Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik
Vorlesung 10: Feynman-Regeln der QED

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

1 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2
Wechselwirkende Theorie

Literatur: [LL91, Hat92, Hee02]

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes 2

- LSZ-Reduktion analog zu Skalarbosonen
  - asymptotisch freie Photonen: nur transversale Moden
  - entsprechend zeitgeordnete Feynman-Photonen-Green-Funktionen

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{(n)\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)=\left\langle\Omega\middle|\mathscr{T}\mathbf{A}_{\mathrm{H}}^{\mu_1}(\underline{x}_1)\cdots\mathbf{A}_{\mathrm{H}}^{\mu_n}(\underline{x}_n)\middle|\Omega\right\rangle$$

  - Eichinvarianter Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{QED}}&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\overline{\Psi}(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\Psi-A_\mu\underbrace{q\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi}_{j^\mu}\\&=\frac{1}{2}(\vec{E}^2-\vec{B}^2)+\overline{\Psi}(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\Psi-A_\mu\underbrace{q\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi}_{j^\mu}\end{aligned}$$

  - Bewegungsgleichungen nicht eindeutig wegen Eichinvarianz
  - arbeite wieder in Coulomb-Eichung
    * Vorteil: nur physikalische transversale Freiheitsgrade
    * Nachteil: nicht manifest kovariant
    * Ziel: leite trotzdem kovariante Feynman-Regeln her
  - Löse Maxwell-Gleichungen in Coulomb-Eichung

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu}=0\Rightarrow\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\mu.$$

  - äquivalent zu Maxwell-Gleichungen (s. Vorl. 8)

$$\begin{aligned}&\vec{E}=-\vec{\Pi}=-\vec{\nabla}A^0-\dot{\vec{A}},\quad\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A},\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0,\\&\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=-\Delta A^0=j^0,\\&\vec{\nabla}\times\vec{B}-\partial_t\vec{E}=\Box\vec{A}+\vec{\nabla}\dot{A}^0=\vec{j}.\end{aligned}$$

  - $\Pi^0=0\Rightarrow A^0$ kein dynamischer Freiheitsgrad
  - in der wechselwirkenden theorie ist aber zwingend $A^0\neq0$:

$$A^0(\underline{x})=\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{x}'\,\frac{j^0(t,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}=-\frac{1}{\Delta}j^0(\underline{x}).$$

– damit wird auch Gleichung für $\vec{A}$ komptibel mit Coulomb-Eichbedingung:

$$\Box\vec{A} = \vec{j} - \vec{\nabla}\dot{A}^0 = \vec{j} + \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\partial_t j^0 = \vec{j} - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) := \vec{j}_\perp.$$

– dabei haben wir benutzt, dass $\partial_\mu j^\mu = \dot{j}^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ (Noether für U(1) globale (!) Eichsymmetrie)

– benötige wieder Lösung mit Randbedingungen

$$\vec{A}(\underline{x}) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} = 0$$

$\Rightarrow$ verwende Feynman-Propagator für freies em. Eichfeld

– gleiche Rechnung wie für Skalarfelder (vgl. Übungsblatt 9)

$$\mathrm{i}\tilde{D}_\mathrm{F}^{\alpha\beta}(\underline{p}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0, \\ \frac{1}{\underline{p}^2 + \mathrm{i}0^+}\left(\delta^{ab} - \frac{p^a p^b}{\vec{p}^2}\right) & \text{für } a, b \in \{1,2,3\} \end{cases}$$

– Fazit: in Coulomb-Eichung
  * nur $\vec{A}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ dynamische Felder
  * nur diese (und die Dirac-Felder) werden „kanonisch quantisiert“
  * zusätzlich instantane Coulomb-Wechselwirkung

– schreibe Lagrangian um:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \overline{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m) + j^0\frac{1}{\Delta}j^0 + \vec{j}\cdot\vec{A}$$

mit

$$\vec{E} = \underbrace{-\partial_t\vec{A}}_{\vec{E}_\perp}\underbrace{-\vec{\nabla}A^0}_{\vec{E}_\parallel}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

