

Einführung in die theoretische Kern- und
Teilchenphysik
Vorlesung 11: Quarkmodell für Hadronen und
QCD

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

1	Quark-Modell für Hadronen	1
2	Quantenchromodynamik	9
3	Literatur	19
1	Quark-Modell für Hadronen	

Quark-Modell für Hadronen

Literatur: [\[Nac86\]](#)

Symmetrien von Teilchen

- Symmetrie als Ordnungsprinzip für Teilchenzoo
- einfachstes Beispiel: **Isospin** für Proton und Neutron (Heisenberg 1932)
- Proton und Neutron haben fast gleiche Masse $m_N \simeq 938 \text{ MeV}$
- Proton und Neutron als ein Teilchen (**Nukleon**) mit zusätzlicher **Quantenzahl**
- Symmetrie: führe „Flavor-Dublett“ (ψ_p, ψ_n) (zwei Dirac-Spinoren)
- SU(2)-Operationen auf „Flavor-Raum“
- Nukleon: Isospin $I = 1/2$, $I_3 = \text{diag}(1/2, -1/2)$ mit $I_{3p} = -I_{3n} = 1/2$
- Physik der **starken WW** (näherungsweise) invariant unter **Isospinrotationen**
- Proton und Neutron verhalten sich bzgl. starker WW (fast) gleich

Der achtfache Pfad

- ab den 1950-1960ern „Teilchenzoo“ entdeckt
- die meisten sind **Hadronen**: Teilchen, auf die starke Kraft wirkt
- Gell-Mann, Zweig, Ne'eman (1961): alle Hadronen als gebundene Zustände von **Spin-1/2-Teilchen mit elektrischen Ladungen $-1/3$ und $+2/3$**
- Gell-Mann: Wie sollen sie heißen? **Quarks!**

- **Symmetrieprinzipien** brachten Ordnung ins Chaos:

- drei Quarks (up, down, strange)
- drei Flavors: SU(3)-Symmetrie
- Zustände nur aus (up,down):
Isospin SU(2)-Untergruppe
- Murray Gell-Mann: Nobelpreis für Physik (1969)



Die Symmetriegruppe SU(3)

- hier: näherungsweise „**Flavor-Symmetrie**“
- Baryonen (z.B. Protonen, Neutronen, Hyperonen) näherungsweise gleiche Massen
- lassen sich nach **Multiplets** der irreduziblen Darstellungen der SU(3) ordnen
- ursprünglich (1961 vor der QCD!): angewandt auf Hadronen
- drei „leichte Quarks“: **up, down, strange**
- drei Flavor-Zustände

$$|1\rangle = |u\rangle, \quad |2\rangle = |d\rangle, \quad |3\rangle = |s\rangle.$$

- im Limes exakter SU(3)-Flavor-Symmetrie: **unitäre SU(3) Symmetrietransformation**

$$\mathbf{U} |i\rangle = \sum_{j=1}^3 |j\rangle U_{ji}, \quad (U_{ji} \in \text{SU}(3))$$

- SU(3): unitäre $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -Matrizen: $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \mathbb{1}_3$ mit $\det U = 1$

- infinitesimale Transformationen:

$$\mathbf{U} = 1 + i\delta\varphi \mathbf{H} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2)$$

- Unitarität:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = 1 - i\delta\varphi(\hat{H}^\dagger - \hat{H}) + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \stackrel{!}{=} 1 + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}^\dagger$$

- Determinante:

$$\det \hat{U} = \det(1 + \delta\varphi \hat{H} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2)) = 1 + i\delta\varphi \text{Tr} \hat{H} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \stackrel{!}{=} 1 + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \Rightarrow \text{Tr} \hat{H} = 0.$$

- **Generatoren der SU(3)**: spurlose hermitesche $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -Matrizen
- 3 reelle Diagonalelemente mit $\sum_j H_{jj} = 0 \Rightarrow 2$ unabhängige Diagonalelemente 3 unabhängige komplexe Einträge in der oberen Dreiecksmatrix \Rightarrow weitere 6 reelle Parameter
- \Rightarrow 8-dimensionale reelle **Lie algebra**
- analog zu Pauli-Matrizen der SU(2): **Gell-Mann-Matrizen**

