

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 12: Pfadintegrale und chirale hadronische Modelle

Hendrik van Hees

27. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Pfadintegral für Felder	1
2 Chirale Symmetrie der QCD und Hadronen	14
3 Literatur	22

1 Pfadintegral für Felder

Pfadintegral für Felder

Literatur: [Ram89, BL86, Col18, Hee02]

Pfadintegral für Felder

- Einfaches Spielzeugmodell: ϕ^4 -Theorie
 - neutrales Skalarfeld $\phi(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
 - Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$
 - Ziel: Alternative Rechenmethode zur Berechnung Vakuumerwartungswerte zeigeordneter Feldoperatorprodukte
 - via LSZ-Reduktion invariante Übergangsmatrixelemente für Streuquerschnitte
 - Idee: verwende formale Eigenzustände von ϕ und kanonischen Felldimpulsen

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\underline{x})}$$

- Quantisierung über bosonische kanonische gleichzeitige Kommutatoren im Heisenbergbild

$$[\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}), \boldsymbol{\phi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\boldsymbol{\Pi}(t, \vec{x}), \boldsymbol{\Pi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\boldsymbol{\phi}(t, \vec{x}), \boldsymbol{\Pi}(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

- analog wie Quantisierung von nichtrelativistischer Punktteilchenmechanik

$$[\mathbf{x}_j(t), \mathbf{x}_k(t)] = 0, \quad [\mathbf{p}_j(t), \mathbf{p}_k(t)] = 0, \quad [\mathbf{x}_j(t), \mathbf{x}_k(t)] = i\delta_{jk}.$$

* Orts- und Impulseigenzustände zur Zeit $t = 0$:

$$\vec{\mathbf{x}}(0)|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle, \quad \vec{\mathbf{p}}(0)|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle, \quad \int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \mathbb{1}.$$

* Impulseigenfunktionen in der Ortsdarstellung

$$\langle x | p \rangle = \exp(i\vec{x} \cdot \vec{p}), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

- mit Feldern: Freiheitsgrad-Label j in \mathbf{x}_j bzw. \mathbf{p}_j entspricht \vec{x} in $\boldsymbol{\phi}(0, \vec{x})$ bzw. $\boldsymbol{\Pi}(0, \vec{x})$:

$$\boldsymbol{\phi}(0, \vec{x})|\phi\rangle = \phi(0, \vec{x})|\phi\rangle, \quad \boldsymbol{\Pi}(0, \vec{x})|\Pi\rangle = \Pi(0, \vec{x})|\phi\rangle.$$

- Zeitentwicklung im **Heisenbergbild**

$$|\phi, t\rangle = \exp(it\mathbf{H})|\phi\rangle, \quad |\Pi, t\rangle = \exp(it\mathbf{H})|\Pi\rangle$$

mit Hamiltonian

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{H}(\underline{x}), \quad \mathcal{H}(\underline{x}) = \dot{\phi}(\underline{x})\Pi(\underline{x}) - \mathcal{L}$$

- Übergangsamplitude von Feldkonfiguration ϕ_i bei $t = t_i$ zu ϕ_f bei $t = t_f$

$$C_{fi} = \langle \phi_f | \exp[-i\mathbf{H}(t_f - t_i)] | \phi_i \rangle$$

- Zerlege Zeitintervall (t_i, t_f) in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = (t_f - t_i)/N$

$$C_{fi} = \langle \phi_f | [\exp(-i\mathbf{H}\Delta t)]^N | \phi_i \rangle$$

- Schiebe formale „Vollständigkeitsrelationen“ ein:

$$\int D\phi(\vec{x}) |\phi\rangle \langle \varphi| = \mathbf{1}, \quad \int \frac{D\Pi(\vec{x})}{2\pi} |\Pi\rangle \langle \Pi| = \mathbf{1}.$$

$$\text{mit } |\phi\rangle_j = |\phi, t_j\rangle, \quad |\Pi_j\rangle = |\Pi, t_j\rangle$$

$$C_{fi}(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N \frac{D\Pi_k D\varphi_k}{2\pi} \langle \varphi_a | \Pi_N \rangle \times \\ \times \langle \Pi_N | \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) | \varphi_N \rangle \dots \langle \Pi_1 | \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1 | \varphi_a \rangle.$$

- Nehme **Weyl-Ordnung** von ϕ und Π in \mathbf{H} an: alle Faktoren Π links
on allen Faktoren ϕ rechts \Rightarrow

$$\langle \Pi_k | \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) | \phi_k \rangle \underset{\Delta t \rightarrow 0}{\cong} (1 - iH_k \Delta t) \exp \left[-i \int d^3\vec{x} \Pi_k \phi_k \right]$$

- dann

$$C_{fi} = \mathcal{N} \int D\Pi \int_{\phi(t_i, \vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})}^{\phi(t_f, \vec{x}) = \varphi_f(\vec{x})} D\phi \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\Pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{H}(\Pi, \phi) \right] \right\}.$$

\mathcal{N} : nicht wohldefinierter aber unwichtiger Normierungsfaktor

- Kontinuumslimes:

$$C_{fi} = \int D\pi \int_{\phi(t_i, \vec{x})=\varphi_i(\vec{x})}^{\phi(t_f, \vec{x})=\varphi_f(\vec{x})} D\phi \exp \left\{ i \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\Pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{H}(\Pi, \phi) \right]}_{S[\phi, \Pi]} \right\}.$$

- **Vakuum→Vakuum**-Übergangsamplitude: führe Term $-i0^+/2\phi^2$ in Lagrangian ein (entspricht $m^2 \rightarrow m^2 - i0^+$) und $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow +\infty, \phi_i \rightarrow 0, \phi_f \rightarrow 0$
- analoge Rechnung: für **zeitgeordnete Vakuumerwartungswerte**

$$\langle \Omega | T_c F[\phi, \pi] | \Omega \rangle = \mathcal{N} \int D\pi \int D\phi \exp \{ iS[\phi, \pi] \} F[\phi, \pi].$$

