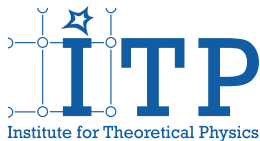


Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 10: Feynman-Regeln der QED

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt



Outline

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

Literatur

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2 Wechselwirkende Theorie

Literatur: [\[LL91, Hat92, Hee02\]](#)

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ **LSZ-Reduktion analog zu Skalarbosonen**
 - ▶ asymptotisch freie **Photonen**: nur transversale Moden
 - ▶ entsprechend zeitgeordnete **Feynman-Photonen-Green-Funktionen**

$$iD_F^{(n)\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) = \langle \Omega | \mathcal{T} \mathbf{A}_H^{\mu_1}(\underline{x}_1) \cdots \mathbf{A}_H^{\mu_n}(\underline{x}_n) | \Omega \rangle$$

- ▶ **Eichinvarianter Lagrangian**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi - A_\mu \underbrace{q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}_{j^\mu} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \bar{\Psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi - A_\mu \underbrace{q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}_{j^\mu} \end{aligned}$$

- ▶ Bewegungsgleichungen nicht eindeutig wegen **Eichinvarianz**

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ arbeite wieder in **Coulomb-Eichung**
 - ▶ Vorteil: **nur physikalische transversale Freiheitsgrade**
 - ▶ Nachteil: nicht manifest kovariant
 - ▶ Ziel: leite trotzdem **kovariante Feynman-Regeln** her
- ▶ Löse **Maxwell-Gleichungen** in **Coulomb-Eichung**

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\mu.$$

- ▶ äquivalent zu Maxwell-Gleichungen (s. Vorl. 8)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} A^0 - \dot{\vec{A}}, & \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\Delta A^0 = j^0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \square \vec{A} + \vec{\nabla} \dot{A}^0 = \vec{j}.\end{aligned}$$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ $\Pi^0 = 0 \Rightarrow A^0$ kein dynamischer Freiheitsgrad
- ▶ in der wechselwirkenden theorie ist aber zwingend $A^0 \neq 0$:

$$A^0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{j^0(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{1}{\Delta} j^0(\underline{x}).$$

- ▶ damit wird auch Gleichung für \vec{A} komptibel mit **Coulomb-Eichbedingung**:

$$\square \vec{A} = \vec{j} - \vec{\nabla} A^0 = \vec{j} + \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \partial_t j^0 = \vec{j} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) := \vec{j}_\perp.$$

- ▶ dabei haben wir benutzt, dass $\partial_\mu j^\mu = \dot{j}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$
(**Noether** für U(1) globale (!) Eichsymmetrie)
- ▶ benötige wieder Lösung mit **Randbedingungen**

$$\vec{A}(\underline{x}) \xrightarrow[t \rightarrow \pm \infty]{} 0$$

\Rightarrow verwende Feynman-Propagator für **freies em. Eichfeld**

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ gleiche Rechnung wie für Skalarfelder (vgl. Übungsblatt 9)

$$i\tilde{D}_F^{\alpha\beta}(\underline{p}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0, \\ \frac{1}{p^2 + i0^+} \left(\delta^{ab} - \frac{p^a p^b}{\vec{p}^2} \right) & \text{für } a, b \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

- ▶ Fazit: **in Coulomb-Eichung**
 - ▶ nur \vec{A} mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ dynamische Felder
 - ▶ nur diese (und die Dirac-Felder) werden „kanonisch quantisiert“
 - ▶ zusätzlich **instantane Coulomb-Wechselwirkung**

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- schreibe **Lagrangian** um:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + j^0 \frac{1}{\Delta} j^0 + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

mit

$$\vec{E} = \underbrace{-\partial_t \vec{A}}_{\vec{E}_\perp} - \underbrace{\vec{\nabla} A^0}_{\vec{E}_\parallel}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- \Rightarrow muss \vec{E}_\parallel auch noch eliminieren \Rightarrow Beitrag zur Wirkung:

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4x \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4x (\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4x \left[\dot{\vec{A}}^2 + 2\dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A^0 + (\vec{\nabla} A^0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4x \left[\dot{\vec{A}}^2 - 2(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) A^0 - A^0 \Delta A^0 \right] = \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4x \left[\vec{E}_\perp^2 + A^0 j^0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4x \left[\vec{E}_\perp^2 - j^0 \frac{1}{\Delta} j^0 \right]. \end{aligned}$$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ endgültiger Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{A}}^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right] + \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi + \frac{1}{2} j^0 \frac{1}{\Delta} j^0 + \vec{j} \cdot \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad j^\mu = q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi.$$

- ▶ Wechselwirkungsbild mit

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mathbf{j}^0 \frac{1}{\Delta} \mathbf{j}^0 - \vec{j} \cdot \vec{A}.$$

- ▶ Photonenpropagator in kovarianter Form mit $\underline{U} = (1, 0, 0, 0)^T \Rightarrow p^0 = \underline{U} \cdot \underline{p}$,
 $\vec{p}^2 = (\underline{U} \cdot \underline{p})^2 - \underline{p}^2$

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(\underline{p}) = \frac{1}{p^2 + i0^+} \left[-\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu + \underline{p}^2 U^\mu U^\nu - (U^\mu p^\nu + p^\mu U^\nu)(\underline{U} \cdot \underline{p})}{(\underline{U} \cdot \underline{p})^2 - \underline{p}^2} \right]$$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ instantaner Coulomb-Propagator