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\lambda}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\lambda}_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ bilden su(2)-Unteralgebra \Rightarrow **Isospin** (u, d -Quarks): $\hat{F} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)/2$
- zwei simultan diagonalisierbare su(3)-Matrizen: $\hat{F}_3 = \hat{\lambda}_3/2 \hat{=} \text{Isospin-Ladung}$ $I_3 = \pm 1/2$ und Hyperladung $\hat{Y} = 1/\sqrt{3}\hat{\lambda}_8$ ($Y = 1/3, -2/3$)
- Antiquarks: transformieren sich mit \hat{U}^* bzw. infinitesimal

$$\hat{U}^* = 1 + i\delta\varphi_a \left(-\frac{\hat{\lambda}_a^*}{2} \right) + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) = 1 + i\delta\varphi_a \left(-\frac{\hat{\lambda}_a^T}{2} \right) + \mathcal{O}(\delta\varphi^2)$$

- im Gegensatz zur $\text{su}(2)$ bzw. $\text{SU}(2)$ ist die konjugiert-Komplexe 3-dimensionale Darstellung (als 3^* bezeichnet) nicht äquivalent zur ursprünglichen Fundamentaldarstellung. Entsprechend haben **Antiquarks** zwar die **gleichen Isospin-Ladungen** $I_3 = \pm 1/2$ wie Quarks aber **entgegengesetzte Hyperladungen** $Y = -1/2, +2/3$.

- einige Eigenschaften der Gell-Mann-Matrizen:

$$\text{tr}(\hat{\lambda}_a \hat{\lambda}_b) = 2\delta_{ab}, \quad [\hat{\lambda}_a/2, \hat{\lambda}_b/2] = if_{abc} \hat{\lambda}_c/2.$$

- **Strukturkonstanten**

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} \text{Tr}([\hat{\lambda}_a, \hat{\lambda}_b] \hat{\lambda}_c)$$

$\Rightarrow f_{abc} \in \mathbb{R}$ und total antisymmetrisch

- **adjungierte Darstellung** definiere $\mathbf{C} = c_a \lambda_a/2 \equiv \hat{C}$ mit $c_a \in \mathbb{C}$ als „Vektoren“ im Raum der spurlosen hermiteschen 3×3 -Matrizen

- Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{C}_1 | \mathbf{C}_2 \rangle = 2 \text{tr}(\mathbf{C}_1^\dagger \mathbf{C}_2)$$

- Gruppendarstellung:

$$\hat{D}(\hat{U})\mathbf{C} = \hat{U} \hat{C} \hat{U}^\dagger.$$

- \Rightarrow 8-dimensionale **irreduzible „adjungierte Darstellung“**

- infinitesimale Erzeugende:

- mehr zur Mathematik der $\text{SU}(3)$ [Lip66]

$$(\hat{F}_a^{(\text{ad})})_{bc} = if_{acb} = -if_{abc}.$$

- **Hadronen**

– Quarks wurden nie als **asymptotisch freie Teilchen** beobachtet \Rightarrow **Confinement** (Quarkeinschluss)

– **Ladungsartige Quantenzahlen** von Hadronen

– erhalten bei Reaktionen aufgrund der **starken WW**

* **Baryonenzahl** B : $B_{\text{Mesons}} = 0$, $B_q = 1/3$, $B_{\bar{q}} = -1/3$

* **Isospin**: (u,d)-Quarks und -Antiquarks $I = 1/2$, $I_{3u} = -I_{3\bar{u}} = +1/2$, $I_{3d} = -I_{3\bar{d}} = -1/2$, $I_s = 0$

- * **Strangeness**: $S_u = S_d = 0, S_s = -1, S_{\bar{s}} = +1$
- * Relation zur **Hyperladung**: $Y = S + B$
- * **elektrische Ladung**: $Q = I_3 + Y/2 \Rightarrow Q_u = -Q_{\bar{u}} = +2/3, Q_d = -Q_{\bar{d}} = Q_s = -Q_{\bar{s}} = -1/3$

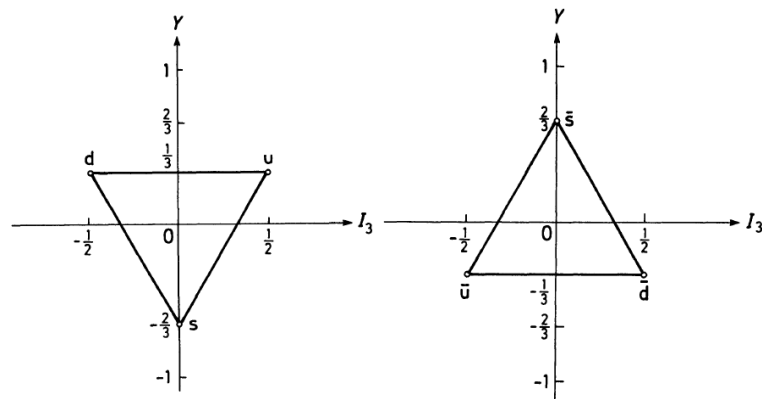
– „Standard-Hadronen“:

- * **Mesonen** \Leftrightarrow gebundene Zustände aus einem Quark und einem Antiquark \Rightarrow ganzzahlige Spins \Rightarrow **Bosonen**
- * **Baryonen** \Leftrightarrow gebundene Zustände aus 3 Quarks \Rightarrow halbzahlige Spins \Rightarrow **Baryonen**

– „Ausreduktion“ von zusammengesetzten SU(3)-Flavors in **irreduzible Multiplets**

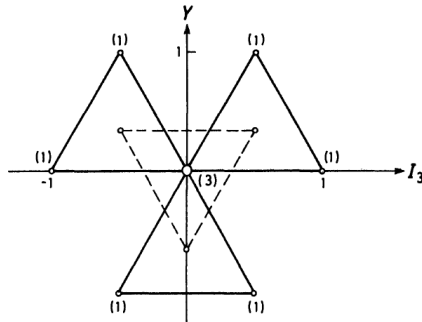
- * Mesonen: $3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8$
- * Baryonen: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$

- **Gewichtsdiagramme**: trage **Isospin** und **Hyperladung** in Koordinatensystem auf
- für Quarks (3-Darstellung) und Antiquarks (3*-Darstellung)



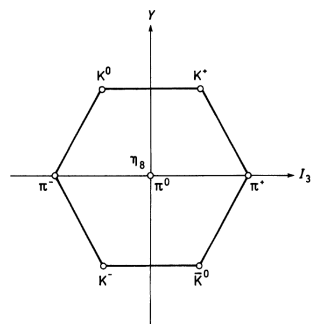
Quelle: [Nac86]

- Mesonen: $I_3 = I_{3q} + I_{3\bar{q}}, Y = Y_q + Y_{\bar{q}} \Rightarrow$ „geometrische Addition“ im Gewichtsdiagramm



Quelle: [Nac86]

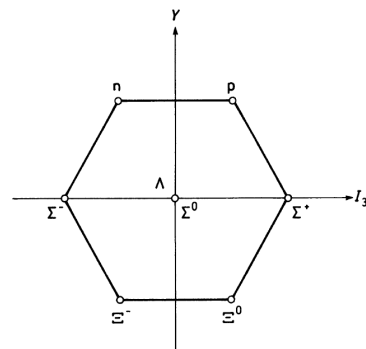
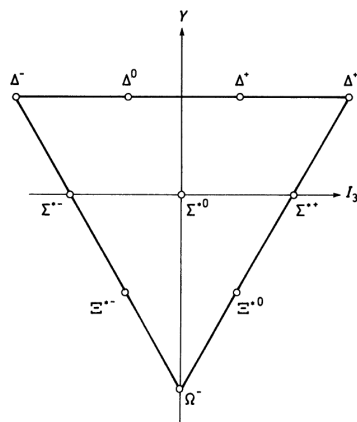
- Beispiel: **leichteste pseudoskalare Mesonen**



SU(3) representation	I	Isospin I_3	Hypercharge Y	0^- particles
1	0	0	0	η'
8	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	1	K^+, K^0
	1	+1, 0, -1	0	π^+, π^0, π^-
	0	0	0	η
	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	-1	\bar{K}^0, K^-

Quelle: [Nac86]

- **Baryonen** leichtestes Dekuplett und Oktett



Quelle: [Nac86]

- **Erfolge des Quark-Modells**

- alle leichten Mesonen und Baryonen lassen sich in Schema einordnen

J^P	(D, L_N^P)	S	Octet members			Singlets
$1/2^+$	$(56, 0_0^+)$	$1/2$	$N(939)$	$\Lambda(1116)$	$\Sigma(1193)$	$\Xi(1318)$
$1/2^+$	$(56, 0_2^+)$	$1/2$	$N(1440)$	$\Lambda(1600)$	$\Sigma(1660)$	
$1/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$N(1535)$	$\Lambda(1670)$	$\Sigma(1620)$	$\Lambda(1405)$
					$\Sigma(1560)^\dagger$	
$3/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$N(1520)$	$\Lambda(1690)$	$\Sigma(1670)$	$\Xi(1820)$
$1/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$3/2$	$N(1650)$	$\Lambda(1800)$	$\Sigma(1750)$	$\Xi(1690)$
					$\Sigma(1620)^\dagger$	
$3/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$3/2$	$N(1700)$	$\Lambda(?)$	$\Sigma(1940)^\dagger$	$\Xi(?)$
$5/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$3/2$	$N(1675)$	$\Lambda(1830)$	$\Sigma(1775)$	$\Xi(1950)^\dagger$
$1/2^+$	$(70, 0_2^+)$	$1/2$	$N(1710)$	$\Lambda(1810)$	$\Sigma(1880)$	$\Xi(?)$
$3/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$1/2$	$N(1720)$	$\Lambda(1890)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$
$5/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$1/2$	$N(1680)$	$\Lambda(1820)$	$\Sigma(1915)$	$\Xi(2030)$
$7/2^-$	$(70, 3_3^-)$	$1/2$	$N(2190)$	$\Lambda(?)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$
$9/2^-$	$(70, 3_3^-)$	$3/2$	$N(2250)$	$\Lambda(?)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$
$9/2^+$	$(56, 4_4^+)$	$1/2$	$N(2220)$	$\Lambda(2350)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$

