Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik
Vorlesung 9: Streutheorie und Störungsrechnung

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

ITP Institute for Theoretical Physics

HFHF Helmholtz Forschungsakademie Hessen für FAIR

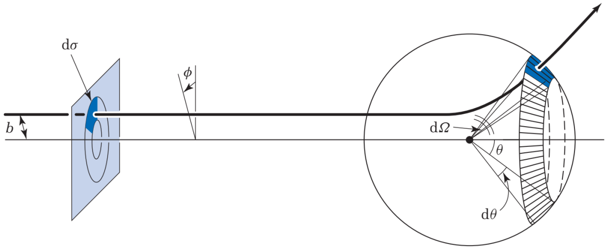
Outline

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

Literatur: [IZ80, Phi25, Hee02]

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

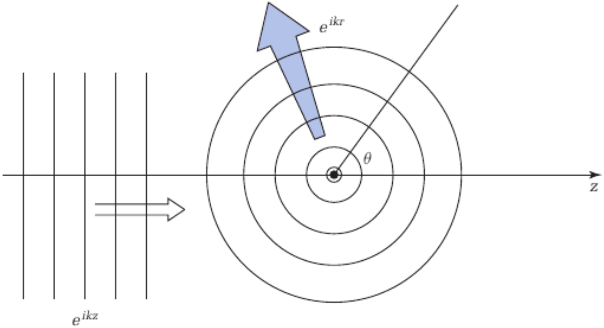
- Streuexperimente Hauptérkenntnisquelle über Teilchen und Wechselwirkungen
- Wirkungsquerschnitt/Streuquerschnitt
- aus historischen Gründen: definiert in „Laborsystem“ eines Fixed-Target-Experiments
- im Teilchenbild



$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\text{Anzahl der Teilchen pro Zeit in Raumwinkel } \mathrm{d}^2\Omega}{\text{Stromdichte der einlaufenden Teilchen}}$$

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

- Quantenfeldtheoretische Beschreibung



- „Präparation": 2 Teilchen mit gut bestimmten Impulsen (evtl. Spins/Polarisation)
- weit voneinander entfernt: „asymptotische frei"
- Messung: registriere Teilchen mit ihren Impulsen und evtl. Spins/Polarisation
- weit weg voneinander: asymptotisch frei

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

  - NB: Teilcheninterpretation im Rahmen der relativistischen QFT: nur für (asymptotisch) freie Zustände
- Problemstellung:
  - Zustand: anfangs ($t_0 \to -\infty$) präpariert als

$$|i\rangle = \mathbf{a}^\dagger_{\sigma_1}(\vec{p}_1)\mathbf{b}^\dagger_{\sigma_2}(\vec{p}_2)|\Omega\rangle$$

  - Erzeuger und Vernichter (asymptotisch freier) Teilchen
  - Schrödinger-Bild der Zeitentwicklung:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[-\mathrm{i}\mathbf{H}_S(t-t_0)]|i\rangle = \mathbf{C}_S(t,t_0)|i\rangle$$

  - Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zu asymptotisch freien Endzustand ($t \to \infty$)

$$\left\langle \vec{p}_1', \sigma_1', \ldots, \vec{p}_n', \sigma_n' \right| = \langle\Omega|\,\mathbf{c}_{\sigma_1'}(\vec{p}_1')\cdots\mathbf{d}_{\sigma_n'}(\vec{p}_n')$$

- Streumatrix(-Element)

$$S_{fi} = \left\langle f \,\middle|\, \mathbf{C}_S(\infty,-\infty) \,\middle|\, i \right\rangle = \left\langle f \,\middle|\, \mathbf{S} \,\middle|\, i \right\rangle$$

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

- S-Operator $\mathbf{S} = \mathbf{C}_{\mathrm{S}}(\infty, -\infty)$: Unitärer Operator
  - bildet asymptotisch freie Anfangszustände $|i, \mathrm{in}\rangle$ in asymptotisch freie Endzustände $\left|f, \mathrm{out}\right\rangle$ ab
  - gewisse Wahrscheinlichkeit, dass gar nichts passiert
    + echte Streuung/Teilchenreaktionen
  - es gilt Energie-Impuls-Erhaltung

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \mathrm{i}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) T_{fi}.$$

  - Problem: Übergangswahrscheinlichkeit: formal a la Born: $|S_{fi}|^2$

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

- für Streuquerschnitt: Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und pro Volumen
- regularisierte δ-Distribution für große aber endliche Zeit von Anfangs- zu Endzustand $(-T/2, T/2)$ und endliches Volumen (wie bei Box-Regularisierung der freien QFT)

$$(2\pi)^4 \delta_{\text{reg}}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) = \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\vec{x} \exp\left(\mathrm{i}\Delta\underline{p} \cdot \underline{x}\right), \quad \Delta\underline{P} = \underline{P}_f - \underline{P}_i, \quad V = (-L/2, L/2)^3$$

- für „echte Streuprozesse“ $|i\rangle \neq \left|f\right\rangle$:

$$\frac{1}{T L^3} \left|S_{fi}^{(\text{reg})}\right|^2 = \left(\frac{2}{T}\right)\left(\frac{2}{L}\right)^3 \left(\frac{\sin(\Delta P_0 T/2)}{\Delta P_0/2}\right)^2 \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{\sin(\Delta P_k L/2)}{\Delta P_k/2}\right)^2 \left|T_{fi}\right|^2$$

$$\xrightarrow[T,L\to\infty]{} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \left|T_{fi}\right|^2.$$

- Lorentz-invarianter Streuquerschnitt
  - Wahrscheinlichkeit (pro Zeit), dass $|i\rangle$ in gegebenen Endzustand $\left|f\right\rangle$ übergeht

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

- Zahl der asymptotisch freien Endzustände von Teilchen k: $\mathrm{d}^3 \vec{p}_k' V/(2\Pi)^3$:

$$\mathrm{d}w = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) \left| T_{fi} \right|^2 V \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_k V}{(2\pi)^3}$$

- sollte Lorentz-invariant sein
- abfaktorisieren der Normierungsfaktoren $1/\sqrt{2E_p V}$ in den Modenfunktionen der asymptotisch freien Felder:

$$\mathrm{d}w = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) \left| \mathscr{M}_{fi} \right|^2 \frac{1}{2E_1 2E_2 V} \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k'}$$

- da freie Teilchen on-shell sind, $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ist $\mathrm{d}^3 p/E_p$ Lorentz-invariant und damit auch $\mathscr{M}_{fi}$
- Streuquerschnitt definiert in Ruhsystem von Teilchen 2 in $|i\rangle$, i.e., $E_2 = m_2$
- Streuquerschnitt: Teilchenzahlstromdichte für Teilchen 1: $\vec{j} = \vec{p}_1/(V E_1) = \vec{v}_1/V$