- **zeitgeordnete (Feynman) Green-Funktionen**

$$iG^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \langle \Omega | \mathcal{T}_c \phi(\underline{x}_1) \dots \phi(\underline{x}_n) | \Omega \rangle$$

- Erzeugendes Funktional

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\pi \int D\phi \exp \left\{ iS[\phi, \pi] + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right\}$$

- modulo unbestimmtem Faktor

$$i\mathcal{N} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

- **Ausintegration von Π**

- ϕ^4 -Theorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi},$$

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4,$$

$$S[\phi, \Pi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x [\Pi \dot{\phi} - \mathcal{H}]$$

- Pfadintegral über Π : **Gauß-Funktional**
- entwickle Wirkung um **Minimum bzgl. Π**

$$\frac{\delta S}{\delta \Pi(\underline{x})} = \dot{\phi} - \Pi \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Pi_0 = \dot{\phi}$$

$$S[\phi, \Pi] = S[\phi, \Pi_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \left(\frac{\delta^2 S[\phi, \Pi]}{\delta \Pi(\underline{x}) \delta \Pi(\underline{y})} \right)_{\Pi=\Pi_0} [\Pi(\underline{x}) - \Pi_0(\underline{x})][\Pi(\underline{y}) - \Pi_0(\underline{y})].$$

$$S[\phi, \Pi_0] = S[\phi, \dot{\phi}] \equiv S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

- **Lagrange-Version** des Pfadintegrals:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left[i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\mathcal{L} + J(\underline{x})\phi(\underline{x})) \right]$$

- **kein Gauß-Integral** \Rightarrow Störungstheorie!

- generating functional for free fields

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2 - i0^+}{2}\phi^2 + J\phi, \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I.$$

- erzeugendes Funktional für freies Feld:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left[i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\mathcal{L}_0 + J(\underline{x})\phi(\underline{x})) \right]$$

- wie bei Integration über Π : von einem J -unabhängigen Faktor abgesehen ist Z_0 durch die Wirkung am stationären Punkt φ gegeben

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow -(\square + m^2 + i)\phi = -J.$$

- Lösung

$$\varphi(\underline{x}) = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x' D_F(\underline{x} - \underline{x}_2) J(\underline{x}_2)$$

- erzeugendes Funktional

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left[\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) \right],$$

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left[\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) \right]$$

- Erinnerung an Vorlesung 9: **Störungsrechnung**

$$Z[J] = \exp \left[-i \frac{\lambda}{4!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{x})^4} \right] Z_0[J]$$

- zeitgeordnete Green-Funktionen via Taylorentwicklung der Funktionalableitungs-exp-Funktion:

$$iG^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \left[\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right]_{J=0}$$

- Feynman-Diagramme: alle (verbundenen und unverbundenen) Green-Funktionen
- jedes zusammenhängende Diagrammteil mit wenigstens einem äußeren Punkt \underline{x}_j verbunden
- **Feynman-Regeln** (im Impulsraum)

$$= -\frac{i\lambda}{4!}$$

$$= i\bar{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0^+}$$

- **Organisation der Störungsrechnung**
- alle Green-Funktionen $G^{(n)}$ lassen sich durch Summen über Produkte von **zusammenhängenden Green-Funktionen** darstellen
 - $iG_c^{(n)}$ alle zusammenhängenden Diagramme mit n äußeren Beinchen

- **erzeugendes Funktional**

$$Z[J] = \exp(iW[J]) \Leftrightarrow iW[J] = \ln(Z[J]).$$

- zusammenhängende Green-Funktionen:

$$G_c^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(\underline{x}_1) \cdots \delta J(\underline{x}_n)} \right|_{J=0}$$

- Beweis durch vollständige Induktion (s. [Hee02])

- **Selbstenergie- und Vertexfunktionen**

- Diagramm mit einzelnen inneren Linien: zerfällt in Produkt aus zwei zusammenhängenden Diagrammen und der dieser inneren Linie entsprechenden Green-Funktion
- \Rightarrow alle G_c können durch Summen über Produkte von **einteilchen-irreduziblen amputierten Diagrammen**, also Selbstenergie- und Vertexeinschübe, verbunden mit inneren und äußeren Propagatorlinien dargestellt werden
- **einteilchen-irreduzible Diagramme** (one-particle irreducible oder 1PI-Diagramme): zerfallen nicht in Teile, wenn man irgendeine innere Linie durchschneidet
- **erzeugendes Funktional**: Legendre-Transformierte von W :

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x}) &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(\underline{x})}, \\ \Gamma[\varphi] &= W[J] - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varphi(\underline{x}) J(\underline{x}) \\ \delta \Gamma &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{\delta W}{\delta J(\underline{x})} \delta J(\underline{x}) - \cancel{\varphi(\underline{x})} \cancel{\delta J(\underline{x})} - J(\underline{x}) \delta \varphi(\underline{x}) \right] = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \delta \varphi(\underline{x}), \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(\underline{x})} &= -J(\underline{x}) \end{aligned}$$

- **Vertexfunktionen**

$$\Gamma^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(\underline{x}_1) \cdots \delta \varphi(\underline{x}_n)}$$

- Spezialfall $\Gamma^{(2)}$:

$$\int d^4 y_2 \Gamma^{(2)}(x_1, y_2) G_c^{(2)}(y_2, x_2) = - \int d^4 y_2 \frac{\delta J(x_1)}{\delta \varphi(y_2)} \frac{\delta \varphi(y_2)}{\delta J(x_2)} = -\delta^{(4)}(x_1 - x_2),$$