Decuplet members						
$3/2^+$	$(56, 0_0^+)$	$3/2$	$\Delta(1232)$	$\Sigma(1385)$	$\Xi(1530)$	$\Omega(1672)$
$3/2^+$	$(56, 0_2^+)$	$3/2$	$\Delta(1600)$	$\Sigma(1690)^\dagger$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$
$1/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$\Delta(1620)$	$\Sigma(1750)^\dagger$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$
$3/2^-$	$(70, 1_1^-)$	$1/2$	$\Delta(1700)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Omega(2012)$
$5/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$3/2$	$\Delta(1905)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$
$7/2^+$	$(56, 2_2^+)$	$3/2$	$\Delta(1950)$	$\Sigma(2030)$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$
$11/2^+$	$(56, 4_4^+)$	$3/2$	$\Delta(2420)$	$\Sigma(?)$	$\Xi(?)$	$\Omega(?)$

Quelle: [N+24]

- Gell-Mann-Okubo-Massenformel \Rightarrow SU(3) nur näherungsweise gültig: Quarkmassen nicht alle gleich
- Annahme exakter Isospin-Symmetrie (auch nur näherungsweise erfüllt!): $m_u = m_d < m_s$
- mit 3 Parametern \bar{m} , δm_1 und δm_2 :

$$m_{\text{Baryon}} = \bar{m} + Y \delta m_1 + \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] \delta m_2$$

- folgt aus Betrachtungen zur Flavor-SU(3)-Symmetrie mit Verletzung durch Massendifferenz zwischen (u,d)- und s-Quarks als Störung
- Details: s. [Nac86]

- Problem: man erhält nur alle Baryonen, wenn man **drei Quarks im gleichen Zustand erlaubt!**
- ABER: Quarks müssen **Spin 1/2** besitzen \Rightarrow Quarks sind **Fermionen**
- andererseits funktioniert das Modell:
vorhergesagtes Baryon $|\Omega^- \rangle = |sss \rangle$ wurde gefunden!

- Lösung: Jede Quarksorte kommt in drei „Farben“ vor
- Alle Quarks von derselben Art sind gleich, können aber verschiedene Farbquantenzahlen besitzen \Rightarrow **exakte Symmetrie!**
- beobachtbar **nur farbneutrale „weiße“ Zustände**
 - 3 Quarks mit Farben RGB \Rightarrow farbneutrale Baryonen
 - Quark+Antiquark jeweils mit Farbe und dazugehöriger Antifarbe \Rightarrow farbneutrale Mesonen
- Farbfreiheitsgrad: **$SU(3)_c$ -Symmetrie**
- „geeicht“ \Rightarrow **Quantenchromodynamik** als fundamentale Theorie der **starken Wechselwirkung**

2 Quantenchromodynamik

Quantenchromodynamik

Literatur: [Nac86]

Erinnerung: Quantenelektrodynamik (QED)

- beginne mit freiem Lagrangian für Elektronen und Positronen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_e)\psi$$

- Symmetrie unter Änderung der Phase

$$\psi' = \exp(-iq_e\alpha)\psi, \quad \bar{\psi}' = \exp(+iq_e\alpha)\bar{\psi}, \quad \alpha = \text{const}$$

- Elektronenladung $q_e = -e$
- mache Symmetrie lokal: $\alpha \rightarrow \alpha(\underline{x})$
- führe masseloses Vektorfeld A_μ ein
- ersetze alle partiellen Ableitungen durch **eichkovariante Ableitungen**

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu$$

- antisymmetrischer **Feldstärketensor** $\rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}[i(\not{\partial} + iq_e\not{A}) - m]\psi,$$