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

- schreibe $j = |\vec{j}|$ in (halb-)kovarianter Form

$$\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow j = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1 V} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 V} = \frac{\sqrt{E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 m_2 V} = \frac{\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 V} = \frac{I}{E_1 E_2 V}$$

- $\Rightarrow$ invarianter Streuquerschnitt

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}w}{j} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) \frac{1}{4I} \left|\mathscr{M}_{fi}\right|^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_k'}{(2\pi)^3 2E_k'}.$$

- Aufgabe:
  - berechne invariante Matrixelemente $\mathscr{M}_{fi}$ mit QFT

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

Literatur: [IZ80, Phi25, Hee02]

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- Heisenberg-Bild der Zeitentwicklung
  - einfachster Modell-Lagrangian Φ^4-Theorie: reelles Klein-Gordon-Feld

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu - \frac{m^2}{2}\Phi^2) - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4$$

  - Zeitentwicklung im Schrödingerbild

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{S}}(\vec{x}), \quad |\Psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle = \exp[-\mathrm{i}\mathbf{H}(t-t_0)]\,|\Psi_{\mathrm{S}}(t_0)\rangle = \mathbf{U}(t,t_0)|\Psi_{\mathrm{S}}(t_0)\rangle$$

  - Erwartungswerte für lokale Observablen $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(\underline{x}) = \mathbf{O}_{\mathrm{S}}[\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{S}}(\vec{x})]$

$$\langle \mathbf{O}_{\mathrm{S}}\rangle(t) = \langle \Psi_{\mathrm{S}}(t)|\mathbf{O}_{\mathrm{S}}|\Psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle = \left\langle \Psi_{\mathrm{S}}(t_0)\middle|\mathbf{U}^\dagger(t,t_0)\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\mathbf{U}(t,t_0)\middle|\Psi_{\mathrm{S}}(t_0)\right\rangle$$

  - zeitabhängige unitäre Transformation $\Rightarrow$ Heisenberg-Bild

$$|\Psi_{\mathrm{H}}(t)\rangle = \mathbf{U}^\dagger(t,t_0)|\Psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle = |\Psi_{\mathrm{S}}(t_0)\rangle := |\Psi_{\mathrm{H}}(t_0)\rangle,$$
$$\mathbf{O}_{\mathrm{H}} = \mathbf{U}^\dagger(t,t_0)\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\mathbf{U}(t,t_0).$$

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- speziell für Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{H}}(\underline{x}) &= \mathbf{U}^{\dagger}(t, t_0)\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\vec{x})\mathbf{U}(t, t_0) \\ \Rightarrow \partial_t \mathbf{\Phi}_{\mathrm{H}}(\underline{x}) &= \mathbf{U}^{\dagger}(t, t_0)\frac{1}{\mathrm{i}}[\mathbf{\Phi}_{\mathrm{S}}(\vec{x}), \mathbf{H}_{\mathrm{S}}]\,\mathbf{U}(t, t_0) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\mathbf{\Phi}_{\mathrm{H}}(\underline{x}), \mathbf{H}_{\mathrm{S}}\right]. \end{aligned}$$

- entsprechende Zeitentwicklungsgleichungen gelten demnach für alle Operatoren, auch für die kanonischen Feld-Impulse
- Klein-Gordon-Gleichung mit Wechselwirkungsterm
- Problem: man kann keine Formulierung mit Erzeugern und Vernichtern finden wie für freie Felder
- $\Rightarrow$ Teilcheninterpretation für wechselwirkende Felder problematisch
- $\Rightarrow$ keine Normalordnung für Wechselwirkungsterm formulierbar
- divergente Ausdrücke zu erwarten

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- Asymptotenhypothese
  - Annahme:
$$\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \sqrt{Z}\boldsymbol{\Phi}_{\text{in}}(\underline{x}), \quad \boldsymbol{\Phi}(\underline{x}) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \sqrt{Z}\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}(\underline{x}),$$
  - $\boldsymbol{\Phi}_{\text{in}}$ und $\boldsymbol{\Phi}_{\text{out}}$: freie Feldoperatoren
  - Normierungsfaktor $\sqrt{Z}$: wechselwirkende Feldoperatoren, die auf Einteilchenzustände wirken, führen i.a. auf Mehrteilchenzustände
  - Asymptotenformeln gelten im schwachen Sinne, also nur für die Matrixelemente der Operatoren
  - kann nicht als Operatoridentität („starker Limes“) gelten, weil sonst wegen gleichzeitigen kanonischen Kommutatorregeln $Z = 1$ folgen würde
  - dann wäre die Theorie aber nicht wechselwirkend

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- LSZ-Reduktionsformel
  - benannt nach Harry Lehmann, Kurt Symanzik und Wolfhart Zimmermann [LSZ55]
  - drückt die S-Matrix-Elemente durch Korrelationsfunktionen von Feldoperatoren bzgl. des Vakuumzustands aus

$$S_{fi} = \left\langle \vec{p}_1', \ldots \vec{p}_n'; \text{out} \,\middle|\, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \text{in} \right\rangle$$

  - nehme für das Folgende an: kein $\vec{p}_k'$ stimmt mit $\vec{p}_1$ oder $\vec{p}_2$ über $\Rightarrow$ nur „echte Streuprozesse“
  - Modenfunktionen freier KG-Felder

$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \exp(-\mathrm{i}\underline{p} \cdot \underline{x})\Big|_{p^0 = E_p}$$

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- 1. Reduktionsschritt
  (s. Vorl. 6 bzgl. Extraktion der Erzeuger/Vernichter aus $\mathbf{\Phi}(\underline{x})$)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \left\langle \vec{p}_1', \ldots, \vec{p}_n'; \text{out} \middle| \mathbf{a}_{\text{in}}(\vec{p}_1)^\dagger \middle| \vec{p}_2, \text{in} \right\rangle \\ &= -\mathrm{i} Z^{-1/2} \lim_{t \to -\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}\, u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) \overleftrightarrow{\partial_{t_1}} \left\langle \vec{p}_1', \ldots, \vec{p}_n'; \text{out} \middle| \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \middle| \vec{p}_2; \text{in} \right\rangle. \end{aligned}$$

- für beliebige Funktion $f(t)$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) - \lim_{t \to -\infty} f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}_t f(t)$$

- damit

$$S_{fi} = \mathrm{i} Z^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1 \partial_{t_1} \left[u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) \overleftrightarrow{\partial_{t_1}} \left\langle \vec{p}_1', \ldots, \vec{p}_n'; \text{out} \middle| \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \middle| \vec{p}_2; \text{in} \right\rangle \right].$$

