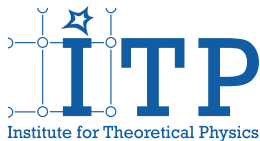


# Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

## Vorlesung 11: Quarkmodell für Hadronen und QCD

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt



# Outline

Quark-Modell für Hadronen

Quantenchromodynamik

Literatur

# Quark-Modell für Hadronen

Literatur: [\[Nac86\]](#)

# Symmetrien von Teilchen

- ▶ Symmetrie als Ordnungsprinzip für Teilchenzoo
- ▶ einfachstes Beispiel: **Isospin** für Proton und Neutron (Heisenberg 1932)
- ▶ Proton und Neutron haben fast gleiche Masse  $m_N \simeq 938 \text{ MeV}$
- ▶ Proton und Neutron als ein Teilchen (**Nukleon**) mit zusätzlicher **Quantenzahl**
- ▶ Symmetrie: führe „Flavor-Dublett“ ( $\psi_p, \psi_n$ ) (zwei Dirac-Spinoren)
- ▶ SU(2)-Operationen auf „Flavor-Raum“
- ▶ Nukleon: Isospin  $I = 1/2$ ,  $I_3 = \text{diag}(1/2, -1/2)$  mit  $I_{3p} = -I_{3n} = 1/2$
- ▶ Physik der **starken WW** (näherungsweise) invariant unter **Isospinrotationen**
- ▶ Proton und Neutron verhalten sich bzgl. starker WW (fast) gleich

# Der achtfache Pfad

- ▶ ab den 1950-1960ern „Teilchenzoo“ entdeckt
- ▶ die meisten sind **Hadronen**: Teilchen, auf die starke Kraft wirkt
- ▶ Gell-Mann, Zweig, Ne'eman (1961): alle Hadronen als gebundene Zustände von **Spin-1/2-Teilchen mit elektrischen Ladungen  $-1/3$  und  $+2/3$**
- ▶ Gell-Mann: Wie sollen sie heißen? **Quarks!**
- ▶ **Symmetrieprinzipien** brachten Ordnung ins Chaos:
  - ▶ drei Quarks (**up**, **down**, **strange**)
  - ▶ drei Flavors: SU(3)-Symmetrie
  - ▶ Zustände nur aus (up,down): Isospin SU(2)-Untergruppe
  - ▶ Murray Gell-Mann: Nobelpreis für Physik (1969)



# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ hier: näherungsweise „**Flavor-Symmetrie**“
- ▶ Baryonen (z.B. Protonen, Neutronen, Hyperonen) näherungsweise gleiche Massen
- ▶ lassen sich nach **Multiplets** der irreduziblen Darstellungen der SU(3) ordnen
- ▶ ursprünglich (1961 vor der QCD!): angewandt auf Hadronen
- ▶ drei „leichte Quarks“: **up, down, strange**
- ▶ drei Flavor-Zustände

$$|1\rangle = |u\rangle, \quad |2\rangle = |d\rangle, \quad |3\rangle = |s\rangle.$$

- ▶ im Limes exakter SU(3)-Flavor-Symmetrie: **unitäre SU(3) Symmetrietransformation**

$$\mathbf{U} |i\rangle = \sum_{j=1}^3 |j\rangle U_{ji}, \quad (U_{ji} \in \text{SU}(3))$$

- ▶ SU(3): unitäre  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -Matrizen:  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \mathbb{1}_3$  mit  $\det U = 1$

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ infinitesimale Transformationen:

$$\mathbf{U} = 1 + i\delta\varphi \mathbf{H} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2)$$

- ▶ Unitarität:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1 - i\delta\varphi(\hat{H}^\dagger - \hat{H}) + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \stackrel{!}{=} 1 + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}^\dagger$$

- ▶ Determinante:

$$\det \hat{U} = \det(1 + \delta\varphi \hat{H} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2)) = 1 + i\delta\varphi \operatorname{Tr} \hat{H} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \stackrel{!}{=} 1 + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \Rightarrow \operatorname{Tr} \hat{H} = 0.$$

- ▶ **Generatoren der SU(3):** spurlose hermitesche  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -Matrizen
- ▶ 3 reelle Diagonalelemente mit  $\sum_j H_{jj} = 0 \Rightarrow 2$  unabhängige Diagonalelemente  
3 unabhängige komplexe Einträge in der oberen Dreiecksmatrix  $\Rightarrow$  weitere 6 reelle Parameter

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶  $\Rightarrow$  8-dimensionale reelle **Lie algebra**
- ▶ analog zu Pauli-Matrizen der SU(2): **Gell-Mann-Matrizen**

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\lambda}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\lambda}_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- ▶  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$  bilden su(2)-Unteralgebra  $\Rightarrow$  **Isospin** ( $u, d$ -Quarks):  $\hat{\vec{F}} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)/2$



# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ zwei simultan diagonalisierbare su(3)-Matrizen:  $\hat{F}_3 = \hat{\lambda}_3/2 \hat{=} \text{Isospin-Ladung}$   
 $I_3 = \pm 1/2$  und Hyperladung  $\hat{Y} = 1/\sqrt{3}\hat{\lambda}_8$  ( $Y = 1/3, -2/3$ )
- ▶ Antiquarks: transformieren sich mit  $\hat{U}^*$  bzw. infinitesimal

$$\hat{U}^* = 1 + i\delta\varphi_a \left( -\frac{\hat{\lambda}_a^*}{2} \right) + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) = 1 + i\delta\varphi_a \left( -\frac{\hat{\lambda}_a^T}{2} \right) + \mathcal{O}(\delta\varphi^2)$$