- $\Gamma^{(2)}$: „Funktionale Inverse“ des (exakten) Propagators:

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \int d^4 y_1 d^4 y_2 \Gamma_J^{(2)}(y_1, y_2) i G_c^{(2)}(x_1, y_1) i G_c^{(2)}(x_2, y_2)$$

- für freie Theorie

$$-(\square_1 + m^2) D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = -\delta^{(4)}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \Rightarrow \Gamma_0^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = -(\square + m^2) \delta^{(4)}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2).$$

- Definition der **Selbstenergie**

$$\Sigma(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \Gamma_0^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) - \Gamma^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$$

- \Rightarrow **Dyson-Gleichung**

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{y}_1) \Sigma(\underline{y}_1, \underline{y}_2) G(\underline{y}_2, \underline{x}_2) &= -G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \\ G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) &= D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) - \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{y}_1) \Sigma(\underline{y}_1, \underline{y}_2) G(\underline{y}_2, \underline{x}_2) \end{aligned}$$

- wegen Translationsinvarianz:

$$G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \equiv G(\underline{x}_1 - \underline{x}_2), \quad \Sigma(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \equiv \Sigma(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

- Impulsdarstellung: Fourier-Transformierte

$$\tilde{G}(\underline{p}) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \exp(i \underline{x} \cdot \underline{p}) G(\underline{x}), \quad \tilde{\Sigma}(\underline{p}) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \exp(i \underline{x} \cdot \underline{p}) \Sigma(\underline{x}), \quad \tilde{D}_F(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+}$$

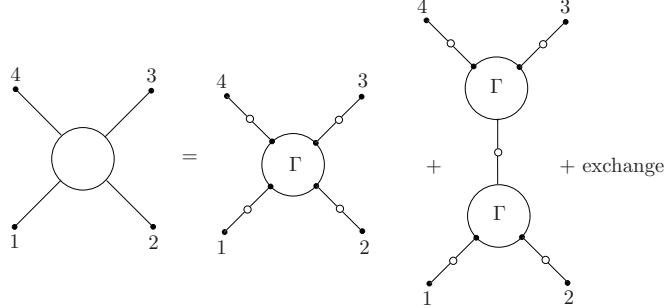
- Faltungssatz \Rightarrow **Dyson-Gleichung**

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\underline{p}) &= \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+} - \frac{\Sigma(\underline{p})}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+} \tilde{G}(\underline{p}) \\ \Rightarrow G(\underline{p}) &= \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 - \Sigma(\underline{p}) + i0^+} \end{aligned}$$

- diagrammatisch

$$\overrightarrow{\text{---}} = \overrightarrow{\text{---}} + \overrightarrow{\text{---}} \text{---} \text{---} - i\Sigma$$

- allgemein: $G_c^{(n)} \hat{=} \text{Summe über Baumgraphen mit } n \text{ äußeren } G\text{-Beinchen mit exakten Vertexfunktionen und inneren } G\text{-Linien}$
- Beispiel: exakter Vierpunkt-Propagator



- Beweis durch vollständige Induktion: [Hee02]
- Theorie vollständig durch $\Gamma[\varphi]$ definiert
- Verschwindende äußere Quelle:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} = -J(x) \stackrel{!}{=} 0.$$

- Feldgleichung für „mittleres Feld“ $\varphi \hat{=} \text{Wirkungsprinzip}$
- $\Rightarrow \Gamma[\varphi]$ „Quantenwirkung“

- Fermionen

- z.B. Dirac-Feld
- Lagrangian für freies Feld

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad \partial = \gamma^\mu \partial_\mu \Rightarrow \Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}_a} = i\bar{\psi}_a$$

- gleiche Idee wie bei Bosonen: Eigenvektoren des Feldoperators bzw. kanonischen Feldimpulses
- aber: Fermionen \Rightarrow kanonische gleichzeitige Anti-Kommutatoren

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\Pi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

- \Rightarrow : für Feld-Eigenvektor

$$\psi_a(0, \vec{x})\psi_b(0, \vec{y})|\psi\rangle = \psi_a(\vec{x})\psi_b(\vec{y})|\psi\rangle = -\psi_b(0, \vec{y})\psi_a(0, \vec{x})|\psi\rangle = -\psi_b(0, \vec{y})\psi_a(0, \vec{x})|\psi\rangle$$

- \Rightarrow „Feldeigenwerte“ müssen antikommutierende „c-Zahlen“ sein!
- \Rightarrow Grassmann-Algebra
- Grassmann-Zahlen“ bilden komplexen Vektorraum
- endlichdimensional: Basis $\theta_1, \dots, \theta_n$
- antikommutatives Produkt: $\theta_j \theta_k = -\theta_k \theta_j$
- alle Produkte auch im Vektorraum \Rightarrow Vektorraum ist insgesamt 2^n -dimensional
- denn alle Produkte mit mehr als n der θ_j müssen notwendig verschwinden, da maximal $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$ von 0 verschieden sein kann, denn wegen Antikommutativität verschwinden alle Produkte, in denen wenigstens 2 gleiche θ_j vorkommen.
- Anzahl möglicher Produkte mit $0 \leq m \leq n$ Faktoren $m = 0$ bedeutet einfach eine komplexe Zahl, d.h. man bildet Polynome der Form

$$P(\theta_1, \dots, \theta_n) = a + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n a_{j_1 \dots j_m} \theta_{j_1} \dots \theta_{j_m}$$