- $\Rightarrow$ muss $\vec{E}_{\|}$ auch noch eliminieren $\Rightarrow$ Beitrag zur Wirkung:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}\, \vec{E}^2 = \frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} (\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[\dot{\vec{A}}^2 + 2\dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla} A^0 + (\vec{\nabla} A^0)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[\dot{\vec{A}}^2 - \cancel{2(\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}})} A^0 - A^0 \Delta A^0\right] = \frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[\vec{E}_{\perp}^2 + A^0 j^0\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[\vec{E}_{\perp}^2 - j^0 \frac{1}{\Delta} j^0\right].
\end{aligned}
$$

- endgültiger Lagrangian

$$
\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{A}}^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2\right] + \overline{\Psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi + \frac{1}{2} j^0 \frac{1}{\Delta} j^0 + \vec{j} \cdot \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad j^\mu = q \overline{\Psi} \gamma^\mu \Psi.
$$

- Wechselwirkungsbild mit

$$
\mathscr{H}_{\mathrm{I}} = -\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \mathbf{j}^0 \frac{1}{\Delta} \mathbf{j}^0 - \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{A}}.
$$

- Photonenpropagator in kovarianter Form mit $\underline{U} = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}} \Rightarrow p^0 = \underline{U} \cdot \underline{p}$, $\vec{p}^2 = (\underline{U} \cdot \underline{p})^2 - \underline{p}^2$

$$
\tilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(\underline{p}) = \frac{1}{p^2 + \mathrm{i}0^+}\left[-\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu + \underline{p}^2 U^\mu U^\nu - (U^\mu p^\nu + p^\mu U^\nu)(\underline{U} \cdot \underline{p})}{(\underline{U} \cdot \underline{p})^2 - \underline{p}^2}\right]
$$

- instantaner Coulomb-Propagator

$$
\tilde{\mathrm{D}}_{\mu\nu}^{(\mathrm{inst})} = \frac{U_\mu U_\nu}{(\underline{U} \cdot p)^2 - \underline{p}^2}
$$

- in Raum-Zeit-Bereich

$$
\mathrm{i} D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(\underline{x}) = -\frac{1}{\Box_{\mathrm{F}}}\left[-\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu + \Box U^\mu U^\nu - (U^\mu \partial^\nu + \partial^\mu U^\nu)(\underline{U} \cdot \underline{\partial})}{\Delta}\right]
$$

$$
\tilde{\mathrm{D}}_{\mu\nu}^{(\mathrm{inst})}(\underline{p}) = \frac{U_\mu U_\nu}{\vec{p}^2}, \quad \mathrm{D}_{\mu\nu}^{(\mathrm{inst})}(\underline{x}) = -\frac{U_\mu U_\nu}{\Delta}
$$

  - Propagator für Dirac-Feld am einfachsten über DGL

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m) S_{\mathrm{F}}(\underline{x}) = \delta^{(4)}(\underline{x})$$