- ▶ im Gegensatz zur su(2) bzw. SU(2) ist die konjugiert-Komplexe 3-dimensionale Darstellung (als  $3^*$  bezeichnet) nicht äquivalent zur ursprünglichen Fundamentaldarstellung. Entsprechend haben **Antiquarks** zwar die **gleichen Isospin-Ladungen**  $I_3 = \pm 1/2$  wie Quarks aber **entgegengesetzte Hyperladungen**  $Y = -1/2, +2/3$ .
- ▶ einige Eigenschaften der Gell-Mann-Matrizen:

$$\text{tr}(\hat{\lambda}_a \hat{\lambda}_b) = 2\delta_{ab}, \quad [\hat{\lambda}_a/2, \hat{\lambda}_b/2] = if_{abc} \hat{\lambda}_c/2.$$

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ **Strukturkonstanten**

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} \text{Tr}([\hat{\lambda}_a, \hat{\lambda}_b] \hat{\lambda}_c)$$

$\Rightarrow f_{abc} \in \mathbb{R}$  und total antisymmetrisch

- ▶ **adjungierte Darstellung** definiere  $\mathbf{C} = c_a \lambda_a / 2 \equiv \hat{C}$  mit  $c_a \in \mathbb{C}$  als „Vektoren“ im Raum der spurlosen hermiteschen  $3 \times 3$ -Matrizen

- ▶ Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{C}_1 | \mathbf{C}_2 \rangle = 2 \text{tr}(\mathbf{C}_1^\dagger \mathbf{C}_2)$$

- ▶ Gruppendarstellung:

$$\hat{D}(\hat{U})\mathbf{C} = \hat{U} \hat{C} \hat{U}^\dagger.$$

- ▶  $\Rightarrow$  8-dimensionale **irreduzible „adjungierte Darstellung“**

- ▶ infinitesimale Erzeugende:

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ mehr zur Mathematik der SU(3) [Lip66]

$$(\hat{F}_a^{(\text{ad})})_{bc} = if_{acb} = -if_{abc}.$$

## ▶ Hadronen

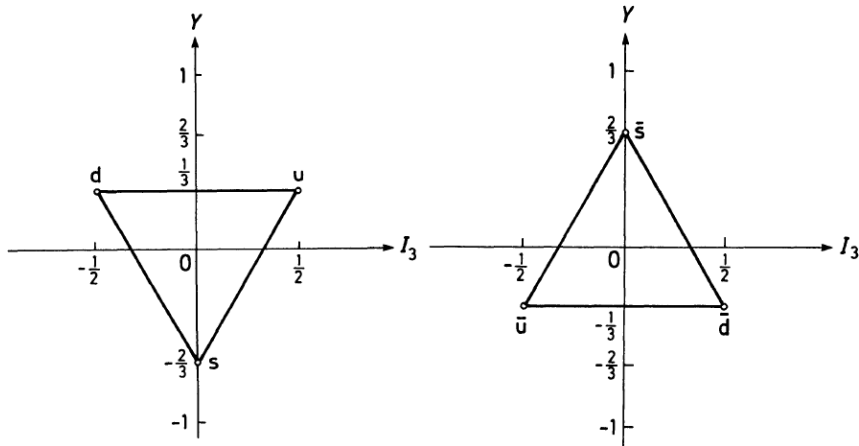
- ▶ Quarks wurden nie als **asymptotisch freie Teilchen** beobachtet  $\Rightarrow$  **Confinement** (Quarkeinschluss)
- ▶ **Ladungsartige Quantenzahlen** von Hadronen
- ▶ erhalten bei Reaktionen aufgrund der **starken WW**
  - ▶ **Baryonenzahl**  $B$ :  $B_{\text{Mesons}} = 0$ ,  $B_q = 1/3$ ,  $B_{\bar{q}} = -1/3$
  - ▶ **Isospin**: (u,d)-Quarks und -Antiquarks  $I = 1/2$ ,  $I_{3u} = -I_{3\bar{u}} = +1/2$ ,  $I_{3d} = -I_{3\bar{d}} = -1/2$ ,  $I_s = 0$
  - ▶ **Strangeness**:  $S_u = S_d = 0$ ,  $S_s = -1$ ,  $S_{\bar{s}} = +1$
  - ▶ Relation zur **Hyperladung**:  $Y = S + B$
  - ▶ **elektrische Ladung**:  $Q = I_3 + Y/2 \Rightarrow Q_u = -Q_{\bar{u}} = +2/3$ ,  $Q_d = -Q_{\bar{d}} = Q_s = -Q_{\bar{s}} = -1/3$