- $a, a_{j_1 \dots j_m} \in \mathbb{C}$, $a_{j_1 \dots j_m}$ total antisymmetrisch
- für gegebenes m gibt es offenbar $\binom{n}{m}$ verschiedene Monome $\theta_{j_1} \dots \theta_{j_m}$ (Standardreihenfolge: $j_1 < j_2 < \dots < j_m$)
- linear unabhängige Monome bilden Basis des Grassmann-Zahlenvektorraums
- Anzahl:

$$d = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n.$$

- in QFT: $\psi_a(\underline{x}) \hat{=}$ überabzählbar unendlich viele θ 's
- Analysis mit Grassmann-Zahlen
 - Ableitung soll linearer Operator sein \Rightarrow es genügt, Ableitungen von Monomen der θ_j 's zu definieren
 - Ableitungen: Links- und Rechts-Ableitungen

$$\partial_{\theta_{j_k}}^{(L)} \theta_{j_1} \theta_{j_{k-1}} \dots \theta_k \dots \theta_{j_m} = \partial_{\theta_{j_k}} (-1)^{k-1} \theta_k \theta_{j_1} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_m} \stackrel{(def)}{=} (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \dots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \dots \theta_{j_m}$$

- für mehrere Ableitungen: $\partial_{\theta_j}^{(L/R)}$ antikommutieren
 - analog für Rechtsableitung
 - **Integration:** Fall mit nur 1 θ
 - mögliche Polynome (Funktionen!) nur $P(\theta) = a + a_1 \theta$
 - Integral über θ soll linear und translationsinvariant sein, d.h. für $b \in \mathbb{C}$
- $$\int d\theta P(\theta) \stackrel{!}{=} \int d\theta P(\theta+b) \Rightarrow a \int d\theta 1 + a_1 \int d\theta \theta \stackrel{!}{=} (a+b a_1) \int d\theta 1 + a_1 \int d\theta \theta$$

- damit das für alle $a, a_1, b \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\int d\theta 1 = 0, \quad \int d\theta \theta \stackrel{(\text{def})}{=} 1$$

- gleiche Regel wie **Ableitung nach θ !**
- für Grassmann-Algebren mit mehreren θ_j 's

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_m f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \partial_{\theta_1}^{(R)} \cdots \partial_{\theta_m}^{(R)} f(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

- in QFT: lokale Observablen immer Polynome mit nur geradzahligen Monomen von Fermionenoperatoren (wegen **Mikrokausalität**)
- Erzeugendes Funktional $Z[\bar{\eta}, \eta]$ mit $\eta = \eta_a(\underline{x})$ und $\bar{\eta} = \bar{\eta}_a(\underline{x})$ als Grassmann-Generator-wertige äußere Quellen

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[iS[\psi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x [\bar{\eta}(\underline{x})\psi(\underline{x}) + \bar{\psi}(\underline{x})\eta(\underline{x})] \right]$$

- **Symmetrien**

- hier: globale Symmetrien wie U(1), SU(N)-Flavorsymmetrien etc.
- größter Vorteil der Pfadintegalmethode: Quantisierung von (abelschen und nichtabelschen) Eichtheorien **Faddeev-Popov-Quantisierung**: s. z.B. [BL86, Tay76, AL73, Hee02]
- betrachte beliebigen Satz Felder Φ und erzeugende Funktionale $Z[J]$, $W[J]$ und $\Gamma[\Phi]$
- in vielen Fällen: **Quantenwirkung $\Gamma[\Phi]$** hat gleiche Symmetrien wie klassische Wirkung $S[\Phi]$

- Herleitung: $S[\varphi]$ invariant unter einer Transformation $\Phi(\underline{x}) = F[\Phi(\underline{x})]$
- Annahme: Pfadintegralmaß $D\Phi$ invariant unter Trafo: $DF[\Phi] = D\Phi$
- Lie-Symmetrie: infinitesimale Trafo: $F[\Phi](\underline{x}) = \Phi'(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) + \delta\Phi[\Phi, \underline{x}]$

$$Z[J] = \int D\Phi \exp \left[iS[\Phi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}) \right]$$

- Invarianz der Wirkung: $S[\Phi'] = S[\Phi]$ und des Pfadintegralmaßes $D\Phi' = D\Phi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D\Phi' \exp \left[iS[\Phi'] + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \Phi'(\underline{x}) \right] \\ &\stackrel{\text{symm}}{=} \int D\Phi \exp \left[iS[\Phi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) [\Phi(\underline{x}) + \delta\Phi(\underline{x})] \right] \\ &= \int D\Phi \left[1 + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \delta\Phi[\Phi, \underline{y}] \right] \exp \left[iS[\Phi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}) \right] \\ &= \left(1 + \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \delta\Phi \left[\frac{\delta}{\delta J(\underline{y})}, \underline{y} \right] \right) Z[J] \end{aligned}$$

- \Rightarrow

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \delta\Phi \left[\frac{\delta}{\delta J(\underline{y})}, \underline{y} \right] Z[J] = 0$$

- Annahme: lineare Symmetrie: $\delta\Phi(\underline{x}) = \delta\alpha_j \hat{T}_j \Phi(\underline{x})$ ($\delta\alpha_j = \text{const}$) (lokale Symmetrie) \Rightarrow

$$\delta\alpha_j \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \hat{T}_j \frac{\delta}{\delta J(\underline{y})} Z[J] = 0$$

- $Z[J] = \exp(iW[J]) \Rightarrow$

$$\delta\alpha_j \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \hat{T}_j \frac{\delta}{\delta J(\underline{y})} W[J] = 0$$

- für $\Gamma[\Phi]$:

$$\delta\alpha_j \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi(\underline{y})} \hat{T}_j \Phi = 0$$