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- Beitrag von oberer Grenze $t \to \infty$ verschwindet, denn

$$-\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x} \lim_{t\to\infty} u_{\vec{p}_1}(\underline{x})\overleftrightarrow{\partial}_{t_1}\left\langle \vec{p}_1',\ldots,\vec{p}_n';\mathrm{out}\middle|\mathbf{\Phi}(\underline{x}_1)\middle|\vec{p}_2;\mathrm{in}\right\rangle \xrightarrow[t\to\infty]{} \sqrt{Z}\left\langle \vec{p}_1',\ldots,\vec{p}_n';\mathrm{out}\middle|\mathbf{a}^{\dagger}_{\mathrm{out}}(\vec{p}_1)\middle|\vec{p}_2;\mathrm{in}\right\rangle$$

- lasse out-Erzeuger als out-Vernichter auf linken Vektor wirken
  $\Rightarrow$ da $\vec{p}_k' \neq \vec{p}_1$ verschwindet dieses Matrixelement
- Zeitableitungen auf $u_{\vec{p}_1}$:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1\, u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1)(E_1^2+\partial_{t_1}^2)\left\langle \vec{p}_1',\ldots,\vec{p}_n';\mathrm{out}\middle|\mathbf{\Phi}(\underline{x}_1)\middle|\vec{p}_2;\mathrm{in}\right\rangle \\
&= \mathrm{i}Z^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1\, u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1)(m^2+\vec{p}_1^2+\partial_{t_1}^2)\left\langle \vec{p}_1',\ldots,\vec{p}_n';\mathrm{out}\middle|\mathbf{\Phi}(\underline{x}_1)\middle|\vec{p}_2;\mathrm{in}\right\rangle
\end{aligned}$$

- mit $\vec{p}_1^2 u_{\vec{p}_1} = -\Delta u_{\vec{p}_1}$ und partieller Integration (keine Randterme, da wir $\mathbf{\Phi}$ im räumlich Unendlichen als verschwindend annehmen dürfen (wir müssen ohnehin Wellenpakete betrachten!)

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- 1. Reduktionsschritt erreicht:

$$S_{fi} = \mathrm{i} Z^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1 \, u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1)(\Box_1 + m^2) \left\langle \vec{p}_1', \ldots, \vec{p}_n'; \text{out} \middle| \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \middle| \vec{p}_2; \text{in} \right\rangle$$

- 2. Reduktionschritt: analoge Rechnung für

$$\left\langle \vec{p}_1', \ldots, \vec{p}_n'; \text{out} \middle| \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \middle| \vec{p}_2; \text{in} \right\rangle = \left\langle \vec{p}_2', \ldots, \vec{p}_n'; \text{out} \middle| \mathbf{a}_{\text{out}}(\vec{p}_1') \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \middle| \vec{p}_2; \text{in} \right\rangle$$

- damit beim Einführen der 2. Zeitableitung und Integration über t der Beitrag mit dem in-Vernichter (für $t \to -\infty$) auf in-Vektor wirkt $\Rightarrow$ Zeitordnung muss beachtet werden

$$\begin{aligned} S_{fi} = & (\mathrm{i} Z^{1/2})^2 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1' \, u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) u^*_{\vec{p}_1'}(\underline{x}_1') \\ & (\Box_1 + m^2)(\Box_{1'} + m^2) \left\langle \vec{p}_2', \ldots, \vec{p}_n', \text{out} \middle| \mathcal{T} \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1') \middle| \vec{p}_2; \text{in} \right\rangle \end{aligned}$$

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- Zeitordnungsoperator: $\mathscr{T}\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_1)\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_2)\cdots\boldsymbol{\phi}(\underline{x}_n)$: Operatoren in der Reihenfolge, dass Zeiten von rechts nach links zunehmen
- Wiederhole Prozedur für die übrigen in- und out-Zustände $\Rightarrow$ LSZ-Reduktionsformel

$$S_{fi} = (\mathrm{i}Z^{-1/2})^{n+2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_1 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_2 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}x_1' \cdots \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x_n'$$

$$\prod_{a=1}^{n} \varphi^*_{\vec{p}_a'}(\underline{x}_a') \prod_{b=1}^{2} \varphi_{\vec{p}_b}(\underline{x}_b) \prod_{c=1}^{n} (\Box_{c'} + m^2) \prod_{d=1}^{2} (\Box_d + m^2) \times$$

$$\underbrace{\left\langle \Omega \middle| \mathscr{T}\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_1') \ldots \boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_n') \boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_1) \ldots \boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_2) \middle| \Omega \right\rangle}_{\mathrm{i}G^{(n+2)}(\underline{x}_1',\ldots,\underline{x}_k',\underline{x}_1,\ldots\underline{y}_l)}.$$

- exakte zeitgeordnete n-Punkt-Green-Funktion

$$\mathrm{i}G_n(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = \left\langle \Omega \middle| \mathscr{T}\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_1)\cdots\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}_n) \middle| \Omega \right\rangle.$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

Literatur: [IZ80, Phi25, Hee02]

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Dirac-Bild der Zeitentwicklung
  - LSZ-Reduktionstheorem: berechne Erwartungswerte zeitgeordneter Heisenberg-Bild-Feldoperatorprodukte
  - in geschlossener Form nur für freie Felder möglich
  - daher zeitabhängie Störungstheorie
  - Wahl eines beliebigen „Bildes“ der Zeitentwicklung
  - weitgehend willkürliche Wahl der Verteilung der Zeitentwicklung auf Zustände und Observablen-Operatoren
  - Physikalische Größen, insbes. S-Matrixelemente unabhängig vom Bild
  - beginne wieder mit dem Schrödinger-Bild
  - nehme an, dass Hamilton-Operator $\mathbf{H}$ und Observablen-Operatoren nicht explizit zeitabhängig sind
  - für unsere QFTn: Observablen-Operatoren sind Funktionale der Feld-Operatoren, und der Lagrangian ist nicht explizit von t abhängig (und damit wegen der Poincaré-Invarianz nicht von $\underline{x}$)

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Noether: **H** erhalten (totaler Hamiltonian, einschließlich Wechselwirkungen!)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(t) = \mathbf{O}_{\mathrm{S}}(t_0), \quad |\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = \mathbf{C}_{\mathrm{S}}(t,t_0)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}},\\
&\mathrm{i}\partial_t \mathbf{C}_{\mathrm{S}}(t,t_0) = \mathbf{H}_{\mathrm{S}}\mathbf{C}_{\mathrm{S}}(t,t_0), \quad \mathbf{C}_{\mathrm{S}}(t_0,t_0) = \mathbb{1}\\
\Rightarrow &\mathbf{C}_{\mathrm{S}}(t,t_0) = \exp[-\mathrm{i}\mathbf{H}_{\mathrm{S}}(t-t_0)]
\end{aligned}
$$

- physikalische Größen invariant unter zeitabhängigen unitären Transformationen
- Resultierende Zeitabhängigkeit: „Dirac-Bild“