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ „Standard-Hadronen“:
  - ▶ **Mesonen**  $\Leftrightarrow$  gebundene Zustände aus einem Quark und einem Antiquark  $\Rightarrow$  ganzzahlige Spins  $\Rightarrow$  **Bosonen**
  - ▶ **Baryonen**  $\Leftrightarrow$  gebundene Zustände aus 3 Quarks  $\Rightarrow$  halbzahlige Spins  $\Rightarrow$  **Baryonen**
- ▶ „Ausreduktion“ von zusammengesetzten SU(3)-Flavors in **irreduzible Multiplets**
  - ▶ Mesonen:  $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$
  - ▶ Baryonen:  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$

# Die Symmetriegruppe SU(3)

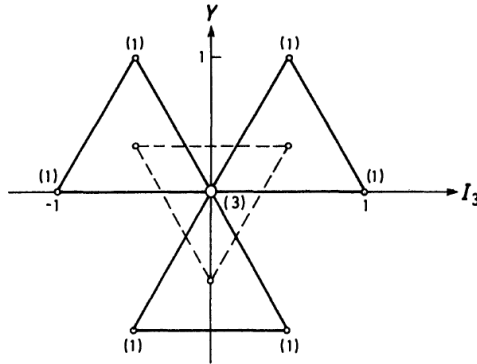
- **Gewichtsdiagramme:** trage **Isospin** und **Hyperladung** in Koordinatensystem auf
- für Quarks (3-Darstellung) und Antiquarks (3\*-Darstellung)



# Die Symmetriegruppe SU(3)

Quelle: [Nac86]

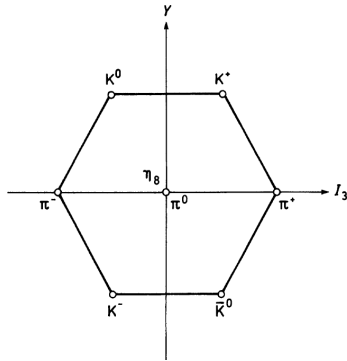
- Mesonen:  $I_3 = I_{3q} + I_{3\bar{q}}$ ,  $Y = Y_q + Y_{\bar{q}} \Rightarrow$  „geometrische Addition“ im Gewichtsdiagramm



Quelle: [Nac86]

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- Beispiel: **leichteste pseudoskalare Mesonen**

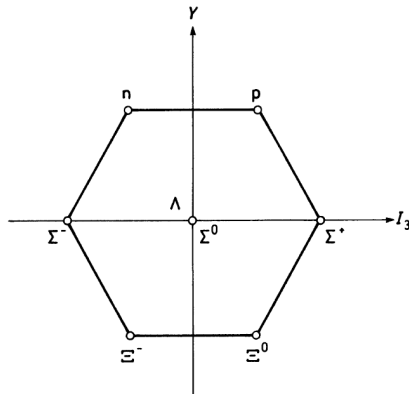
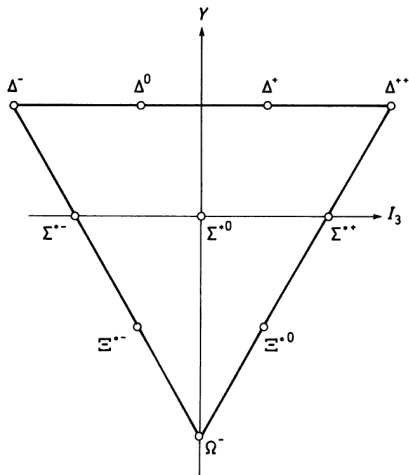


SU(3) representation	$I$	Isospin $I_3$	Hypercharge $Y$	$0^-$ particles
1	0	0	0	$\eta'$
8	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	1	$K^+, K^0$
	1	+1, 0, -1	0	$\pi^+, \pi^0, \pi^-$
	0	0	0	$\eta$
	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	-1	$\bar{K}^0, K^-$

Quelle: [Nac86]

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- **Baryonen** leichtestes Dekuplett und Oktett



Quelle: [Nac86]



# Die Symmetriegruppe $SU(3)$

- ▶ **Erfolge des Quark-Modells**
  - ▶ alle leichten Mesonen und Baryonen lassen sich in Schema einordnen