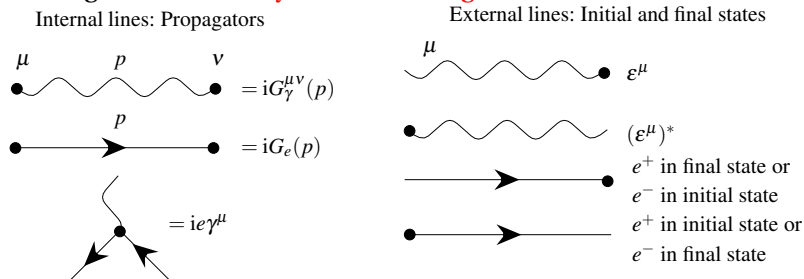
- invariant unter **lokalen Eichtransformationen**

$$\psi'(\underline{x}) = \exp[-iq_e\alpha(\underline{x})]\psi(\underline{x}), \quad \bar{\psi}'(\underline{x}) = \exp[+iq_e\alpha(\underline{x})]\bar{\psi}(\underline{x}), \quad A'_\mu(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) + \partial_\mu\alpha(\underline{x})$$

- NB: Eichinvarianz keine Symmetrie, da Eichtransformation keine neue physikalische Situation bedeutet!

Quantisierung

- Felder \Rightarrow **Feldoperatoren**
- Physikalische Größen: S-Matrixelemente: $|T_{fi}|^2$ Übergangswahrscheinlichkeiten
- lokale, mikrokausale QFT mit stabilem Grundzustand
 - Spin-Statistik-Theorem:** Halbzahlgiger Spin \Leftrightarrow Fermionen, ganzzahlgiger Spin \Leftrightarrow bosons
- Störungstheorie (in **Feynman-Eichung**)



- $G_{\gamma}^{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}/(p^2 + i0^+)$, $G_e = (\not{p} - m)/(p^2 - m^2 + i0^+)$

Quantenchromodynamik: QCD

- C. N. Yang, R. Mills: mache nichtabelsche Symmetrien lokal \Rightarrow **nichtabelsche Eichtheorien** [YM54]
- H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler: Konstruiere Theorie mit **lokaler SU(3)_c**-Eichinvarianz [FGML73]
- Starte mit **Quarks**: ψ_{fc} mit Flavours $f \in \{u, d, c, s, t, b\}$ und Farben $c \in \{1, 2, 3\}$
- im Folgenden einfach ψ , Eichsymmetrie: SU(3)_c: ψ transformieren unter fundamentaler Darstellung 3
- Lagrangian für freie Quarks

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - \hat{M})\psi$$

- $\hat{M} = (M_{f_1 f_2}) = \text{diag}(m_u, \dots, m_b)$: Massenmatrix der Quarks (wirkt im **Flavor-Raum**) **QCD**

- \mathcal{L} symmetrisch unter **globalen SU(3)_c-Transformationen**:

$$\psi' = \hat{U}\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\hat{U}^\dagger, \quad \hat{U} = \exp(-ig\alpha_a \hat{T}_a), \quad \hat{T}^a = \hat{\lambda}_a/2$$

- mache Invarianz lokal $\alpha_a \rightarrow \alpha_a(\underline{x})$
- **eich-kovariante Ableitung**: führe 8 masselose **Eichfelder** A_μ^a ein
- ersetze partielle durch **eich-kovariante Ableitungen**

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig A_{a,\mu} \hat{T}_a^{(\text{adj})}, \quad T_{a,bc}^{(\text{adj})} = -if_{abc}$$

- für kinetischen Term der Eichfelder: **Feldstärke-Tensor**

$$F_{c\mu\nu} = \frac{1}{ig} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]_c = \partial_\mu A_{c,\nu} - \partial_\nu A_{c,\mu} - g f_{abc} A_{a,\mu} A_{b,\nu}$$

- minimale Kopplung in Lagrangian $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a,\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - \hat{M})\psi$$

- Eichinvarianz: Lagrangian invariant unter nichtabelschen lokalen Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \psi'(\underline{x}) &= \hat{U}(\underline{x})\psi, \quad \bar{\psi}'(\underline{x}) = \bar{\psi}\hat{U}^\dagger, \quad \hat{U}(\underline{x}) = \exp[-ig\alpha_a(\underline{x})\hat{T}_a], \\ \mathcal{A}'_\mu(\underline{x}) &= \hat{U}(\underline{x})\mathcal{A}_\mu(\underline{x})\hat{U}^\dagger(\underline{x}) - \frac{i}{g}\hat{U}(\underline{x})\partial_\mu\hat{U}^\dagger(\underline{x}) \end{aligned}$$