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t) = \mathbf{B}(t,t_0)\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(t)\mathbf{B}^{\dagger}(t,t_0), \quad |\Psi(t)\rangle_{\mathrm{D}} = \mathbf{B}(t,t_0)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}},\\
&\mathbf{B}^{\dagger}(t,t_0) = \mathbf{B}^{-1}(t,t_0), \quad \mathbf{B}(t_0,t_0) = \mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Bewegungsgleichung für Zustände und Operatoren

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\partial_t \,|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{D}} &= \mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B})|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} + \mathbf{B}\,\mathbf{H}_{\mathrm{S}}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\
&= \mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^{\dagger}\,|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{D}} + \mathbf{B}\,\mathbf{H}_{\mathrm{S}}\,\mathbf{B}^{\dagger}\,\mathbf{B}\,|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\
&= \Bigg[\underbrace{(\mathrm{i}\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{H}_{\mathrm{D}}}_{\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t)}\Bigg]\,|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{D}}
\end{aligned}
$$

- Operator in Klammer $\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}$ selbstadjungiert:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{H}_{\mathrm{D}}^{\dagger} = \mathbf{H}_{\mathrm{D}}, \quad \text{weil } \mathbf{H}_{\mathrm{S}} \text{ selbstadjungiert ist,} \\
&\left[\mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^{\dagger}\right]^{\dagger} = -\mathrm{i}\,\mathbf{B}\,\partial_t \mathbf{B}^{\dagger}
\end{aligned}
$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- wegen $\mathbf{B}\,\mathbf{B}^\dagger = \mathbb{1}$

$$(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B}\,\partial_t \mathbf{B}^\dagger = 0 \Rightarrow \mathbf{B}\,\partial_t \mathbf{B}^\dagger = -(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^\dagger$$

$\Rightarrow$

$$\left[\mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^\dagger\right]^\dagger = +\mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^\dagger$$

- Bewegungsgleichung für Zustand mit $\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t) = \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}^\dagger(t)$

$$\mathrm{i}\partial_t \left|\Psi(t)\right\rangle_{\mathrm{D}} = \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t)\left|\Psi(t)\right\rangle_{\mathrm{D}}.$$

- formale Lösung: unitärer Zeitentwicklungoperator $\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0)$:

$$\left|\Psi(t)\right\rangle_{\mathrm{D}} = \mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0)\left|\Psi(t_0)\right\rangle_{\mathrm{D}} \Rightarrow \partial_t \mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0) = -\mathrm{i}\,\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t)\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0).$$

- mit $\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t_0,t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t)\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0).$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Störungsrechnung: iteriere diese Gleichung

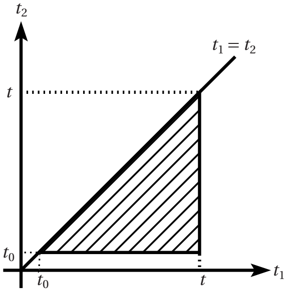
$$\mathbf{C}^{(0)}(t,t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbf{C}^{(j+1)}(t,t_0) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t\, \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t) \mathbf{C}^{(j)}(t,t_0).$$

- Beitrag 2. Ordnung

$$\mathbf{C}^{(1)}(t,t_0) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2\, \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_2), \quad \mathbf{C}^{(2)}(t,t_0) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 (-\mathrm{i}) \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_1) \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_2).$$

- bei Umkehrung der Integrationsreihenfolge: $[\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}\, t_1), \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}\, t_2)] \neq 0$!

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme



$$\mathbf{C}^{(2)}(t,t_0) = -\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 (-\mathrm{i}) \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t_1\, \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_1)\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_2) = -\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 (-\mathrm{i}) \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t_2\, \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_2)\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_1).$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- in beiden Versionen des Integrals: $\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}\, t)$-Operatoren zeitgeordnet, d.h.

$$2\,\mathbf{C}^{(2)}(t,t_0)=(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1(-\mathrm{i})\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\mathscr{T}\,\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_1)\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_2)$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{C}^{(2)}(t,t_0)=\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\mathscr{T}\,\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_1)\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_2)$$

- durch weitere Iteration (vollständige Induktion):

$$\mathbf{C}^{(j)}(t,t_0)=\frac{(-\mathrm{i})^j}{j!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\cdots\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_j\mathscr{T}\,\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_1)\cdots\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t_j).$$

- formal Exponentialreihe:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{C}^{(j)}(t,t_0)=\mathscr{T}\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}\,t')\right].$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Zeitentwicklung der Observablen
  - Zeitableitung der Observablen-Operatoren

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t) = \mathbf{B}\,\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(t)\mathbf{B}^{\dagger} \Rightarrow \partial_t\,\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t) &= (\partial_t\,\mathbf{B})\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(t)\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{B}\,\mathbf{O}_{\mathrm{S}}(t)\partial_t\,\mathbf{B}^{\dagger}\\ &= (\partial_t\,\mathbf{B})\mathbf{B}^{\dagger}\,\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t)\mathbf{B}(t)\partial_t\,\mathbf{B}^{\dagger}\\ &= -\mathrm{i}\,[\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t), \mathbf{X}_{\mathrm{D}}(t)]\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{X}_{\mathrm{D}}(t) = \mathbf{H}_{\mathrm{D}}(t) - \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}(t) = \mathbf{X}_{\mathrm{D}}^{\dagger}(t).$$

  - unitärer Zeitentwicklungsoperator für Observablen

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{D}}(t,t_0)\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t_0)\mathbf{A}_{\mathrm{D}}^{\dagger}(t,t_0)\\ \Rightarrow \partial_t\,\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t) &= (\partial_t\mathbf{A}_{\mathrm{D}})\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t_0)\mathbf{A}_{\mathrm{D}}^{\dagger} + \mathbf{A}_{\mathrm{D}}\,\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t_0)\partial_t\mathbf{A}^{\dagger}\\ &= (\partial_t\mathbf{A})\mathbf{A}^{\dagger}\,\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t) + \mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t)\mathbf{A}\partial_t\mathbf{A}^{\dagger}\\ &= -\left[\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t), (\partial_t\mathbf{A})\mathbf{A}^{\dagger}\right]\\ &\stackrel{!}{=} -\mathrm{i}\,[\mathbf{O}_{\mathrm{D}}(t), \mathbf{X}_{\mathrm{D}}(t)]\end{aligned}$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- $\Rightarrow$ Bewegungsgleichung für $\mathbf{A}_{\mathrm{D}}$

$$(\partial_t \mathbf{A}_{\mathrm{D}})\mathbf{A}_{\mathrm{D}}^\dagger = \mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathrm{D}}$$
$$\Rightarrow \partial_t \mathbf{A}_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}\mathbf{X}_{\mathrm{D}}\mathbf{A}_{\mathrm{D}}.$$