# Die Symmetriegruppe SU(3)

$J^P$	$(D, L_N^P)$	$S$	Octet members				Singlets
$1/2^+$	$(56, 0_0^+)$	$1/2$	$N(939)$	$\Lambda(1116)$	$\Sigma(1193)$	$\Xi(1318)$	
$1/2^+$	$(56, 0_2^+)$	$1/2$	$N(1440)$	$\Lambda(1600)$	$\Sigma(1660)$		
$1/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$N(1535)$	$\Lambda(1670)$	$\Sigma(1620)$	$\Xi(1620)$	$\Lambda(1405)$
					$\Sigma(1560)^\dagger$		
$3/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$N(1520)$	$\Lambda(1690)$	$\Sigma(1670)$	$\Xi(1820)$	$\Lambda(1520)$
$1/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$3/2$	$N(1650)$	$\Lambda(1800)$	$\Sigma(1750)$	$\Xi(1690)$	
					$\Sigma(1620)^\dagger$		
$3/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$3/2$	$N(1700)$	$\Lambda(?)$	$\Sigma(1940)^\dagger$	$\Xi(?)$	
$5/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$3/2$	$N(1675)$	$\Lambda(1830)$	$\Sigma(1775)$	$\Xi(1950)^\dagger$	
$1/2^+$	$(70, 0_2^+)$	$1/2$	$N(1710)$	$\Lambda(1810)$	$\Sigma(1880)$	$\Xi(?)$	$\Lambda(1810)^\dagger$
$3/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$1/2$	$N(1720)$	$\Lambda(1890)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	
$5/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$1/2$	$N(1680)$	$\Lambda(1820)$	$\Sigma(1915)$	$\Xi(2030)$	
$7/2^-$	$(70, 3_3^-)$	$1/2$	$N(2190)$	$\Lambda(?)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Lambda(2100)$
$9/2^-$	$(70, 3_3^-)$	$3/2$	$N(2250)$	$\Lambda(?)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	
$9/2^+$	$(56, 4_4^+)$	$1/2$	$N(2220)$	$\Lambda(2350)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	
Decuplet members							
$3/2^+$	$(56, 0_0^+)$	$3/2$	$\Delta(1232)$	$\Sigma(1385)$	$\Xi(1530)$	$\Omega(1672)$	
$3/2^+$	$(56, 0_2^+)$	$3/2$	$\Delta(1600)$	$\Sigma(1690)^\dagger$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$	
$1/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$\Delta(1620)$	$\Sigma(1750)^\dagger$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$	
$3/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$\Delta(1700)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Omega(2012)$	
$5/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$3/2$	$\Delta(1905)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$	
$7/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$3/2$	$\Delta(1950)$	$\Sigma(2030)$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$	
$11/2^+$	$(56, 4_4^+)$	$3/2$	$\Delta(2420)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$	

Quelle: [N<sup>+</sup>24]

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ Gell-Mann-Okubo-Massenformel  $\Rightarrow$  SU(3) nur näherungsweise gültig:  
Quarkmassen nicht alle gleich
- ▶ Annahme exakter Isospin-Symmetrie (auch nur näherungsweise erfüllt!):  
 $m_u = m_d < m_s$
- ▶ mit 3 Parametern  $\overline{m}$ ,  $\delta m_1$  und  $\delta m_2$ :

$$m_{\text{Baryon}} = \overline{m} + Y \delta m_1 + \left[ I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] \delta m_2$$

- ▶ folgt aus Betrachtungen zur Flavor-SU(3)-Symmetrie mit Verletzung durch Massendifferenz zwischen (u,d)- und s-Quarks als Störung
- ▶ Details: s. [\[Nac86\]](#)

# Die Symmetriegruppe SU(3)

- ▶ Problem: man erhält nur alle Baryonen, wenn man **drei Quarks im gleichen Zustand erlaubt!**
- ▶ ABER: Quarks müssen **Spin 1/2** besitzen  $\Rightarrow$  Quarks sind **Fermionen**
- ▶ andererseits funktioniert das Modell:  
vorhergesagtes Baryon  $|\Omega^- \rangle = |sss \rangle$  wurde gefunden!
- ▶ Lösung: Jede Quarksorte kommt in drei „**Farben**“ vor
- ▶ Alle Quarks von derselben Art sind gleich, können aber verschiedene Farbquantenzahlen besitzen  $\Rightarrow$  **exakte Symmetrie!**
- ▶ beobachtbar **nur farbneutrale „weiße“ Zustände**
  - ▶ 3 Quarks mit Farben RGB  $\Rightarrow$  farbneutrale Baryonen
  - ▶ Quark+Antiquark jeweils mit Farbe und dazugehöriger Antifarbe  $\Rightarrow$  farbneutrale Mesonen
- ▶ Farbfreiheitsgrad: **SU(3)<sub>c</sub>-Symmetrie**
- ▶ „geeicht“  $\Rightarrow$  **Quantenchromodynamik** als fundamentale Theorie der **starken Wechselwirkung**

# Quantenchromodynamik

Literatur: [\[Nac86\]](#)

## Erinnerung: Quantenelektrodynamik (QED)

- ▶ beginne mit freiem Lagrangian für Elektronen und Positronen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m_e)\psi$$

- ▶ Symmetrie unter Änderung der Phase

$$\psi' = \exp(-iq_e\alpha)\psi, \quad \bar{\psi}' = \exp(+iq_e\alpha)\bar{\psi}, \quad \alpha = \text{const}$$

- ▶ Elektronenladung  $q_e = -e$
- ▶ mache Symmetrie lokal:  $\alpha \rightarrow \alpha(\underline{x})$
- ▶ führe masseloses Vektorfeld  $A_\mu$  ein
- ▶ ersetze alle partiellen Ableitungen durch **eichkovariante Ableitungen**

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu$$

## Erinnerung: Quantenelektrodynamik (QED)

- ▶ antisymmetrischer **Feldstärketensor**  $\rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} [i(\not{\partial} + i q_e \not{A}) - m] \psi,$$

- ▶ invariant unter **lokalen Eichtransformationen**

$$\psi'(\underline{x}) = \exp[-i q_e \alpha(\underline{x})] \psi(\underline{x}), \quad \bar{\psi}'(\underline{x}) = \exp[+i q_e \alpha(\underline{x})] \bar{\psi}(\underline{x}), \quad A'_\mu(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) + \partial_\mu \alpha(\underline{x})$$

- ▶ NB: Eichinvarianz keine Symmetrie, da Eichtransformation keine neue physikalische Situation bedeutet!

