20) erhalten wir für die Amplitude der reflektierten Welle

$$u_{\text{ref}} = -\frac{2mV}{V^2 - (p_{<} + i\mu)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p_{<}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Mit (14) erhalten wir auch die Amplitude der durchlaufenden Welle  $u_d$ . Mit  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  finden wir aus der Definition (22) des Stromes, der in unserem Falle natürlich in die  $z$ -Richtung weist:

$$j_{\text{ein}} = -j_{\text{ref}} = 2\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}, \quad j_d = 0. \quad (25)$$

Der Reflexions- und Durchlaßkoeffizient sind definiert durch

$$R = \frac{|\dot{j}_{\text{ref}}|}{\dot{j}_{\text{ein}}} = 1, D = \frac{\dot{j}_{\text{d}}}{\dot{j}_{\text{ein}}} = 0. \quad (26)$$

Dies ist identisch zu dem Resultat im nichtrelativistischen Fall der Schrödingergleichung, und es treten keinerlei paradoxe Eigenschaften auf.

### 3.2 Kleinsches Paradoxon

Betrachten wir jedoch nun den Fall  $V - E > m$ , so ergeben sich wieder ebene Wellenlösungen für  $z > 0$ ! Wie wir sehen werden, bedeutet dies, daß ein nichtverschwindender Elektronenstrom auch im klassisch verbotenen Bereich  $z > 0$  auftritt, *obwohl die Potentialbarriere  $V$ , verglichen mit dem Fall des „normalen Tunneleffekts“, der für  $0 < V - E < m$  auftritt, größer wird!*

Rein mathematisch gesehen gibt es kein Problem, denn wir haben für  $V - E > m$  aus (13)

$$p_{>}^{\pm} = \pm \sqrt{(E - V)^2 - m^2}. \quad (27)$$

Da nun in beiden Halbräumen echte ebene Wellen und keine exponentiell gedämpfte Lösung vorliegt, ist es nun übersichtlicher, die Lösungen etwas anders zu parametrisieren als im obigen Fall, und zwar, indem wir ansetzen:

$$u_{\text{ref}} = a\gamma^0 u_{\text{ein}}, \quad u_{\text{d}} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_{>}/(E - V + m) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

wobei die erste Gleichung aus (20) folgt. Wir lösen aber die Stetigkeitsbedingung (14) direkt, indem wir die Komponenten von (28) zum Koeffizientenvergleich nutzen:

$$1 + a = b, \quad 1 - a = rb \quad \text{mit} \quad r = \frac{p_{>}}{p_{<}} \frac{E + m}{E - V + m}. \quad (29)$$

Es folgt durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$a = \frac{1 - r}{1 + r}, \quad b = \frac{2}{1 + r}. \quad (30)$$

Für die Ströme ergibt sich mit dieser Parametrisierung gemäß (22)

$$\dot{j}_{\text{ref}} = -\frac{(1 - r)^2}{(1 + r)^2} \dot{j}_{\text{ein}}, \quad \dot{j}_{\text{d}} = \frac{4r}{(1 + r)^2} \dot{j}_{\text{ein}}. \quad (31)$$

Die Stromerhaltung ist stets erfüllt:

$$\dot{j}_{\text{ein}} + \dot{j}_{\text{ref}} = \left(1 - \frac{(1 - r)^2}{(1 + r)^2}\right) \dot{j}_{\text{ein}} = \dot{j}_{\text{d}}. \quad (32)$$

Durchlaß- und Reflexionskoeffizient sind wieder durch (26) gegeben:

$$R = \frac{(1 - r)^2}{(1 + r)^2}, \quad D = \frac{4r}{(1 + r)^2}. \quad (33)$$

Man rechnet sofort nach, daß stets

$$R + D = 1 \quad (34)$$

gilt.

### 3.2.1 Versuch einer Einteilcheninterpretation

Nun ist die Einteilcheninterpretation durch Wellenpakete gerechtfertigt, und diese lassen sich aus den hier berechneten verallgemeinerten Impulseigenzuständen durch *Fouriertransformation* gewinnen. Einem klassischen Teilchen mit einem bestimmten Impuls kommt nun ein im Impulsraum gut lokalisierter Zustand nahe, z.B. ein Gaußsches Wellenpaket. Der Schwerpunkt dieses Wellenpakets bewegt sich nun im Halbraum  $z > 0$  mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{\partial p_{<}^{pm}}{\partial E} = \mp \frac{V - E}{\sqrt{(E - V)^2 - m^2}}. \quad (35)$$

Voraussetzungsgemäß ist nun  $V - E > 0$ .