- Lösung analog wie für $\mathbf{C}_{\mathrm{D}}$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{D}}(t,t_0) = \mathcal{T}\exp\left[+\mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \mathbf{X}_{\mathrm{D}}(t')\right].$$

- Fazit: Zeitentwicklung in beliebigem Bild
  - muss nicht erst im Schrödinger-Bild rechnen
  - definiere einfach selbstadjungierte Operatoren $\mathbf{X}_{\mathrm{D}}$ und $\mathbf{Y}_{\mathrm{D}}$, so dass

$$\mathbf{H}_{\mathrm{D}} = \mathbf{X}_{\mathrm{D}} + \mathbf{Y}_{\mathrm{D}}$$

  - dann Zeitentwicklung für Observablen und Zustände aus den oben hergeleiteten Gleichungen für unitäre Zeitentwicklungsoperatoren $\mathbf{C}_{\mathrm{D}}(t,t_0)$ und $\mathbf{A}_{\mathrm{D}}(t,t_0)$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Umrechnung zwischen zwei Dirac-Bildern
  - seien zwei Dirac-Bilder durch $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$ und $(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$ definiert
  - Umrechnung zwischen Observablen und Zuständen

$$|\Psi(t)\rangle_1 = \mathbf{C}_1 |\Psi(t_0)\rangle_1 = \mathbf{C}_1 |\Psi(t_0)\rangle_2 = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^\dagger |\Psi(t)\rangle_2 \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^\dagger$$

$$\mathbf{O}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{O}_1(t_0) \mathbf{A}_1^\dagger = \mathbf{A}_1 \mathbf{O}_2(t_0) \mathbf{A}_1^\dagger = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{O}_2(t) \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \Rightarrow \mathbf{B}' = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^\dagger$$

  - zu zeigen **B=B'**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' \Leftrightarrow \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^\dagger = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^\dagger \Leftrightarrow \mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{C}_2.$$

  - es gilt

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{U}_1 &= (\partial_t \mathbf{A}_1^\dagger)\mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_1^\dagger \partial_t \mathbf{C}_1 = -\mathrm{i}\mathbf{A}_1^\dagger(\mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1)\mathbf{C}_1 \\ &= -\mathrm{i}\mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{H}_1 \mathbf{C}_1 = -\mathrm{i}\mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{H}_1 \underbrace{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^\dagger}_{\mathbb{1}} \mathbf{C}_1 - \mathrm{i} = \mathbf{H}_1(t_0)\mathbf{U}_1 = -\mathrm{i}\mathbf{H}_2(t_0)\mathbf{U}_1.\end{aligned}$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- gleiche Rechnung für Bild 2 ergibt

$$\partial_t \mathbf{U}_2 = \mathbf{H}_2(t_0)\mathbf{U}_2$$

- wegen $\mathbf{U}_1(t_0, t_0) = \mathbf{U}_2(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ ergibt die Integration dieser DGLn

$$\mathbf{U}_1 = \exp[-\mathrm{i}\mathbf{H}_1(t_0)(t - t_0)] = \exp[-\mathrm{i}\mathbf{H}_2(t_0)(t - t_0)] = \mathbf{U}_2.$$

- im Folgenden: $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$
- garantiert gleiche Wahrscheinlichkeiten für Messungen...

$${}_1\langle o, t \,|\, \Psi(t)\rangle_1 = {}_1\left\langle o, t_0 \middle| \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 \middle| \Psi(t_0)\right\rangle_1 = {}_2\left\langle o, t_0 \middle| \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{C}_2 \middle| \Psi(t_0)\right\rangle_2 = {}_2\langle o, t \,|\, \Psi(t)\rangle_2 .$$

- ...und Erwartungswerte von Observablen

$$\begin{aligned}\langle O(t)\rangle &= {}_1\langle \Psi(t) | \mathbf{O}_1(t) | \Psi(t)\rangle_1 = {}_1\left\langle \Psi(t_0) \middle| \mathbf{C}_1^\dagger \mathbf{A}_1 \mathbf{O}_1(t_0) \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 \middle| \Psi(t_0)\right\rangle_1 \\ &= {}_2\left\langle \Psi(t_0) \middle| \mathbf{U}^\dagger \mathbf{O}_2(t_0) \mathbf{U} \middle| \Psi(t_0)\right\rangle_2 \\ &= {}_2\langle \Psi(t) | \mathbf{O}_2(t) | \Psi(t)\rangle_2\end{aligned}$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- bildunabhängige „Zeitableitung“

$$\mathring{\mathbf{O}}_j(t) = \frac{1}{\mathrm{i}}[\mathbf{O}_j, \mathbf{H}_j], \quad j \in \{1,2,\}$$

- $\mathring{\mathbf{O}}_j(t)$ repräsentiert bildunabhängig die Zeitableitung der Observablen $O(t)$
- Ehrenfest-Theorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle O(t)\rangle = \left\langle \mathring{\mathbf{O}}_j(t)\right\rangle.$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Wechselwirkungsbild
  - im Folgenden Operatoren, Zustände etc. im Wechselwirkungsbild ohne Index
  - setze $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} = \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} = \mathbf{H}_\mathrm{I}$
  - als einfachstes Beispiel: Φ^4-Theorie mit $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^\dagger$:

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2} :(\partial_\mu \boldsymbol{\Phi})(\partial^\mu \boldsymbol{\Phi}): - \frac{m^2}{2} :\boldsymbol{\Phi}^2:, \quad \mathscr{L}_\mathrm{I} = -\mathscr{H}_\mathrm{I} = -\frac{\lambda}{4!} :\boldsymbol{\Phi}:^4$$

  - Feldoperatoren und damit Observablen: freie Felder
  - falls Lagrangian (und damit Hamiltonian) nicht explizit von $\underline{x}$ abhängig:

$$\mathbf{H}_0 = \text{const} \Rightarrow \mathbf{A} = \exp[\mathrm{i}\mathbf{H}_0(t - t_0)].$$

  - als einfachstes Beispiel: Φ^4-Theorie mit $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^\dagger$:

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2} :(\partial_\mu \boldsymbol{\Phi})(\partial^\mu \boldsymbol{\Phi}): - \frac{m^2}{2} :\boldsymbol{\Phi}^2:, \quad \mathscr{L}_\mathrm{I} = -\frac{\lambda}{4!} :\boldsymbol{\Phi}^4:$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Lösungen aus vorigen Vorlesungen bekannt

$$\mathbf{\Phi}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x} \left[\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) u_{\vec{p}}^*(\underline{x})\right].$$

Beziehung zum Heisenberg-Bild

- $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_\mathrm{H} = \mathbf{H}_\mathrm{H}$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_\mathrm{H} = 0$
- Bildtransformation

$$|\Psi(t)\rangle_\mathrm{H} = |\Psi(t_0)\rangle_\mathrm{H} = |\Psi(t_0)\rangle = \mathbf{C}^\dagger |\Psi(t)\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}^\dagger \Rightarrow \mathbf{O}_\mathrm{H}(t) = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{O}(t) \mathbf{C}.$$