# Quantisierung

- ▶ Felder  $\Rightarrow$  **Feldoperatoren**
- ▶ Physikalische Größen: S-Matrixelemente:  $|T_{fi}|^2$  Übergangswahrscheinlichkeiten
- ▶ lokale, mikrokasale QFT mit stabilem Grundzustand
  - ▶ **Spin-Statistik-Theorem:**  
Halbzahlgiger Spin  $\Leftrightarrow$  Fermionen, ganzzahlgiger Spin  $\Leftrightarrow$  bosons
- ▶ Störungstheorie (in **Feynman-Eichung**)

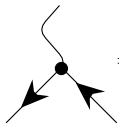
Internal lines: Propagators



$$= iG_{\gamma}^{\mu\nu}(p)$$



$$= iG_e(p)$$



$$= ie\gamma^{\mu}$$

External lines: Initial and final states



$$\varepsilon^{\mu}$$



$$(\varepsilon^{\mu})^*$$



$$e^+ \text{ in final state or } e^- \text{ in initial state}$$



$$e^+ \text{ in initial state or } e^- \text{ in final state}$$

- ▶  $G_{\gamma}^{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}/(p^2 + i0^+)$ ,  $G_e = (\not{p} - m)/(p^2 - m^2 + i0^+)$



# Quantenchromodynamik: QCD

- ▶ C. N. Yang, R. Mills: mache nichtabelsche Symmetrien lokal  
⇒ **nichtabelsche Eichtheorien** [YM54]
- ▶ H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler:  
Konstruiere Theorie mit **lokaler SU(3)<sub>c</sub>**-Eichinvarianz [FGML73]
- ▶ Starte mit **Quarks**:  $\psi_{fc}$  mit Flavors  $f \in \{u, d, c, s, t, b\}$  und Farben  $c \in \{1, 2, 3\}$
- ▶ im Folgenden einfach  $\psi$ , Eichsymmetrie: SU(3)<sub>c</sub>:  $\psi$  transformieren unter fundamentaler Darstellung 3
- ▶ Lagrangian für freie Quarks

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - \hat{M})\psi$$

- ▶  $\hat{M} = (M_{f_1 f_2}) = \text{diag}(m_u, \dots, m_b)$ : Massenmatrix der Quarks (wirkt im **Flavor-Raum**)  
**QCD**
- ▶  $\mathcal{L}$  symmetrisch unter **globalen SU(3)<sub>c</sub>-Transformationen**:

$$\psi' = \hat{U}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\hat{U}^\dagger, \quad \hat{U} = \exp(-ig\alpha_a \hat{T}_a), \quad \hat{T}^a = \hat{\lambda}_a/2$$

# Quantenchromodynamik: QCD

- ▶ mache Invarianz lokal  $\alpha_a \rightarrow \alpha_a(\underline{x})$
- ▶ **eich-kovariante Ableitung**: führe 8 masselose **Eichfelder**  $A_\mu^a$  ein
- ▶ ersetze partielle durch **eich-kovariante Ableitungen**

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig A_{a,\mu} \hat{T}_a^{(\text{adj})}, \quad T_{a,bc}^{(\text{adj})} = -if_{abc}$$

- ▶ für kinetischen Term der Eichfelder: **Feldstärke-Tensor**

$$F_{c\mu\nu} = \frac{1}{ig} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]_c = \partial_\mu A_{c,\nu} - \partial_\nu A_{c,\mu} - g f_{abc} A_{a,\mu} A_{b,\nu}$$

- ▶ minimale Kopplung in Lagrangian  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a,\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - \hat{M})\psi$$

# Quantenchromodynamik: QCD

- ▶ Eichinvarianz: Lagrangian invariant unter nichtabelschen lokalen Eichtransformationen

$$\psi'(\underline{x}) = \hat{U}(\underline{x})\psi, \quad \bar{\psi}'(\underline{x}) = \bar{\psi}\hat{U}^\dagger, \quad \hat{U}(\underline{x}) = \exp[-ig\alpha_a(\underline{x})\hat{T}_a],$$

$$\mathcal{A}'_\mu(\underline{x}) = \hat{U}(\underline{x})\mathcal{A}_\mu(\underline{x})\hat{U}^\dagger(\underline{x}) - \frac{i}{g}\hat{U}(\underline{x})\partial_\mu\hat{U}^\dagger(\underline{x})$$

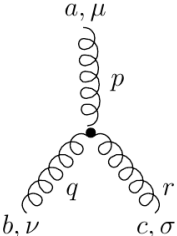
- ▶ „Teilchen“
  - ▶  $\psi$ : Quarks mit **Flavors** (u, d, c, s, t, b)
  - ▶  $\hat{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$  **Stromquarkmassen**
  - ▶  $A_{a,\mu}$ : Eichbosonen der  $SU(3)_c$ -Eichgruppe: **8 Gluonen**
  - ▶ Caveat: Quarks im QCD-Lagrangian *nicht* die **Konstituentenquarks** des Gell-Mann-Quarksmodells für Hadronen