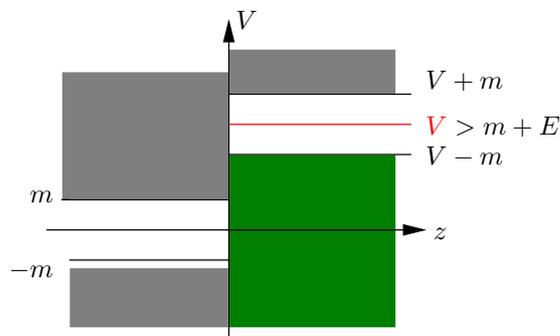
Wollen wir die strikte Einteilcheninterpretation der Wellenfunktion aufrecht erhalten, müssen wir nun fordern, daß im Halbraum  $z > 0$  gemäß der Anfangsbedingung, daß ein Elektron vom Halbraum  $z < 0$  einfällt und zuvor kein Elektron bei  $z > 0$  vorhanden war, müssen wir fordern, daß  $v_g > 0$  ist, d.h. daß sich das Wellenpaket in die positive  $z$ -Richtung bewegt. Dies entspricht der *Ausstrahlungsbedingung*, wie wir sie aus der klassischen Elektrodynamik kennen, d.h. wir müssen  $p_{<} = p_{<}^-$  wählen.

Dann ist wegen (29)  $r > 0$  (beachte, daß nach Voraussetzung  $V - E - m > 0$  ist!), und es gilt  $R < 1$  und wegen (34) also auch  $D < 1$ . Allerdings ist die Lösung physikalisch nicht sinnvoll interpretierbar, denn eigentlich würden wir bei einer Erhöhung des Potentials wie im Fall des gewöhnlichen Tunneleffekts keinen Strom im Halbraum  $z > 0$  erwarten.

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation führt also im strikten Einteilchenbild zu physikalisch nicht sinnvoll interpretierbaren Lösungen der Diracgleichung.

### 3.2.2 Diracs Löchertheorie

Die physikalisch korrekte Lösung und Interpretation verdeutlichen wir uns am besten anhand einer Skizze, in der wir das *volle Spektrum* des Hamiltonoperators ernst nehmen, also auch Lösungen mit „negativer Energie“. Wollen wir allerdings diesen Zuständen eine physikalische Bedeutung zubilligen, müssen wir annehmen, daß diese Zustände allesamt bereits besetzt sind, weil andernfalls die Elektronen sofort in diese energetisch günstigeren Zustände übergehen würden. Das Pauliprinzip verhindert dies jedoch, wenn wir annehmen, daß alle Zustände, die Lösungen mit negativer Energie entsprechen, besetzt sind.



Wie man aus der Skizze unschwer erkennt, rutschen die negativen Energiezustände für  $z > 0$  aufgrund des großen Potentials  $V$  in den positiven Bereich (grün schraffiert). Diese Elektronen

können sich also in den Halbraum  $z < 0$  bewegen. Dies entspricht der Lösung  $p_{>}^+$  von (27). Gemäß (29) ist dann  $r < 0$ , und dies wiederum bedeutet, daß der „Reflexionskoeffizient“ aufgrund von (33)  $R > 1$  wird.

Dies ist aber mit der Dirac-Seeinterpretation kein Paradoxon mehr, denn es handelt sich nicht ausschließlich um die Reflexion der einlaufenden Elektronen, sondern auch um an der Potentialschwelle erzeugte Elektronen, die sich in den Halbraum  $z < 0$  bewegen.

Entsprechend entstehen aber im Diracsee wegen der Stromerhaltung Löcher, die sich wie *positiv geladene Teilchen* mit derselben Masse wie das Elektron verhalten. Dies ist die berühmte Vorhersage Diracs, daß es außer dem Elektron, das einzige zu der damaligen Zeit (1928) außer dem Proton bekannte „Elementarteilchen“ auch ein bald so genanntes Positron, das *Antiteilchen* des Elektrons, geben muß. Wegen (34) ist nun aber  $D < 0$ , und dies erklärt sich in der jetzigen Dirac-Seeinterpretation ebenfalls zwanglos daraus, daß der Strom  $\vec{j}$  als *Strom der elektrischen Ladung* und nicht als Teilchenzahlstrom zu interpretieren ist und die Positronen positiv geladen sind (also entgegengesetzt zu den Elektronen). Damit sind aber die Energieeigenlösungen der Diracgleichung zu negativem Energieeigenwert als Positronen mit *positiver Energie*, die sich in die entgegengesetzte Richtung bewegen, in unserem Fall also in Richtung der positiven z-Achse bewegen. Die Diracsee-Interpretation wird wegen dieser Interpretation auch einfach als „Löchertheorie“ (hole theory) bezeichnet.

### 3.2.3 Die moderne Interpretation

Heute wird die *Diracsche Löchertheorie*) nicht mehr oft verwendet. Die moderne Interpretation der obigen Betrachtungen benutzt vielmehr die *Quantenfeldtheorie*.