- „Teilchen“

- ψ : Quarks mit **Flavors** (u, d, c, s, t, b)
- $\hat{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ **Stromquarkmassen**
- $A_{a,\mu}$: Eichbosonen der SU(3)_c-Eichgruppe: **8 Gluonen**
- Caveat: Quarks im QCD-Lagrangian *nicht* die **Konstituentenquarks** des Gell-Mann-Quarksmodells für Hadronen
- Herausforderung: **erkläre Hadronenphänomenologie mit QCD**
 - * **Confinement**: keine freien Quarks oder Gluonen beobachtet
 - * leichte Quarks im QCD-Lagrangian: $m_u = (2,16 \pm 0,07) \text{ MeV}$,
 $m_d = (4,7 \pm 0,07) \text{ MeV}$, $m_s = (93,5 \pm 0,8) \text{ MeV}$ [N⁺24]

* woher kommen die Massen der leichten Hadronen

z.B. $m_p = 938,27208816 \pm 0,00000029 \text{ MeV}$ ^[N+24]

- Vergleich QED (abelsche Eichtheorie) vs. QCD (nichtabelsche Eichtheorie):

– Gluonen „selbstwechselwirkend“ in Lagrangian

– Feynman-Regeln für Gluon-Selbstwechselwirkung

$$= \frac{g}{3!} f^{abc} [(p_\nu - r_\nu) g_{\mu\rho} + (q_\rho - p_\rho) g_{\nu\mu} + (r_\mu - q_\mu) g_{\rho\nu}]$$

$$= -\frac{ig^2}{4!} [f^{xab} f^{xcd} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{xad} f^{xcb} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} - g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma}) + f^{xdb} f^{xca} (g^{\sigma\rho} g^{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})]$$

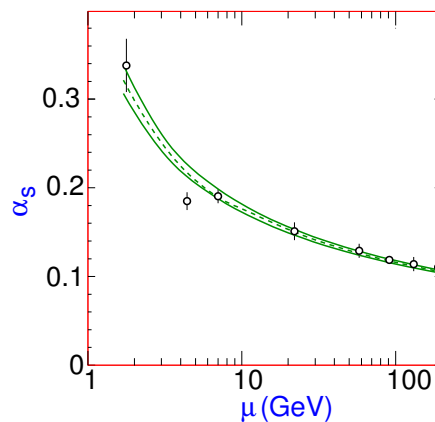
– Quark-Gluon-Wechselwirkung

$$= -ig T_{ij}^c \gamma_\mu$$

- wichtige Schlussfolgerung aus nichtabelscher Eichinvarianz: **Kopplungs-konstante** gleich für alle „Materiefelder“
- in QED mit abelscher Eichinvarianz: im Prinzip könnte jedes Materiefeld eigene Ladung haben
- NB: vollständige Feynman-Regeln der QCD komplizierter:
- **Faddeev-Popov-Quantisierung** ^[FP67] erfordert Pfadintegrale (nächste Vorlesung und ^[AL73])

Eigenschaften der QCD

- Renormierung: um Unendlichkeiten in höherer Ordnung Störungstheorie zu beseitigen: muss Wellenfunktionsnormierungsfaktoren, Massen und Kopplungskonstante **renormieren**
- **Subtraktion von divergenten Ausdrücken** von Selbst-Energie- und Vertexfunktion
- \Rightarrow muss Energieskala Λ als „Renormierungspunkt“ einführen
- Kopplungskonstante: $g \rightarrow g(\Lambda)$
- spezielle Eigenschaft **nichtabelscher Eichtheorien**
 - asymptotische Freiheit: $g(\Lambda) \rightarrow 0$ für $\Lambda \rightarrow \infty$
 - **Störungstheorie**: nur für Streuprozesse mit **großem Impulsübertrag** anwendbar
 - \Rightarrow Hadronenphysik aus QCD **nichtperturbativ**!
- „laufende Kopplungskonstante“ aus QCD (**Renormierungsgruppengleichung**) [GW73, Pol73]
- Physik-Nobel-Preis 2004 an D. Gross, F. Wilczek und H. D. Politzer

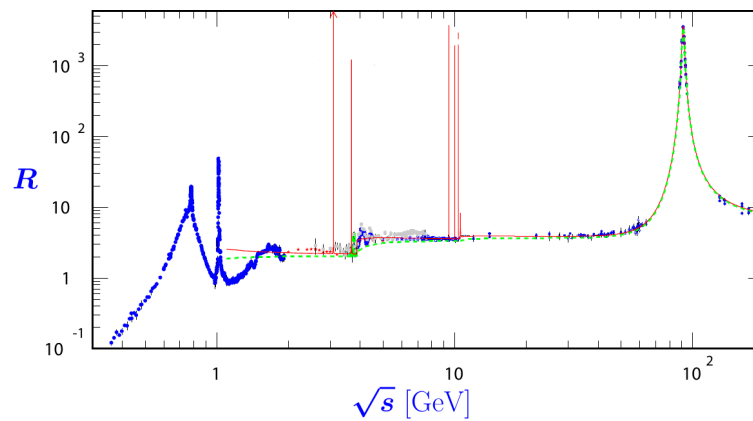


- Hinweis auf Erklärung für **Confinement**: Kopplung groß bei kleinen Energien
- Perturbative QCD:

- perturbative Berechnung von Streuprozessen bei hohen Stoßenergie mit Hadronen
- Idee: Hadronen $\hat{=}$ Bindungszustand aus Quarks („Valenzquarks und Seequarks“) und (virtuellen) Gluonen (**Partonen**)
- beschreibe Stoßprozess mit Hadron als: harten Stoß von Quarks/Gluonen mit anderen Quarks/Gluonen in beteiligten Hadronen
- Verteilung der Quarks und Gluonen in Hadron: **Partonverteilungsfunktionen (PDFs)** (abhängig von Energieübertrag beim Stoß)
- PDFs: **nichtperturbative Größen** \Rightarrow müssen gemessen werden

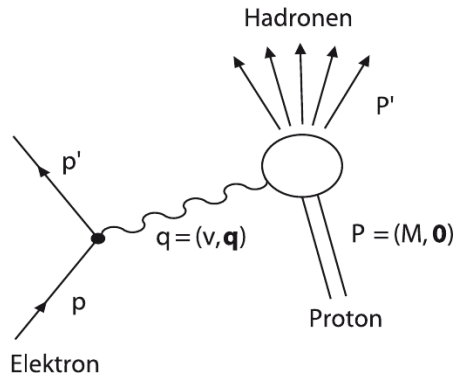
Experimentelle Bestätigung für Partonmodell/QCD

- Leptonenannihilation in Hadronen: $e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen}$



Quelle: [P⁺16]

- Tiefinelastische Streuung von Elektronen an Hadronen (Protonen) [PRS⁺14]



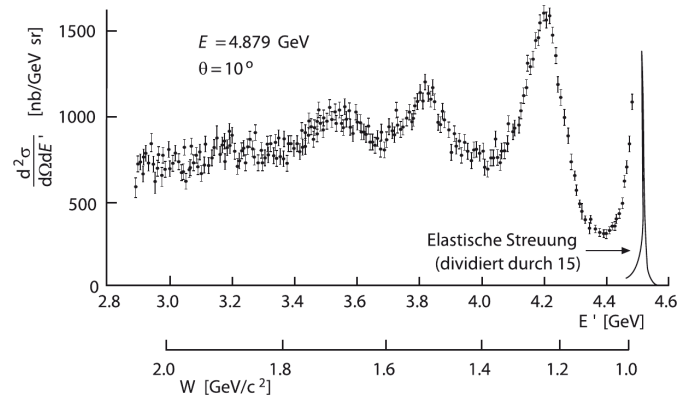
- Experimente am Stanford Linear Accelerator (SLAC) 1968
- Kinematik: \underline{P} : Vierimpuls des Protons, \underline{q} Viererimpuls des ausgetauschten Photons (**raumartig**)
- invariante Masse W der Endprodukte (Viererimpuls \underline{P}')

$$W^2 = \underline{P}'^2 = M^2 + 2\underline{P} \cdot \underline{q} + \underline{q}^2 \stackrel{\text{lab}}{=} M^2 + 2M\nu - Q^2, \quad Q^2 = -\underline{q}^2 > 0$$

- $\nu = \underline{P} \cdot \underline{q} / M$ Energieübertrag des Elektrons im **Laborsystem**, $\underline{P} = (M, \vec{0})^T$
- weitere Lorentz-invariante Größen

$$y = \frac{\underline{P} \cdot \underline{q}}{\underline{P} \cdot \underline{p}} \stackrel{\text{lab}}{=} \frac{E - E'}{E}, \quad x = \frac{Q^2}{2\underline{P} \cdot \underline{q}} \stackrel{\text{lab}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$$

- x : **Bjorken-Skalenvariable**
- **elastische Streuung**: hadronischer Endzustand wieder einzelnes Proton
 $\Rightarrow W = M \Rightarrow x = 1$
- **inelastische Streuung**: $W > M \Rightarrow 0 < x < 1$
- x ist Maß für **Inelastizität** des Streuprozesses