# Quantenchromodynamik: QCD

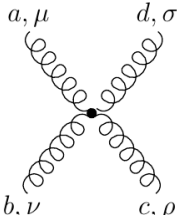
- ▶ Herausforderung: **erkläre Hadronenphänomenologie mit QCD**
  - ▶ **Confinement**: keine freien Quarks oder Gluonen beobachtet
  - ▶ leichte Quarks im QCD-Lagrangian:  $m_u = (2,16 \pm 0,07) \text{ MeV}$ ,  $m_d = (4,7 \pm 0,07) \text{ MeV}$ ,  $m_s = (93,5 \pm 0,8) \text{ MeV}$  [N<sup>+</sup>24]
  - ▶ woher kommen die Massen der leichten Hadronen  
z.B.  $m_p = 938,27208816 \pm 0,00000029 \text{ MeV}$  [N<sup>+</sup>24]
- ▶ Vergleich QED (**abelsche** Eichtheorie) vs. QCD (**nichtabelsche** Eichtheorie:
  - ▶ Gluonen „selbstwechselwirkend“ in Lagrangian

# Quantenchromodynamik: QCD

## ► Feynman-Regeln für Gluon-Selbstwechselwirkung



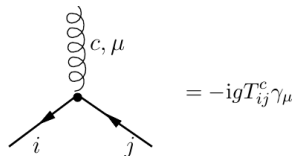
$$= \frac{g}{3!} f^{abc} [(p_\nu - r_\nu) g_{\mu\rho} + (q_\rho - p_\rho) g_{\nu\mu} + (r_\mu - q_\mu) g_{\rho\nu}]$$



$$= -\frac{ig^2}{4!} [ f^{xab} f^{xcd} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{xad} f^{xcb} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} - g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma}) \\ + f^{xdb} f^{xca} (g^{\sigma\rho} g^{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) ]$$

# Quantenchromodynamik: QCD

## ▶ Quark-Gluon-Wechselwirkung



- ▶ wichtige Schlussfolgerung aus nichtabelscher Eichinvarianz:  
**Kopplungskonstante** gleich für alle „Materiefelder“
- ▶ in QED mit abelscher Eichinvarianz: im Prinzip könnte jedes Materiefeld eigene Ladung haben
- ▶ NB: vollständige Feynman-Regeln der QCD komplizierter:
- ▶ **Faddeev-Popov-Quantisierung** [FP67] erfordert Pfadintegrale (nächste Vorlesung und [AL73])

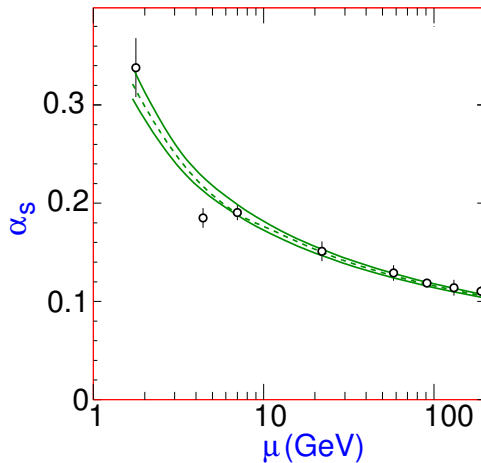
# Eigenschaften der QCD

- ▶ Renormierung: um Unendlichkeiten in höherer Ordnung Störungstheorie zu beseitigen: muss Wellenfunktionsnormierungsfaktoren, Massen und Kopplungskonstante **renormieren**
- ▶ **Subtraktion von divergenten Ausdrücken** von Selbst-Energie- und Vertexfunktion
- ▶  $\Rightarrow$  muss Energieskala  $\Lambda$  als „Renormierungspunkt“ einführen
- ▶ Kopplungskonstante:  $g \rightarrow g(\Lambda)$
- ▶ spezielle Eigenschaft **nichtabelscher Eichtheorien**
  - ▶ asymptotische Freiheit:  $g(\Lambda) \rightarrow 0$  für  $\Lambda \rightarrow \infty$
  - ▶ **Störungstheorie**: nur für Streuprozesse mit **großem Impulsübertrag** anwendbar
  - ▶  $\Rightarrow$  Hadronenphysik aus QCD **nichtperturbativ!**
- ▶ **„laufende Kopplungskonstante“** aus QCD (**Renormierungsgruppengleichung**)

[GW73, Pol73]