- $\Rightarrow \Gamma[\Phi]$ hat dieselbe Symmetrie wie $S[\Phi]$

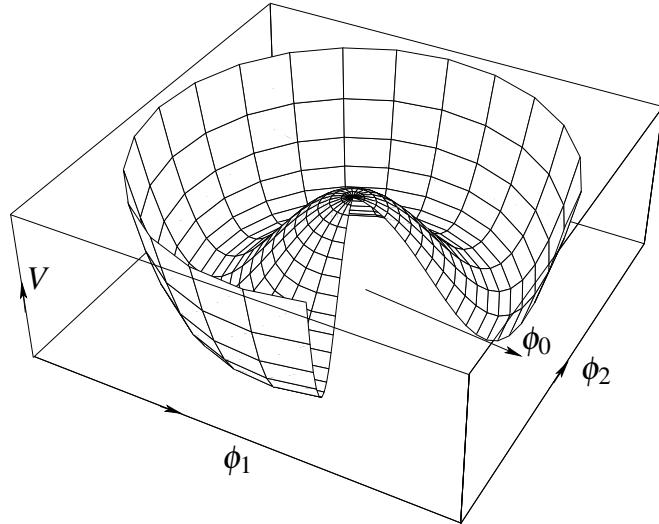
- CAVEAT: falls $D\Phi$ NICHT invariant unter Trafo ist $\Rightarrow \Gamma[\Phi]$ nicht notwendig symmetrisch
- $S[\phi]$ symmetrisch, $\Gamma[\Phi]$ nicht symmetrisch: **Anomalie**, d.h. quantisierte Feldtheorie *nicht* symmetrisch, obwohl klassische Theorie symmetrisch ist!
- z.B. Adler-Bell-Jackiw-Anomalie: **Anomalie der axialen $U(1)_A$ -Symmetrie der (masselosen) QED und QCD** (s.u.) [Adl69, BJ69, PS95]

Spontane Symmetriebrechung

- betrachte Theorie mit N reellen Skalarfeldern $\vec{\phi} = (\phi_j)$, die unter $SO(N)$ -Transformationen symmetrisch ist:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi})(\partial^\mu \vec{\phi}) + \underbrace{\frac{\mu^2}{2}\vec{\phi}^2 - \frac{\lambda}{8}(\vec{\phi}^2)^2}_{-V[\vec{\phi}]}$$

- Lie-Algebra: antisymmetrische $\mathbb{R}^{N \times N}$ -Matrizen
- Dimension der Lie-Algebra: $N(N - 1)/2$
- „falsches Vorzeichen“ des Massenterms ist hier Absicht!
- **Potential:**



- muss um **stabilen Grundzustand** entwickeln:

$$V(|\vec{\phi}|) = -\frac{\mu^2}{2}\vec{\phi}^2 + \frac{\lambda}{8}(\vec{\phi}^2)^2$$

- Minima $|\vec{\phi}| = v \Rightarrow$ **Grundzustand entartet**
- $V'(v) = (-\mu^2 + \lambda v^2/2)v \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Minimum bei $v = \mu\sqrt{2/\lambda}$.
- entwickle um einen beliebig gewählten Grundzustand: $\vec{v} = (v, 0, 0, \dots, 0)$
- effektive Wirkung invariant, da Pfadintegralmaß $D\phi = D\phi_1 D\phi_2 \cdots D\phi_N$ invariant unter $SO(N)$ -Transformationen
- damit
$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4y \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_j(\underline{y})} T_{jk}^a \phi_k(\underline{y}) = 0$$
- take functional derivative $\delta/\delta\phi_l(0)$ and then set $\vec{\phi} = \vec{v} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_j(\underline{y})\delta\phi_l(0)} T_{jk}^a v_k = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4y G_{jl}^{-1}(\underline{y}) T_{jk}^a v_k = 0.$$
- in Impulsdarstellung:
$$\tilde{G}_{jl}^{-1}(\underline{p} = 0) T_{jk}^a v_k = M_{jl} T_{jk}^a v_k = 0.$$
- $\tilde{G}_{jl}^{-1}(\underline{p} = 0)$: **Massenmatrix** der $\vec{\varphi}$
- von den $N(N-1)/2$ $so(N)$ -Basismatrizen \hat{T}^a ergeben die $(N-1)(N-2)/2$ Generatoren der $SO(N-1)$ -Symmetriegruppe, die das Vakuum invariant lassen $\hat{T}^a \underline{v} = 0$.
- für die übrigen $[N(N-1) - (N-1)(N-2)]/2 = N-1$ Generatoren ist $g_j^{(a)} = T_{jk}^a v_k \neq 0$ Eigenvektor von \hat{M} zum Eigenwert 0
- \Rightarrow von den N Teilchen der $\vec{\varphi}$ -Felder sind $(N-1)$ masselos (**Nambu-Goldstone-Bosonen**)
- **Goldstone-Theorem**: spontan gebrochene **globale Symmetrie** \Rightarrow so viele masselose Nambu-Goldstone-Bosonen wie symmetriebrechende Generatoren der Symmetrie
- Anschauung: die Feldanregungen, die „Drehungen“ im Minimum des „Sombrero-Potentials“ entsprechen, benötigen keine Energie, da sie derselben niedrigsten „Vakuumenergie“ entsprechen

2 Chirale Symmetrie der QCD und Hadronen

Chirale Symmetrie und Hadronen

Literatur: [Koc97, Sch03]

Quantumchromodynamik: QCD

- Theorie der starken Wechselwirkung (s. Vorlesung 11) **QCD**

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi} (iD - \hat{M}) \psi$$

- nicht-Abelsche Eichgruppe $SU(3)_{\text{color}}$**

- jedes Quark Farbtriplett: $\psi = (\psi_r, \psi_g, \psi_b)$ mit Dirac-Spinoren ψ_k
- eich-kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu + ig \hat{T}^a A^a$ ($a \in \{1, \dots, 8\}$)
- Feldstärketensor: $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$
- Strukturkonstanten f^{abc} : $[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = if^{abc} \hat{T}^c$, $\hat{T}^a = (\hat{T}^a)^\dagger \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