- Wirkungsquerschnitt

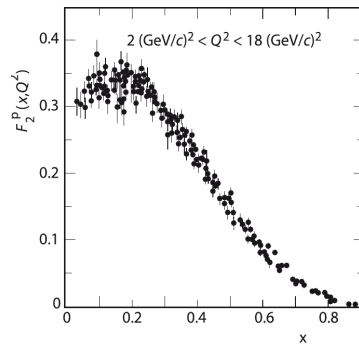
$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- **Mott-Streuung:** Streuung eines Elektrons an Coulomb-Potential des Protons
- **Strukturfunktionen:** W_2 elektrische, W_1 magnetische Wechselwirkung
- dimensionslose Strukturfunktionen

$$F_1(x, Q^2) = M W_1(Q^2, \nu), \quad F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu)$$

- invarianter differentieller Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[\left(\frac{1-y}{x} - \frac{My}{2E} \right) F_2(x, Q^2) + y^2 F_1(x, Q^2) \right]$$

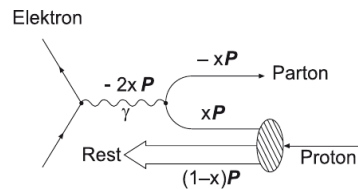


- Formfaktoren hängen in guter Näherung nicht von Q ab
- Formfaktor: Fourier-Transformation der Ladungsverteilung (**Bjorken-Skalierung**)

$$F(\vec{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x}) \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x})$$

- Punktladung: $\rho(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \Rightarrow F(\vec{q}) = 1 = \text{const}$
- tiefinelastische Elektronstreuung erfolgt an **Punktladungen!**
- Feynman \Rightarrow **Partonmodell:**
Proton ist gebundener Zustand von elementaren **Partonen** [Fey69, BP69]
- Interpretation im **Breit-System**: $q^0 = 0$

$$x = \frac{Q^2}{2\underline{P} \cdot \underline{q}} \stackrel{\text{Breit}}{=} \frac{Q}{2|\vec{P}|} \Rightarrow Q \stackrel{\text{Breit}}{=} 2x|\vec{P}|$$

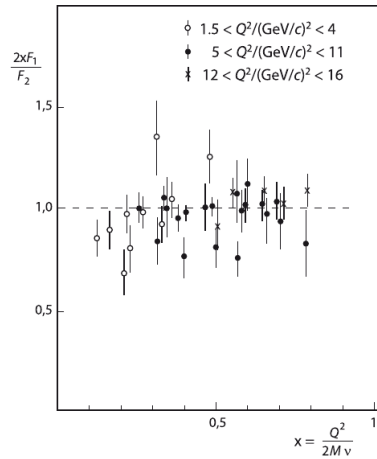


- $\Rightarrow x|\vec{P}|$ Impuls des gestreuten Partons
- Ortsauflösung der **Protonladungsverteilung**: Wellenlänge des virtuellen Photons

$$\lambda \stackrel{\text{Breit}}{=} \frac{2\pi}{Q}$$

- Strukturfunktion F_1 : **magnetische Wechselwirkung** $\Rightarrow F_1 = 0$ für **skalare Teilchen**
- für **Spin-1/2-Teilchen**

$$\frac{2x F_1(x)}{F_2(x)} = 1$$



- Partonen sind Spin-1/2-Teilchen: **Quarks!**

3 Literatur

Literatur

Literatur

- [AL73] E. Abers and B. Lee, Gauge Theories, Phys. Rept. **9**, 1 (1973),
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(73\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(73)90027-6).
- [BP69] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon, Phys. Rev. **185**, 1975 (1969),
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.185.1975>.
- [Fey69] R. P. Feynman, Very high-energy collisions of hadrons, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969),
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.1415>.
- [FGML73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Advantages of the Color Octet Gluon Picture, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973),
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(73\)90625-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(73)90625-4).
- [FP67] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967),
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(67\)90067-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(67)90067-6).

- [GW73] D. Gross and F. Wilczek, Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973),
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- [Lip66] H. J. Lipkin, *Lie groups for Pedestrians*, North-Holland Publ. Comp. (1966).
- [N⁺24] S. Navas et al. (Particle Data Group), Review of particle physics, Phys. Rev. D **110**, 030001 (2024),
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.030001>.
- [Nac86] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1986).
- [P⁺16] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Review of Particle Physics, Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016),
<https://doi.org/10.1088/1674-1137/40/10/100001>.
- [Pol73] H. D. Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973),
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.
- [PRS⁺14] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche and W. Rodejohann, *Teilchen und Kerne*, Springer, Berlin, Heidelberg, 9 edn. (2014),
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-37822-5>.
- [YM54] C.-N. Yang and R. L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev. **96**, 191 (1954),
<https://link.aps.org/abstract/PR/v96/i1/p191>.