Sie deutet den obigen Vorgang als Paarerzeugungsprozeß, d.h. es sind zu Beginn im Halbraum  $z > 0$  weder Elektronen noch Positronen vorhanden. Trifft nun ein Elektron auf die Potentialschwelle, werden bei hinreichend großer Energie Paare aus Positronen und Elektronen *neu erzeugt*. Das bedeutet, daß die relativistische Quantentheorie zwingend notwendig eine Vielteilchentheorie sein muß, weil die Teilchenzahl für jede Teilchensorte nicht erhalten zu sein braucht, wie dies im Rahmen der nichtrelativistischen Quantentheorie der Fall ist. Die Stromerhaltung der Einteilchen-Diracgleichung wird als *Erhaltungssatz der elektrischen Ladung* gedeutet, genau wie wir es im Rahmen der Löchertheorie besprochen haben.

Am bequemsten läßt sich solch ein Fall nichterhaltener Teilchenzahlen durch den Formalismus der *zweiten Quantisierung*<sup>3</sup>, der von vornherein die Nichterhaltung der Teilchenzahl berücksichtigt, beschreiben. Formal leitet sich dieser Vielteilchenformalismus aus der *Quantisierung des Diracfeldes* ab. Deshalb spricht man ja eben von der *Quantenfeldtheorie*. Dies ist vollkommen analog zum Vorgehen bei der nichtrelativistischen Schrödingergleichung. Auch hier läßt sich die Quantentheorie durch die Quantisierung der Schrödingergleichung formulieren (vgl. z.B. [Fic79, LL77] oder jedes andere Quantenmechaniklehrbuch).

Bei der Quantisierung wird das Diracfeld durch Feldoperatoren ersetzt. Es besteht jedoch im Gegensatz zum Fall bei der Schrödingergleichung notwendig aus einem Anteil aus Vernichtungsoperatoren für Elektronen und einem Anteil aus Erzeugungsoperatoren für Positronen. Es existieren dadurch auch keine Zustände mit negativen Energien mehr, vielmehr wird durch den Ansatz mit Erzeugungsoperatoren für die Moden negativer Frequenz erreicht, daß man es mit

<sup>3</sup>Auch dies ist ein historisch begründeter Name, der im Grunde irreführend ist, denn es gibt nur eine Quantentheorie, und es wird auch nur einmal quantisiert.

Anteilchen positiver Energie zu tun hat. Dies ist die sog. *Feynman-Stückelberg-Interpretation* der Zustände negativer Energie. Für Fermionen ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie für die Löchertheorie, solange man Quantenfluktuationen (sog. Strahlungskorrekturen) vernachlässigt, die übrigens zu den am genauesten in der Physik gemessenen Größen gehören (Lambshift der Energiezustände im Wasserstoffatom, anomales magnetisches Moment des Elektrons, Casimireffekt, um nur die bekanntesten Beispiele zu nennen). Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment für die Quantenelektrodynamik gehört zu den genauesten in der Physik. Überhaupt hat die Entdeckung der Lambshift (1947) zur Entwicklung der Renormierungstheorie der QED (Bethe, Weisskopf, Feynman, Schwinger, Dyson, Tomonaga 1948) geführt.

Die Feynman-Stückelberg-Interpretation hat zudem übrigens noch den Vorteil, daß sie auch für Bosonen durchführbar ist. Eine Löchertheorie für Bosonen ist ja kaum vorstellbar, denn die Besetzung der negativen Energiezustände würde ja nicht bedeuten, daß nicht noch mehr Teilchen diese Zustände besetzen könnten. Bei einer solchen Interpretation könnte man also nicht erklären, warum es überhaupt stabile Bosonen (z.B. Photonen) geben könnte!

Außerdem zeitigt die relativistische Quantenfeldtheorie noch mehr Erfolge: Nimmt man nämlich an, daß die Energie nach unten beschränkt ist und verlangt Kausalität der Theorie, erhält man ohne weitere Annahmen, daß Teilchen mit halbzahligem Spin zwingend Fermionen, solche mit ganzzahligem Spin Bosonen sein müssen. Das ist das *Spin-Statistik-Theorem*, das 1940 durch Pauli zuerst bewiesen wurde. Vorher mußte man die Statistik der Teilchen, also ob es sich um ein Boson oder Fermion handelt, stets dem Experiment entnehmen. Da hatte man den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik natürlich schon längst entdeckt, aber die theoretische Erklärung ist eben nur im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie möglich.

Das *Standardmodell* der Elementarteilchen, das alle bislang durchführbaren Experimente auf diesem Gebiet, erklärt, basiert ebenfalls auf der relativistischen Quantenfeldtheorie.

Für eine einführende Darstellung der relativistischen Quantenfeldtheorie sei aus der umfangreichen Literatur nur auf die beiden modernen Darstellungen [PS95] und [Wei95, Wei96] verwiesen.