- Teilcheninhalt**

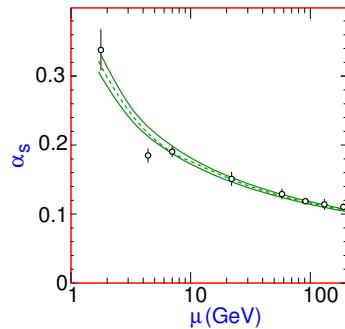
- ψ : **Quarks mit Flavor** ($u, d; c, s; t, b$) (Masseneigenzustände!)
- $\hat{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ = Stromquarkmassen
- A_μ^a **Gluonen**, Eichbosonen der $SU(3)_{\text{color}}$

- Symmetrien**

- fundamentale lokale $SU(3)_{\text{color}}$ -Symmetrie
- im Sektor der leichten Quarks u, d, (s): näherungsweise **chirale Symmetrie** ($\hat{M} \rightarrow 0$)
- Skaleninvarianz für $\hat{M} \rightarrow 0$

Eigenschaften der QCD

- asyptotische Freiheit** bei **großen Impulsüberträgen** in Stößen $\alpha_s = 4\pi g_s^2 \rightarrow 0$
- Laufen der Kopplungskonstante** aus der **Renormierungsgruppengleichung**: Physik-Nobelpreis 2004 an D. Gross, F. Wilczek, H. D. Politzer



- Quarks und Gluonen in farb-neutralen Hadronen eingeschlossen (Confinement)
- theoretisch noch nicht vollständig verstanden (nichtperturbatives Phänomen!)
- Gitter-QCD-Rechnungen: QCD beschreibt erfolgreich das Massenspektrum der Hadronen
- bei niedrigen Energien: effektive hadronische Theorien
- grundlegendes Prinzip: näherungsweise chirale Symmetrie im leichten Quarksektor
- (effektive theorie für schwere Quarks)

Chirale Symmetrie der (masselosen) QCD

- betrachte nur leichte u - und d -Quarks
- Isospin-Dublett: $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$
- NB: ψ hat 3 Indizes: Dirac-Spinor, Color und Isospin!
- γ -Matrizen: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}$, $\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$
- Dirac-Beziehungen für links- und rechtshändige Komponenten

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \psi = P_L \psi, & \psi_R &= \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \psi = P_R \psi, \\ P_{L/R}^2 &= P_{L/R}, & P_R P_L &= P_L P_R = 0, & P_{L/R} \gamma_5 &= \gamma_5 P_{L/R} = \mp P_{L/R} \\ P_{L/R} \gamma_\mu &= \gamma_\mu P_{R/L}, & \overline{P_L \psi} &= \overline{\psi} P_R, & \overline{P_R \psi} &= \overline{\psi} P_L \\ \overline{\psi} \gamma_\mu \psi &= \overline{\psi_L} \gamma_\mu \psi_L + \overline{\psi_R} \gamma_\mu \psi_R, & \overline{\psi} \psi &= \overline{\psi_L} \psi_R + \overline{\psi_R} \psi_L \end{aligned}$$

- $\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0$, $\overline{\gamma_5 \psi} = \psi^\dagger \gamma_5^\dagger \gamma_0 = -\overline{\psi} \gamma_5$
- im masselosen Limtes ($m_u = m_d = 0$)

$$\mathcal{L}_{u,d} = \overline{\psi} iD^\mu \psi = \overline{\psi_L} iD^\mu \psi_L + \overline{\psi_R} iD^\mu \psi_R$$

Chirale Symmetrie der (masselosen) QCD

- im masselosen Limes ($m_u = m_d = 0$) \Rightarrow globale chirale Symmetrien:
 - Änderung von voneinander unabhängigen für die links- und rechts-händigen Komponenten:
$$\psi_L(x) \rightarrow \exp(-i\phi_L)\psi_L(x), \quad \psi_R(x) \rightarrow \exp(-i\phi_R)\psi_R(x)$$
 - Symmetriegruppe $U(1)_L \otimes U(1)_R$
 - unabhängige Isospinrotationen:
$$\psi_L(x) \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}_L \cdot \vec{T})\psi_L(x), \quad \psi_R(x) \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}_R \cdot \vec{T})\psi_R(x)$$
 - $\vec{T} = \vec{\tau}/2$, $\vec{\tau}$: Pauli-Matrizen; Symmetriegruppe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$
- alternative Notation skalare und pseudoskalare Phasenänderung und Isospinrotationen

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \exp(-i\phi_s)\psi, \quad \psi \rightarrow \exp(-i\gamma_5\phi_a)\psi \\ \psi &\rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}_V \cdot \vec{T})\psi, \quad \psi \rightarrow \exp(-i\gamma_5\vec{\alpha}_A \cdot \vec{T})\psi\end{aligned}$$

- $U(1)_s$ und $SU(2)_V$ sind Untergruppen der chiralen Symmetrien, die auch Symmetrien bleiben, wenn $m_u = m_d \neq 0 \Rightarrow$ Heisenbergs Isospinsymmetry!

Ströme: Beziehung mit Mesonen

- Quellen: [Koc97, Sch03, Din11]
- Noether: jede Symmetrie impliziert Erhaltungsgröße
- Noether-Ströme für chirale Symmetrien

$$\begin{aligned}j_s^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad j_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \\ \vec{j}_V^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{T} \psi, \quad \vec{j}_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \vec{T} \psi\end{aligned}$$

- Beziehung zu Mesonen über entsprechende Quantenzahlen:
 - σ (bzw. f_0): $\bar{\psi} \psi$ (Skalar und Isoskalar)
 - π : $i\bar{\psi} \vec{T} \gamma_5 \psi$ (Pseudoskalar und Isovektor)