- im Folgenden $t_0 \to -\infty$ und adiabatisches Ein- und Ausschalten der WW:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(t, -\infty) = \mathcal{T} \exp\left[-\mathrm{i} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{H}_\mathrm{I}(t') \exp(-\epsilon |t|)\right], \quad \epsilon \to 0^+$$

- T so groß gewählt, dass $-T \ll t_1, \ldots, t_n \ll T$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- außerdem sei $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$. Dann

$$\left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{H}}(\underline{x}_1) \cdot \boldsymbol{\phi}(\underline{x}_n) \middle| \Omega \right\rangle = \langle \Omega | \, \mathbf{C}^\dagger(t_1) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \mathbf{C}(t_1) \mathbf{C}(t_2)^\dagger \\ \mathbf{\Phi}(\underline{x}_2) \mathbf{C}(t_2) \cdots \mathbf{C}^\dagger(t_n) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_n) \mathbf{C}(t_n) |\Omega\rangle$$

- Zeitentwicklungsoperator erfüllt offenbar für $t_1 > t_2$

$$\mathbf{C}(t_1) = \mathbf{C}(t_1, -\infty) = \mathbf{C}(t_1, t_2) \mathbf{C}(t_2, -\infty) = \mathbf{C}(t_1, t_2) \mathbf{C}(t_2)$$

$$\Rightarrow \; \mathbf{C}(t_1) \mathbf{C}^\dagger(t_2) = \mathbf{C}(t_1, t_2)$$

$\Rightarrow$

$$\left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{H}}(\underline{x}_1) \cdot \boldsymbol{\phi}(\underline{x}_n) \middle| \Omega \right\rangle = \langle \Omega | \, \mathbf{C}^\dagger(t_1) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \mathbf{C}(t_1, t_2) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_2) \mathbf{C}(t_2, t_3) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_3) \\ \cdots \mathbf{C}(t_{n-1}, t_n) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_n) \mathbf{C}(t_n) |\Omega\rangle$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- weiter ist

$$\mathbf{C}(\infty) = \mathbf{C}(\infty, t_1)\mathbf{C}(t_1) \Rightarrow \mathbf{C}(t_1) = \mathbf{C}^\dagger(\infty, t_1)\mathbf{C}(\infty)$$
$$\Rightarrow \mathbf{C}^\dagger(t_1) = \mathbf{C}^\dagger(\infty)\mathbf{C}(\infty, t_1)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}G(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) &= \left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \mathbf{\Phi}_{\mathrm{H}}(\underline{x}_1) \cdots \boldsymbol{\phi}(\underline{x}_n) \middle| \Omega \right\rangle \\ &= \frac{1}{\langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle} \left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \cdots \mathbf{\Phi}(\underline{x}_n) \exp\left[-\mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \, \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(t')\right] \middle| \Omega \right\rangle \end{aligned}$$

- denn

$$\mathbf{C}(\infty)|\Omega\rangle = \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle \, |\Omega\rangle \,,$$

da das Vakuum stabil unter der Zeitentwicklung ist, also der obige Ausdruck das Vakuum bis auf einen i.a. unbestimmten Phasenfaktor ist

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Störungstheorie: entwickele Exponentialfunktion (s.o.)
  - $\Rightarrow$ Beitrag k-ter Ordnung zur n-Punkt-Green-Funktion:

$$\mathrm{i}G_n^{(k)}(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)\langle\Omega|\mathbf{C}(\infty)|\Omega\rangle = \Bigg\langle \Omega \Bigg| \mathscr{T}\mathbf{\Phi}(\underline{x}_1)\cdots\mathbf{\Phi}(\underline{x}_n)$$

$$\frac{(-\mathrm{i}\lambda/4!)^k}{k!}\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{d}^4\underline{y}_1\cdots\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{d}^4\underline{y}_k :\mathbf{\Phi}^4(\underline{y}_1):\cdots:\mathbf{\Phi}^4(\underline{y}_n): \Bigg|\Omega\Bigg\rangle.$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Erzeugendes Funktional
  - mit äußerer Quelle $J(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$$Z_0[J] = \left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \exp\left[\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{y}\, J(\underline{y}) \mathbf{\Phi}(\underline{y})\right] \middle| \Omega \right\rangle$$

folgt (unter Verzicht auf Normalordnung!) mit

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{y} \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{y})^4}\right) Z_0[J]$$

$$\mathrm{i} G_n^{(k)}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle = \left. \frac{1}{\mathrm{i}^n} \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_n)} Z[J] \right|_{J=0}$$

Berechnung von $Z_0[J]$

- Z_0 ergibt sich aus obigem Formalismus für

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi + J\Phi$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Wechselwirkungsbild mit
$$\mathbf{H}_{\mathrm{I}} = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, J(\underline{x})\mathbf{\Phi}(\underline{x}).$$
- berechne also
$$\mathbf{C}(t_1,t_2) = \mathscr{T} \exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(t)\right].$$
- zerlege (t_1,t_2) in $N \gg 1$ Teilintervalle mit $\Delta t = (t_2-t_1)/N$ und $\tau_k = t_1 + (2k-1)\Delta t/2$ $(k \in \{1,\ldots,N\}$:
$$\mathbf{C}(t_1,t_2) = \lim_{N\to\infty} \exp[-\mathrm{i}\Delta t\, \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau_N)] \exp[-\mathrm{i}\Delta t\, \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau_{N-1})] \cdots \exp[-\mathrm{i}\Delta t\, \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau_1)]$$
- da $[\mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau), \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau')] \propto \mathbb{1}$ kann man die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel
$$\exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} = \exp\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\right],$$
$$\text{falls } [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0$$
verwenden.

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Beweis in nächster Übung! $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(t_1,t_2) &= \lim_{N\to\infty} \exp\left[-\mathrm{i}\Delta t \sum_{k=1}^{N} \mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau_k) - \frac{1}{2}\Delta t^2 \sum_{1\leq k<l\leq N} [\mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau_k),\mathbf{H}_{\mathrm{I}}(\tau_l)]\right] \\
&= \exp\left[\mathrm{i}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}\, J(\underline{x})\mathbf{\Phi}(\underline{x})\right] \\
&\qquad \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}_1 \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}_2 \Theta(t_1-t_2) J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) \left[\mathbf{\Phi}(\underline{x}_1),\mathbf{\Phi}(\underline{x}_2)\right]\right].
\end{aligned} \tag{1}$$

- benötige davon Erwartungswert bzgl. $|\Omega\rangle$
- 1. Faktor kann noch nicht berechnet werden
  (2. Faktor ist $\propto \mathbb{1}$ und wird in nächster Übung berechnet!)