# Eigenschaften der QCD

- Physik-Nobel-Preis 2004 an D. Gross, F. Wilczek und H. D. Politzer



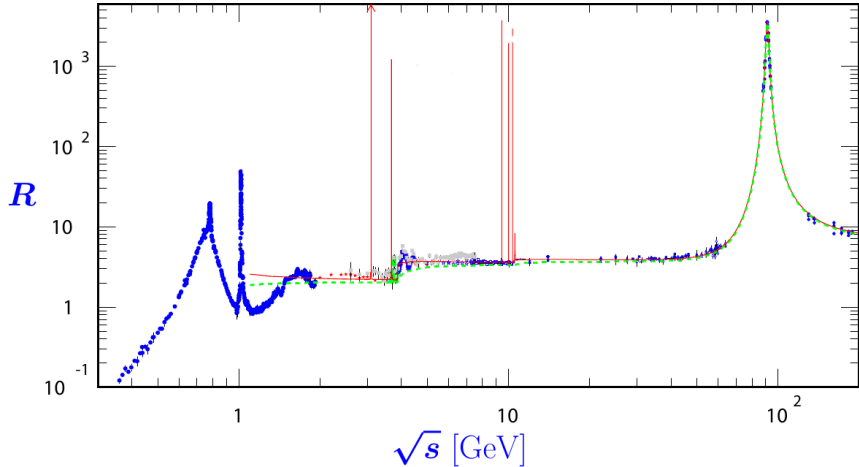


# Eigenschaften der QCD

- ▶ Hinweis auf Erklärung für **Confinement**: Kopplung groß bei kleinen Energien
- ▶ Perturbative QCD:
  - ▶ perturbative Berechnung von Streuprozessen bei hohen Stoßenergie mit Hadronen
  - ▶ Idee: Hadronen  $\hat{=}$  Bindungszustand aus Quarks („Valenzquarks und Seequarks“) und (virtuellen) Gluonen (**Partonen**)
  - ▶ beschreibe Stoßprozess mit Hadron als: harten Stoß von Quarks/Gluonen mit anderen Quarks/Gluonen in beteiligten Hadronen
  - ▶ Verteilung der Quarks und Gluonen in Hadron: **Partonverteilungsfunktionen (PDFs)** (abhängig von Energieübertrag beim Stoß)
  - ▶ PDFs: **nichtperturbative Größen**  $\Rightarrow$  müssen gemessen werden

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

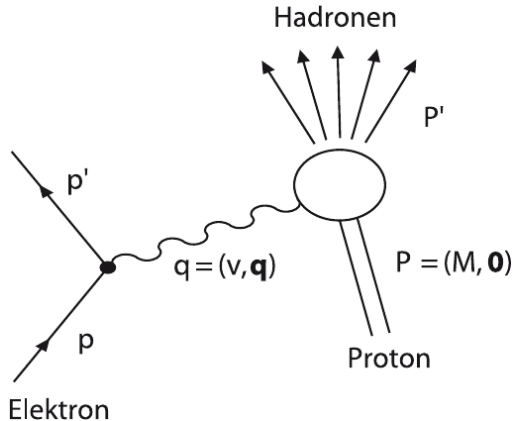
- Leptonenannihilation in Hadronen:  $e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen}$



Quelle: [P<sup>+</sup>16]

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

- Tiefinelastische Streuung von Elektronen an Hadronen (Protonen) [PRS<sup>+</sup>14]



- Experimente am Stanford Linear Accelerator (SLAC) 1968

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

- ▶ Kinematik:  $\underline{P}$ : Vierimpuls des Protons,  $\underline{q}$  Viererimpuls des ausgetauschten Photons (**raumartig**)
- ▶ invariante Masse  $W$  der Endprodukte (Viererimpuls  $\underline{P}'$ )

$$W^2 = \underline{P}'^2 = M^2 + 2\underline{P} \cdot \underline{q} + \underline{q}^2 \stackrel{\text{lab}}{=} M^2 + 2M\nu - Q^2, \quad Q^2 = -\underline{q}^2 > 0$$

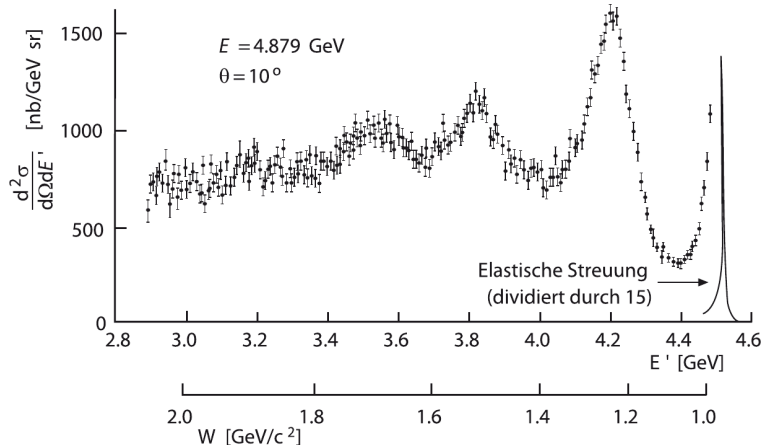
- ▶  $\nu = \underline{P} \cdot \underline{q} / M$  Energieübertrag des Elektrons im **Laborsystem**,  $\underline{P} = (M, \vec{0})^T$
- ▶ weitere Lorentz-invariante Größen

$$y = \frac{\underline{P} \cdot \underline{q}}{\underline{P} \cdot \underline{p}} \stackrel{\text{lab}}{=} \frac{E - E'}{E}, \quad x = \frac{Q^2}{2\underline{P} \cdot \underline{q}} \stackrel{\text{lab}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$$

- ▶  $x$ : **Bjorken-Skalenvariable**
- ▶ **elastische Streuung**: hadronischer Endzustand wieder einzelnes Proton  
 $\Rightarrow W = M \Rightarrow x = 1$

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

- ▶ **inelastische Streuung:**  $W > M \Rightarrow 0 < x < 1$
- ▶  $x$  ist Maß für **Inelastizität** des Streuprozesses



# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

- ▶ Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega dE'} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[ W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