- ρ 's: $\bar{\psi} \gamma_\mu \vec{T} \psi$ (Vektor und Isovektor)
- a_1 's: $\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{T} \psi$ (Axialvektor und Isoaxialvektor)
- σ and π 's; ρ 's and a_1 's **haben nicht gleiche Masse**
- QCD-Grundzustand **nicht symmetrisch** unter Pseudoscalar- und Pseudovektor-Transformationen $\langle \Omega | \bar{\psi} \psi | \Omega \rangle \neq 0$

Spontane Symmetriebrechung

- **spontan gebrochene Symmetrie**: Grundzustand nicht symmetrisch
- \Rightarrow **Grundzustand entartet**
- Grundzustand symmetrisch unter isoskalaren und Isovektortransformationen $U(1)_L \times U(1)_R$ gebrochen zu $U(1)_S$; $SU(2)_L \times SU(2)_R$ gebrochen zu $SU(2)_V$
- für jede gebrochene Symmetrie **masseloses Nambu-Goldstone-Boson**
- hier: drei Pionen sehr leicht im Vergleich zu anderen Hadronen ($m_\pi \approx 140$ MeV)
- $m_\pi \neq 0$: **explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch m_u , m_d**
 - kann störungstheoretisch behandelt werden \Rightarrow **chirale Störungstheorie**
 - Axialvektorstrom nur näherungsweise erhalten \Rightarrow **PCAC** (partially conserved axial current)
 - erklärt viele Hadroneneigenschaften
- **$U(1)_a$ -Anomalie (Adler-Bell-Jackiw-Anomalie)**
 - klassische Theorie invariant unter $U(1)_a \Rightarrow$ **in Quantenfeldtheorie explizit gebrochen** (hier ohne Beweis) [PS95]
 - Grund: Pfadintegralmaß $D\bar{\psi} D\psi$ **nicht invariant** unter $U(1)_a$ -Trafos [Fuj79, Fuj80]
 - wichtig für korrekte Vorhersage der Zerfallsrate für $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$
 - pseudoskalarer Strom nicht erhalten: $\partial_\mu j_a^\mu = 3/8\alpha_s \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a$

- weiterer Hinweis in SU(3)-Quarkmodell (Gell-Mann): **pseudoskalares Mesonen-Nonet** zwei isospinskalare Mesonen η (zumeist SU(3)-Oktett) und η' (zumeist SU(3)-Singulett)
- $\eta \simeq \bar{q}\gamma^5\hat{\lambda}_8\bar{q}$ (mit $q = (u, d, s)$) \Rightarrow keine Anomalie des entsprechenden Axialvektorstroms
- aus gleichem Grund Isovektor-Axialvektorstrom $\simeq \bar{q}\gamma^5\gamma^\mu\hat{\tau}q$ erhalten (keine Anomalie wegen $\text{tr } \hat{\tau} = 0$)
- η schwerer als π 's wegen schwerer s-Quarkmasse
- $\eta' \simeq \bar{q}\gamma^5\bar{q} \Rightarrow$ Axialvektorstrom anomal gebrochen

Minimales chirales Modell für Pionen und Nukleonen

- σ -Meson und Pionen (chirale Partner)
- Meson = $\bar{q}\cdot q$ -Bindungszustand
- infinitesimalen chirale Transformationen für Quarks ($\vec{T} = \vec{\tau}/2$) in $SU(2)_L \times SU(2)_R$ Modell

$$\psi \rightarrow (1 - i\delta\vec{\alpha}_V \cdot \vec{\tau}/2)\psi \quad (\text{Isovektor-Transformation})$$

$$\psi \rightarrow (1 - i\gamma_5\delta\vec{\alpha}_A \cdot \vec{\tau}/2)\psi \quad (\text{Isoaxialvektor-Transformation})$$

- \Rightarrow Transformationseigenschaften von **Mesonenfeldern** unter chiralen Transformationen: $\sigma \sim \bar{\psi}\psi$, $\vec{\pi} \sim i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi$

$$\sigma \rightarrow \sigma - \delta\vec{\alpha}_A \cdot \vec{\pi}, \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \delta\vec{\alpha}_V \times \vec{\pi} + \delta\vec{\alpha}_A \sigma$$

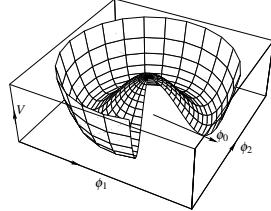
- $\sigma^2 + \vec{\pi}^2$ invariant \Rightarrow chirale Transformation durch $SO(4)$ -Transformation von $\phi = (\sigma, \vec{\pi})^T$ realisiert

Minimales σ -Modell für Mesonen

- chirale Symmetrie als $SO(4)$ -Transformationen von Meson-Feldern $\phi \in \mathbb{R}^4$
- beschreibt σ -Meson und die drei Pionen (π^\pm, π^0)

$$\mathcal{L}_{\chi\text{limit}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - f_\pi^2)^2$$

- spontane Symmetriebrechung: „Sombrero-Potential“



- Entartung des Grundzustands \Rightarrow man braucht keine Energie, um Felder innerhalb des Potentialminimums zu drehen
 \Rightarrow **masselose Nambu=Goldstone-Bosonen (Pionen)**
- Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = f_\pi \neq 0$ (NB: Vakuum immer noch Poincaré-invariante Zustand $\langle \Phi^0 \rangle = \text{const}$)
- Symmetrie **spontan gebrochen** von $\text{SO}(4)$ zu $\text{SO}(3)_V$ ($\dim \text{SO}(4) = 4 * 3/6$, $\dim \text{SO}(3) = 3 * 2/2 = 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3$ Nambu-Goldstone-Bosonen (Pionen))
- Teilcheninhalt des Modells: **vier skalare reelle Feldfreiheitsgrade** \Rightarrow 3 masselose Pionen und 1 massives σ -Meson