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- kann 1. Faktor in Normalordnung bringen
- dazu nochmal BCH-Formel mit Zerlegung der Modenentwicklung nach Beiträgen mit Vernichtern und Erzeugern (positive/negative Frequenz-Moden)

$$\boldsymbol{\Phi}^{(+)}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\,\mathbf{a}(\vec{p})\,u_{\vec{p}}(\underline{x}), \quad \boldsymbol{\Phi}^{(-)}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\,\mathbf{a}^{\dagger}(\vec{p})\,u^*_{\vec{p}}(\underline{x}) = \boldsymbol{\Phi}^{(+)\dagger}(\underline{x}),$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^{(+)} + \boldsymbol{\Phi}^{(-)}.$$

- da auch hier $\left[\boldsymbol{\Phi}^{(+)}(\underline{x}_1), \boldsymbol{\Phi}^{(-)}(\underline{x}_2)\right] \propto \mathbb{1}$, folgt mit BCH-Formel

$$\exp\left[\mathrm{i}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4\underline{x}\,J(\underline{x})\boldsymbol{\Phi}(\underline{x})\right] = \exp\left[\mathrm{i}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4\underline{x}\,J(\underline{x})\boldsymbol{\Phi}^{(-)}(\underline{x})\right]\exp\left[\mathrm{i}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4\underline{x}\,J(\underline{x})\boldsymbol{\Phi}^{(+)}(\underline{x})\right]$$
$$\exp\left[+\frac{1}{2}\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4\underline{x}_1 \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4\underline{x}_2\,J(\underline{x}_1)J(\underline{x}_2)\left[\boldsymbol{\Phi}^{(-)}(\underline{x}_1), \boldsymbol{\Phi}^{(+)}(\underline{x}_2)\right]\right].$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- da Kommutator $\propto \mathbb{1}$ ist, können wir schreiben

$$\left[\mathbf{\Phi}^{(-)}(\underline{x}_1), \mathbf{\Phi}^{(+)}(\underline{x}_2)\right] = \left\langle \Omega \middle| \left[\mathbf{\Phi}^{(-)}(\underline{x}_1), \mathbf{\Phi}^{(+)}(\underline{x}_2)\right] \middle| \Omega \right\rangle$$
$$= -\left\langle \Omega \middle| \mathbf{\Phi}^{(+)}(\underline{x}_2) \mathbf{\Phi}^{(-)}(\underline{x}_1) \middle| \Omega \right\rangle.$$

- gilt auch für 2. Faktor in (1) $\Rightarrow$

$$\mathbf{C}(t_1, t_2) = \exp\left[\mathrm{i} \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}\, J(\underline{x}) \mathbf{\Phi}^{(-)}(\underline{x})\right] \exp\left[\mathrm{i} \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}\, J(\underline{x}) \mathbf{\Phi}^{(+)}(\underline{x})\right]$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}_1 \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x}_2\, J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) \left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \mathbf{\Phi}(\underline{x}_1) \mathbf{\Phi}(\underline{x}_2) \middle| \Omega \right\rangle\right]$$

- mit $t_1 \to -\infty$ und $t_2 \to \infty$ folgt schließlich

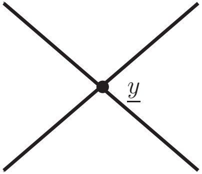
$$Z_0[J] = \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty, -\infty) | \Omega \rangle = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{x}_1 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{x}_2\, \mathrm{D}_{\mathrm{F}}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2)\right]$$

- Feynman-Propagator

$$\mathrm{i}\mathrm{D}_{\mathrm{F}}(\underline{x}) = \left\langle \Omega \middle| \mathscr{T} \mathbf{\Phi}(\underline{x}) \mathbf{\Phi}(0) \middle| \Omega \right\rangle.$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Feynman-Regeln



$$= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4\underline{y}\,\frac{\delta^4}{(\mathrm{i}J(\underline{y}))^4}$$

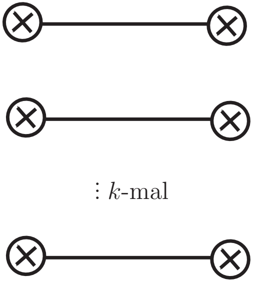
$$= \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

$$= \mathrm{i}J(\underline{x})$$

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

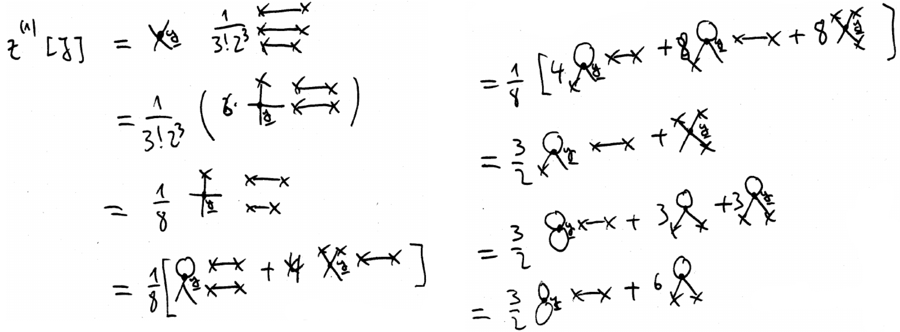
- Beitrag zu $Z_0[J]$ in k-ter Ordnung

$$Z_0^{(k)}[j] = \frac{1}{k!2^k}$$



Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

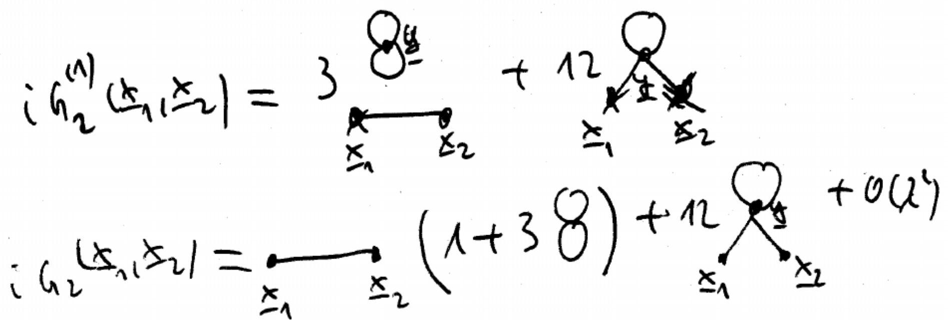
- Korrektur zu G_2 in führender Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$
  - $\mathcal{O}(\lambda)$: 1 Vertex $\hat{=}$ vier Ableitungen nach J für $Z^{(1)}[J]$
  - G_2: 2 weitere Ableitungen nach $J \Rightarrow$ brauche Beitrag mit 6 J's:



  - Wick-Theorem: alle Beiträge zu zeitgeordneten Green-Funktionen durch Zweipunkt-Korrelationsfunktionen („Kontraktionen von zwei Feldoperatoren“) darstellbar [Wic50]