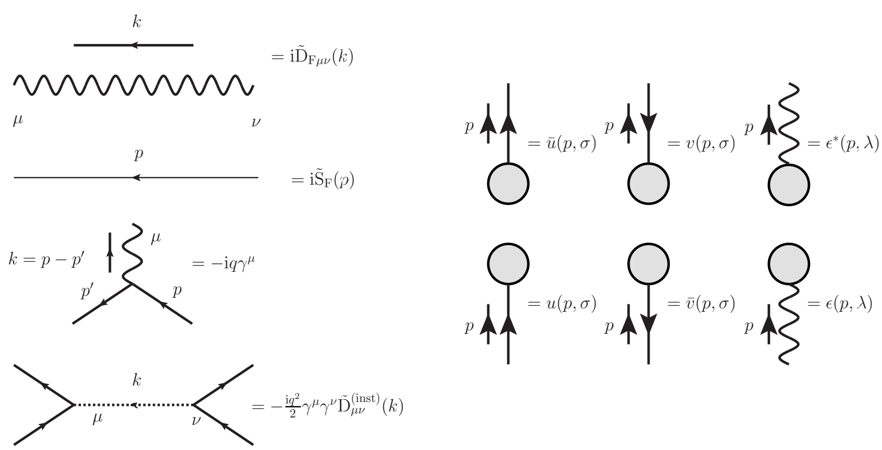
  - Fourier-Transformation

$$S_{\mathrm{F}}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}}{(2\pi)^4} \tilde{S}_{\mathrm{F}}(\underline{p}) \exp(-\mathrm{i}\underline{p} \cdot \underline{x}) \Rightarrow (\not{p} - m)\tilde{S}_{\mathrm{F}}(\underline{p}) = 1 \Rightarrow$$
$$\tilde{S}_{\mathrm{F}}(\underline{p}) = \frac{\not{p} + m}{\underline{p}^2 - m^2 + \mathrm{i}0^+}.$$

  - im letzten Schritt: $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = \underline{p}^2 - m^2$ und Randbedingungen für zeitgeordneten Propagator

- Feynman-Regeln analog wie für Skalarfeld

- NB: für erzeugendes Funktional mit Fermionen: äußere Quellen antikommutierende Grassmann-Zahlen (Details benötigen wir erst später)



- manifeste Kovarianz

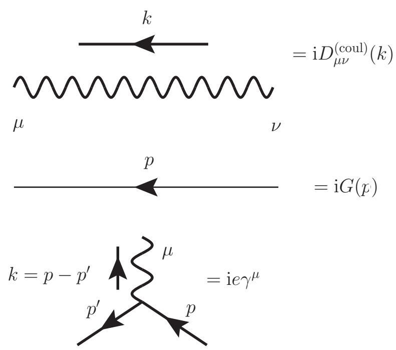
  - zu jedem Diagramm, das instantanen Coulomb-Vertex enthält, auch entsprechendes Diagramm mit Coulomb-Propagator

– Beiträge heben sich weg $\Rightarrow$ ersetze $\tilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}\mu\nu}$ durch

$$\tilde{\mathrm{D}}^{(\mathrm{coul})}_{\mathrm{F}\mu\nu}(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 + \mathrm{i}0^+}\left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{(\underline{p}\cdot\underline{U})(p_\mu U_\nu + p_\nu U_\mu) - p_\mu p_\nu}{(\underline{p}\cdot\underline{U})^2 - \underline{p}^2}\right],$$

$$\mathrm{D}^{(\mathrm{coul})}_{\mathrm{F}\mu\nu}(\underline{x}) = -\frac{1}{\Box_\mathrm{F}}\left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{(\underline{\partial}\cdot\underline{U})(\partial_\mu U_\nu + \partial_\nu U_\mu) - \partial_\mu \partial_\nu}{\Delta}\right],$$

– neue Feynman-Regeln (für die äußeren Linien keine Änderung)



– innere Photonenlinien: entspricht Wirkung des Propgators auf erhaltene Ströme $\Rightarrow$ darf alle Terme mit p_μ und/oder p_ν (bzw. ∂_μ und/oder ∂_ν weglassen)

– ersetze $\mathrm{D}^{(\mathrm{coul})}_{\mathrm{F}\mu\nu}$ durch entsprechenden Propgator in der „Feynman-Eichung“

$$\tilde{D}^{(\mathrm{Feyn})}_{\mathrm{F}\mu\nu}(\underline{p}) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{\underline{p}^2 + \mathrm{i}0^+}, \quad \mathrm{D}^{(\mathrm{Feyn})}_{\mathrm{F}\mu\nu}(\underline{p}) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{\Box_\mathrm{F}},$$

– für die äußeren Photonenbeinchen sind die Propagtoren ohnehin zu „amputieren“ und durch die oben angegebenen „Modenfunktionen“ zu ersetzen

– $\Rightarrow$ manifest kovariante Feynman-Regeln für invariante S-Matrixelemente

– keine instantanen Coulomb-Wechselwirkung in S-matrix-Elementen!

2 Literatur

Literatur

Literatur

[Hat92] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 10 edn. (1992).

[Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), `https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf`.

[LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).