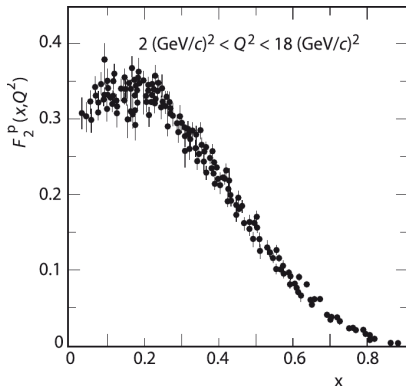
- ▶ **Mott-Streuung**: Streuung eines Elektrons an Coulomb-Potential des Protons
- ▶ **Strukturfunktionen**:  $W_2$  elektrische,  $W_1$  magnetische Wechselwirkung
- ▶ dimensionslose Strukturfunktionen

$$F_1(x, Q^2) = M W_1(Q^2, \nu), \quad F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu)$$

- ▶ invarianter differentieller Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ \left( \frac{1-y}{x} - \frac{My}{2E} \right) F_2(x, Q^2) + y^2 F_1(x, Q^2) \right]$$

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD



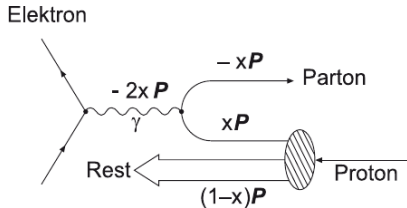
- ▶ Formfaktoren hängen in guter Näherung nicht von  $Q$  ab
- ▶ Formfaktor: Fourier-Transformation der Ladungsverteilung (**Bjorken-Skalierung**)

$$F(\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x}) \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x})$$

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

- ▶ Punktladung:  $\rho(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \Rightarrow F(\vec{q}) = 1 = \text{const}$
- ▶ tiefinelastische Elektronstreuung erfolgt an **Punktladungen!**
- ▶ Feynman  $\Rightarrow$  **Partonmodell**:  
Proton ist gebundener Zustand von elementaren **Partonen** [Fey69, BP69]
- ▶ Interpretation im **Breit-System**:  $q^0 = 0$

$$x = \frac{Q^2}{2\underline{P} \cdot \underline{q}} \stackrel{\text{Breit}}{=} \frac{Q}{2|\vec{P}|} \Rightarrow Q \stackrel{\text{Breit}}{=} 2x|\vec{P}|$$





# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

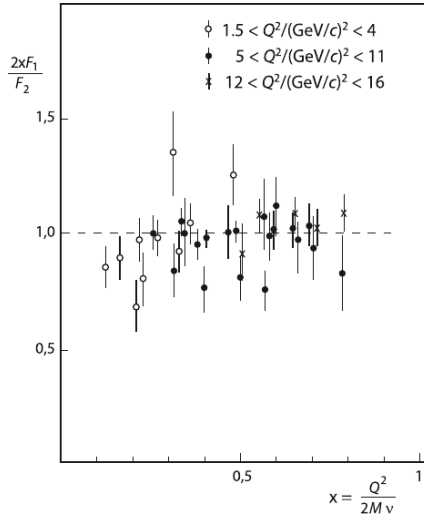
- ▶  $\Rightarrow x\vec{P}$  Impuls des gestreuten Partons
- ▶ Ortsauflösung der **Protonladungsverteilung**: Wellenlänge des virtuellen Photons

$$\lambda \stackrel{\text{Breit}}{=} \frac{2\pi}{Q}$$

- ▶ Strukturfunktion  $F_1$ : **magnetische Wechselwirkung**  $\Rightarrow F_1 = 0$  für **skalare Teilchen**
- ▶ für **Spin-1/2-Teilchen**

$$\frac{2x F_1(x)}{F_2(x)} = 1$$

# Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD



- Partonen sind Spin-1/2-Teilchen: **Quarks!**

# Literatur

- [AL73] E. Abers and B. Lee, Gauge Theories, Phys. Rept. **9**, 1 (1973),  
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(73\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(73)90027-6).
- [BP69] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon, Phys. Rev. **185**, 1975 (1969), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.185.1975>.
- [Fey69] R. P. Feynman, Very high-energy collisions of hadrons, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969), <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.1415>.
- [FGML73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Advantages of the Color Octet Gluon Picture, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973),  
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(73\)90625-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(73)90625-4).
- [FP67] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967),  
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(67\)90067-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(67)90067-6).

# Literatur

- [GW73] D. Gross and F. Wilczek, Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973),  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- [Lip66] H. J. Lipkin, *Lie groups for Pedestrians*, North-Holland Publ. Comp. (1966).
- [N<sup>+</sup>24] S. Navas et al. (Particle Data Group), Review of particle physics, Phys. Rev. D **110**, 030001 (2024),  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.030001>.
- [Nac86] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1986).
- [P<sup>+</sup>16] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Review of Particle Physics, Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016),  
<https://doi.org/10.1088/1674-1137/40/10/100001>.

# Literatur

- [Pol73] H. D. Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973),  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.
- [PRS<sup>+</sup>14] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche and W. Rodejohann, *Teilchen und Kerne*, Springer, Berlin, Heidelberg, 9 edn. (2014),  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-37822-5>.
- [YM54] C.-N. Yang and R. L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev. **96**, 191 (1954),  
<https://link.aps.org/abstract/PR/v96/i1/p191>.