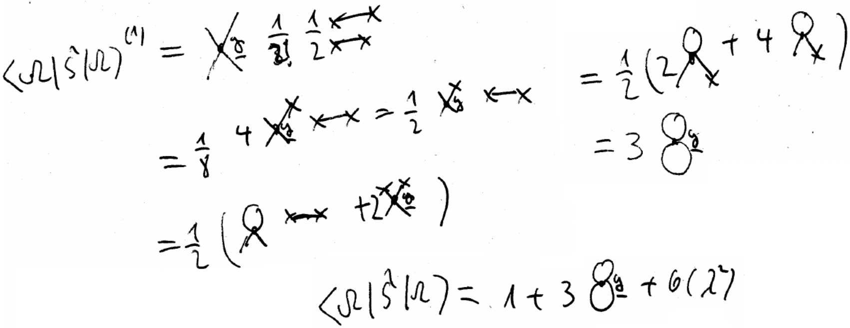
Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Korrektur zu G_2 in führender Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$
  - G_2: 2 weitere Ableitungen nach J:



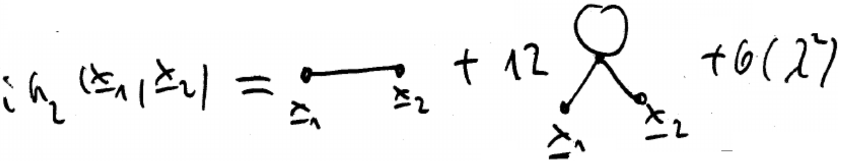
Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Korrektur zu G_2 in führender Ordnung $\mathscr{O}(\lambda)$
  - Beitrag zu $\langle \Omega | \mathbf{S} | \Omega \rangle$



Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- endgültiges Resultat für G_2



$$\mathrm{i}G_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \mathrm{i}\mathrm{D}_\mathrm{F}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) - \frac{\lambda}{2} \underbrace{\mathrm{D}_\mathrm{F}(0)}_{\text{divergent!}} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{y}\, \mathrm{D}_\mathrm{F}(\underline{x}_1 - \underline{y}) \mathrm{D}_\mathrm{F}(\underline{y} - \underline{x}_2).$$

- divergentes „Tadpole-Diagramm“
- rührt von zwei Feldoperatoren am gleichen Raum-Zeit-Punkt her $\Rightarrow$ kommt aus $\mathbf{H}_\mathrm{I}$ $\Rightarrow$ verschwindet mit Normalordnung
- alternativ Renormierung: Tadpole $\hat{=}$ Korrektur zu m^2 $\Rightarrow$ wird abgezogen, weil wir m als physikalische Masse definieren
- alle Diagramme mit Schleifen i.a. divergent $\Rightarrow$ Renormierung ohnehin notwendig
- ϕ^4-Theorie renormierbar $\Leftrightarrow$ alle Divergenzen können durch Renormierung der Feldnormierungskonstanten, Masse und Kopplungskonstante beseitigt werden

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Feynman-Regeln im Impulsraum
  - definiere für alle Größen Fourier-Transformierte via

$$\boldsymbol{\Phi}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}}{(2\pi)^4} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\underline{p}) \exp(-\mathrm{i}\underline{p}\cdot\underline{x}).$$

  - Propagator (vgl. Übungsblatt 9)

$$\mathrm{D}_{\mathrm{F}}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}}{(2\pi)^4} \tilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}}(\underline{p}) \exp(-\mathrm{i}\underline{p}\cdot\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}} = \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 + \mathrm{i}0^+}$$

  - dann (Beweise zur Übung):

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{x}_1 \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{x}_2 J(x_1) \mathrm{D}_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) J(\underline{x}_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}_1}{(2\pi)^4} \cdots \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) \delta^{(4)}(\underline{p}_2 - \underline{p}_3) \tilde{J}(\underline{p}_1) \tilde{J}(\underline{p}_2) \tilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}}(\underline{p}_3)
\end{aligned}$$

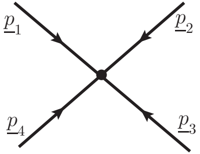
und

$$\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{x}\, \boldsymbol{\Phi}^4(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}_1}{(2\pi)^4} \cdots \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\mathrm{d}^4 \underline{p}_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3 + \underline{p}_4) \prod_{k=1}^{4} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\underline{p}_k).$$

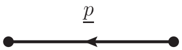
- lasse bei Berechnung von Matrixelementen $\mathscr{M}_{fi}$ die δ-Funktionen (und die oben beschriebenen $1/\sqrt{[(2\pi)^3 2E_p}$-Faktoren aus Modenfunktionen weg

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Diagramm-Regeln für $\mathrm{i}G^{(n)}(\underline{p}_1,\ldots,\underline{p})$



$$= -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4!}$$



$$= \mathrm{i}\tilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{F}}(\underline{p}) = \frac{\mathrm{i}}{\underline{p}^2 - m^2 + \mathrm{i}0^+}$$

- zeichne alle Diagramme mit n äußeren Beinchen, die äußere Punkte verbinden
- jeder Diagrammteil muss wenigstens ein äußeres Beinchen enthalten (keine Vakuumdiagramme)
- für Ordnung λ^k: k Vertizes
- verbinde die äußeren Punkte und Vertexpunkte
- zähle dabei die Möglichkeiten (für kombinatorische Faktoren)

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- an jedem Vertex gilt Viererimpulserhaltung (impliziert Viererimpulserhaltung des gesamten Diagramms)
- über unabhängige Impulse in Schleifen ist mit $\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 \underline{p}/(2\pi)^4$ zu integrieren

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Diagramme für verbundene $\mathscr{M}_{fi}$
- zeichne die Diagramme für die entsprechenden zusammenhängenden n-Punktfunktionen
- lasse die äußeren Beinchen weg (gemäß LSZ-Reduktionsformel)
- in unserer Konvention ist der Faktor aus der Modenfunktion einfach durch 1 zu ersetzen
- äußere Viererimpulse sind on-shell mit $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$
- für $\mathrm{d}\sigma \Rightarrow$ Dreierimpulsintegrale: $\mathrm{d}^3\vec{p}/[(2\pi)^3 2E_p]$

Literatur

[Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), `https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf`.

[IZ80] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York (1980).

[LSZ55] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, Nuovo Cim. **1**, 205 (1955), `https://doi.org/10.1007/BF02731765`.

[Phi25] O. Philipsen, *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik*, Springer Spektrum, Berlin, 2 edn. (2025), `https://doi.org/10.1007/978-3-662-70849-1`.

[Wic50] G. C. Wick, The evaluation of the collision matrix, Phys. Rev. **80**, 268 (1950), `https://doi.org/10.1103/PhysRev.80.268`.