## 4 Nichtrelativistischer Limes der Diracgleichung

Bekanntlich geht die relativistische Mechanik in die nichtrelativistische Mechanik als Näherung über, wenn die Geschwindigkeit während der gesamten Bewegung klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit ist. Das bedeutet, daß der Impulsbetrag klein gegen die Energie sein muß. Dann ist die relativistische Näherung immer dann gerechtfertigt, wenn

$$1 \gg |\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E}. \quad (36)$$

Für unseren Fall des freien Teilchens gilt die relativistische Energie-Impulsbeziehung

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \approx m + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots, \quad (37)$$

wobei wir benutzt haben, daß  $|\vec{p}| \ll E$ , falls  $|\vec{p}| \ll m$ .

In der Quantentheorie ist nun  $i\partial_t = \mathbf{H}$  der Hamiltonoperator des Systems, und wir erwarten aufgrund der Beziehung (37), daß im nichtrelativistischen Grenzfall die Schrödingergleichung gilt, so daß bis auf einen Phasenfaktor  $\exp(-imt)$  die Wellenfunktion sich langsam verändert.

Wir können aber diesen Phasenfaktor abspalten:

$$\psi(x) = \exp(-imt)\psi'(x). \quad (38)$$

Setzen wir dies in die Diracgleichung ein, folgt

$$0 = (i\rlap{\not{D}} - m)\psi = [m(\gamma_0 - 1) + i\rlap{\not{D}}]\psi'. \quad (39)$$

Dabei bedeutet  $\rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu$ . Verwenden wir nun die in der Vorlesung definierte konkrete Form der  $\gamma$ -Matrizen, die sog. *Dirac-Darstellung*, schreibt sich (39) nach einfachem Umstellen in der Form

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\chi \\ -2m\chi - i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\phi \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Dabei sind  $\phi$  und  $\chi$  zweikomponentige Spinorwellenfunktionen und  $\vec{\sigma}$  sind die aus der Theorie des Drehimpulses bekannten drei Paulischen Spinmatrizen.

Unter der Voraussetzung, daß der nichtrelativistische Limes gerechtfertigt ist, können wir in der zweiten Komponente der Gleichung (40)  $i\partial_t\chi$  auf der linken gegen  $-2m\chi$  auf der rechten Seite der Gleichung vernachlässigen. Daraus ergibt sich dann

$$\chi \approx -\frac{i\vec{\sigma}\vec{\nabla}}{2m}\phi. \quad (41)$$

Da  $-i\vec{\nabla}$  der Impulsoperator in der Ortsdarstellung ist und  $|\vec{p}| \ll m$  gilt, wenn die nichtrelativistische Näherung gerechtfertigt ist, sind die  $\chi$ -Komponenten klein gegen die  $\phi$ -Komponenten.

Wir können nun (41) und die obere Komponente von (40) einsetzen und erhalten

$$i\partial_t\phi = -\frac{(\vec{\sigma}\vec{\nabla})}{2m}\chi = -\frac{\Delta}{2m}\phi, \quad (42)$$

d.h.  $\phi$  genügt der *Schrödingergleichung für freie Teilchen*, wie es im nichtrelativistischen Grenzfall sein muß. Wir haben es hier mit zweikomponentigen Wellenfunktionen zu tun, weil wir Teilchen mit Spin 1/2 beschreiben. Entsprechend den beiden Spineinstellungen gibt es zu jedem Impuls zwei linear unabhängige Lösungen („spin-up“ und „spin-down“).

Berücksichtigt man die Wechselwirkung der Teilchen mit dem elektromagnetischen Feld gelangt man durch eine ähnliche Betrachtung wie der hier gegebenen zu der nichtrelativistischen *Pauli-gleichung*.

Die zweikomponentigen Spinoren heißen auch *Weylspinoren*. Wer sich näher für deren mathematischen Zusammenhang mit den vierdimensionalen Diracspinoren, die erforderlich sind, wenn man neben eigentlich orthochronen Lorentztransformationen (Boosts und Drehungen) auch die Raumspiegelungen nichttrivial darstellen will, sei auf [SU01] verwiesen.

## Literatur

- [Fic79] E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 4. Aufl., Aula-Verlag, Wiesbaden (1979)
- [IZ80] C. Itzykson und J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill Book Company, New York (1980)

- [LL77] L. D. Landau und E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Pergamon Press (1977)
- [PS95] M. Peskin und D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publ. Comp. (1995)
- [SU01] R. U. Sexl und H. K. Urbandtke, Relativity, Groups, Particles, Springer, Wien (2001)
- [Wei95] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Bd. 1, Cambridge University Press (1995)
- [Wei96] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Bd. 2, Cambridge University Press (1996)