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{(\text{inst})} = \frac{U_\mu U_\nu}{(\underline{U} \cdot \underline{p})^2 - \underline{p}^2}$$

- ▶ in Raum-Zeit-Bereich

$$iD_F^{\mu\nu}(\underline{x}) = -\frac{1}{\square_F} \left[-\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu + \square U^\mu U^\nu - (U^\mu \partial^\nu + \partial^\mu U^\nu)(\underline{U} \cdot \underline{\partial})}{\Delta} \right]$$

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{(\text{inst})}(\underline{p}) = \frac{U_\mu U_\nu}{\vec{p}^2}, \quad D_{\mu\nu}^{(\text{inst})}(\underline{x}) = -\frac{U_\mu U_\nu}{\Delta}$$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ **Propagator für Dirac-Feld** am einfachsten über DGL

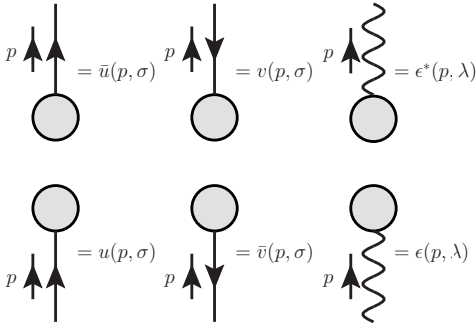
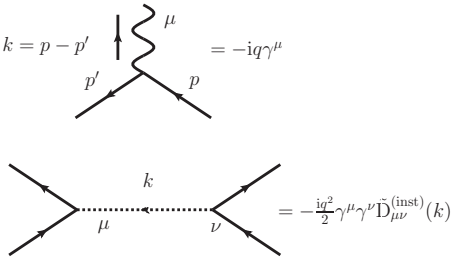
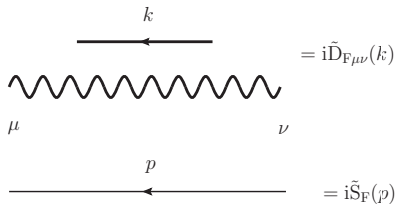
$$(i\not{D} - m)S_F(\underline{x}) = \delta^{(4)}(\underline{x})$$

- ▶ Fourier-Transformation

$$S_F(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{S}_F(\underline{p}) \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{x}) \Rightarrow (\not{p} - m)\tilde{S}_F(\underline{p}) = 1 \Rightarrow$$
$$\tilde{S}_F(\underline{p}) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0^+}.$$

- ▶ im letzten Schritt: $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2$ und Randbedingungen für **zeitgeordneten Propagator**
- ▶ Feynman-Regeln analog wie für Skalarfeld
- ▶ NB: für erzeugendes Funktional mit Fermionen: äußere Quellen **antikommütierende Grassmann-Zahlen** (Details benötigen wir erst später)

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2



Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2


► manifeste Kovarianz

- zu jedem Diagramm, das instantanen Coulomb-Vertex enthält, auch entsprechendes Diagramm mit Coulomb-Propagator
- **Beiträge heben sich weg** \Rightarrow ersetze $\tilde{D}_{F\mu\nu}$ durch

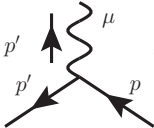
$$\tilde{D}_{F\mu\nu}^{(\text{coul})}(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 + i0^+} \left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{(\underline{p} \cdot \underline{U})(p_\mu U_\nu + p_\nu U_\mu) - p_\mu p_\nu}{(\underline{p} \cdot \underline{U})^2 - \underline{p}^2} \right],$$
$$D_{F\mu\nu}^{(\text{coul})}(\underline{x}) = -\frac{1}{\square_F} \left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{(\underline{\partial} \cdot \underline{U})(\partial_\mu U_\nu + \partial_\nu U_\mu) - \partial_\mu \partial_\nu}{\Delta} \right],$$

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- **neue Feynman-Regeln** (für die äußeren Linien keine Änderung)


$$= iD_{\mu\nu}^{(\text{coul})}(k)$$


$$= iG(p)$$


$$= ie\gamma^\mu$$

- **innere Photonenlinien**: entspricht Wirkung des Propagators auf **erhaltene Ströme**
 \Rightarrow darf alle Terme mit p_μ und/oder p_ν (bzw. ∂_μ und/oder ∂_ν weglassen)

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- ▶ ersetze $D_{F\mu\nu}^{(\text{coul})}$ durch entsprechenden Propagator in der „Feynman-Eichung“

$$\tilde{D}_{F\mu\nu}^{(\text{Feyn})}(\underline{p}) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i0^+}, \quad D_{F\mu\nu}^{(\text{Feyn})}(\underline{p}) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{\square_F},$$

- ▶ für die äußeren Photonenbeinchen sind die Propagatoren ohnehin zu „amputieren“ und durch die oben angegebenen „Modenfunktionen“ zu ersetzen
- ▶ \Rightarrow manifest kovariante Feynman-Regeln für invariante S-Matrixelemente
- ▶ keine instantanen Coulomb-Wechselwirkung in S-matrix-Elementen!

Literatur

- [Hat92] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 10 edn. (1992).
- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>.
- [LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).