Pionenzerfall und PCAC

- schwacher Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
 - schwache Wechselwirkung (chirale Eichtheorie mit Eichgruppe $\text{SU}(3)_{\text{W-iso}} \otimes \text{SU}(3)_{\text{W-Y}}$ -Eichgruppe $\propto J_V^\mu - J_A^\mu$)
 - Pion **pseudoskalar** \Rightarrow Zerfall wegen **Axialstrom** \Rightarrow
- $$\langle 0 | J_A^{a\mu}(x) | \pi_b(p) \rangle = i p^\mu \delta_{ab} f_\pi \exp(-ip \cdot x)$$
- Zerfallsrate $\Rightarrow f_\pi \simeq 93 \text{ MeV}$
- $$\langle 0 | \partial_\mu J_A^{a\mu}(x) | \pi_b(p) \rangle = -f_\pi p^2 \delta^{ab} \exp(-ip \cdot x) = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} \exp(-ip \cdot x)$$
- exakte chirale Symmetrie $\Rightarrow m_\pi = 0$ (Goldstone-Theorem) $\Rightarrow \partial_\mu J_A^{a\mu} = 0$ Noether
 - $m_\pi \neq 0$ aber „klein“ \Rightarrow näherungsweise erhaltener Axialvektorstrom (**PCAC**)
 - im effektiven Modell

$$J_{A,\pi}^{a\mu} = f_\pi \partial_\mu \phi^a, \quad a \in \{1, 2, 3\}$$

Explizite Symmetriebrechung

- explizite Brechung wegen $m_u, m_d \neq 0$
- symmetriebrechender Term in QCD: $\mathcal{L}_{\chi SB} = -m \bar{\psi} \psi$
- $m = (m_u + m_d)/2$; wegen $\bar{\psi} \psi \sim \sigma \Rightarrow$ in hadronischem Modell

$$\mathcal{L}_{\chi SB} = -\epsilon \sigma$$

- σ - π -Potential:

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4} [(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - v_0^2]^2 - \epsilon \sigma$$

- Potential in σ -Richtung verkippt \Rightarrow führt zu korrekten „Richtung“ des (nun nicht mehr entarteten) Vakuums
- Minimum bei $f_\pi \Rightarrow$

$$v_0 = f_\pi - \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2}, \quad m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 + \frac{\epsilon}{f_\pi}, \quad m_\pi^2 = \frac{\epsilon}{f_\pi}$$

- Noether + explizite Brechung der Symmetrie + PCAC (consistency!):

$$\partial_\mu J_A^{a\mu} = -\epsilon \pi^a \stackrel{\text{PCAC}}{=} -f_\pi m_\pi^2 \pi^a \Rightarrow \epsilon = f_\pi m_\pi^2$$

- χSB in der QCD wie im effektiven Modell \Rightarrow Gell-Mann-Oaks-Renner-Relation [GMOR68]

$$\langle 0 | \epsilon \sigma | 0 \rangle = f_\pi \epsilon = m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$$

Nukleonen im σ -Modell

- Axialstrom von Nukleonen $\Psi = (p, n)^T$ -Isospin-Dublett

$$\vec{J}_{A,\text{nucl}}^\mu = g_a \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi$$

- β -Zerfall des Neutrons $\Rightarrow g_a = 1.25$
- Gesamt-Axialvektorstrom $\vec{J}_A^\mu = \vec{J}_{A,\pi}^\mu + \vec{J}_{A,\text{nucl}}^\mu$ sollte PCAC erfüllen $\partial_\mu \vec{J}_A^\mu = -f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi} \Rightarrow$
 $(\square + m_\pi^2) \vec{\pi} = -g_a i \frac{M}{f_\pi} \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi$

- Goldberger-Treiman-Relation

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{M}{f_\pi} \simeq 12.6 \quad \text{vs.} \quad g_{\pi NN}^{\text{exp}} = 13.4$$

- Erweiterung des linearen σ -Modells

$$\mathcal{L}_{\text{nucl}} = \bar{\Psi} i \not{d} \Psi - g_{\pi NN} \left[i \underbrace{\bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \cdot \vec{\pi}}_{\text{chiraler SO(4)-Skalar!}} + \bar{\Psi} \Psi \sigma \right]$$

3 Literatur

Literatur

Literatur

- [Adl69] S. L. Adler, Axial vector vertex in spinor electrodynamics, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.177.2426>.
- [AL73] E. Abers and B. Lee, Gauge Theories, Phys. Rept. **9**, 1 (1973), [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(73\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(73)90027-6).
- [BJ69] J. S. Bell and R. Jackiw, A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969), <https://doi.org/10.1007/BF02823296>.
- [BL86] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Adam Hilger, Bristol and Boston (1986).
- [Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), <https://doi.org/10.1142/9371>.
- [Din11] M. Dine, Goldstone Bosons and Chiral Symmetry Breaking in QCD (2011), lecture notes, https://scipp.ucsc.edu/~dine/ph222/goldstone_lecture.pdf.
- [Fuj79] K. Fujikawa, Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979), <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.1195>.

- [Fuj80] K. Fujikawa, Path Integral for Gauge Theories with Fermions, Phys. Rev. D **21**, 2848 (1980), [Erratum: Phys. Rev.D **22**,1499(1980)], <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2848>, 10.1103.
- [GMOR68] M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, Behavior of Current Divergences under $SU(3) \times SU(3)$, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968), <https://link.aps.org/abstract/PR/v175/i5/p2195>.
- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>.
- [Koc97] V. Koch, Aspects of chiral symmetry, Int. J. Mod. Phys. E **6**, 203 (1997), <https://doi.org/10.1142/S0218301397000147>.
- [PS95] M. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts (1995).
- [Ram89] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley, Redwood City, Calif., 2 edn. (1989).
- [Sch03] S. Scherer, Introduction to chiral perturbation theory, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003), <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210398>.
- [Tay76] J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press (1976).