

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 9: Streutheorie und Störungsrechnung

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

1 Streutheorie: Wirkungsquerschnitt	1
2 Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus	5
3 Störungsrechnung und Feynman-Diagramme	9
4 Literatur	22

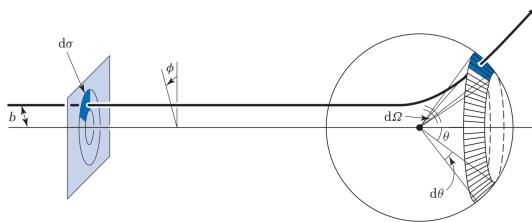
1 Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

Literatur: [IZ80, Phi25, Hee02]

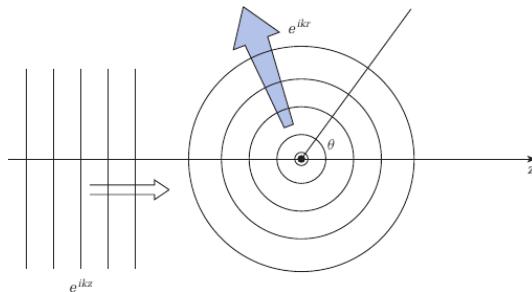
Streutheorie: Wirkungsquerschnitt

- **Streuexperimente** Haupterkenntnisquelle über Teilchen und Wechselwirkungen
- **Wirkungsquerschnitt/Streuquerschnitt**
- aus historischen Gründen: definiert in „**Laborsystem**“ eines Fixed-Target-Experiments
- im **Teilchenbild**



$$d\sigma = \frac{\text{Anzahl der Teilchen pro Zeit in Raumwinkel } d^2\Omega}{\text{Stromdichte der einlaufenden Teilchen}}$$

- Quantenfeldtheoretische Beschreibung



- „**Präparation**“: 2 Teilchen mit gut bestimmten Impulsen (evtl. Spins/Polarisation)
- weit voneinander entfernt: „**asymptotisch frei**“
- **Messung**: registriere Teilchen mit ihren **Impulsen** und evtl. Spins/Polarisation
- weit weg voneinander: **asymptotisch frei**
- NB: Teilcheninterpretation im Rahmen der relativistischen QFT: **nur für (asymptotisch) freie Zustände**

- Problemstellung:

- Zustand: anfangs ($t_0 \rightarrow -\infty$) präpariert als

$$|i\rangle = \mathbf{a}_{\sigma_1}^\dagger(\vec{p}_1) \mathbf{b}_{\sigma_2}^\dagger(\vec{p}_2) |\Omega\rangle$$

- Erzeuger und Vernichter (asymptotisch freier) Teilchen
- Schrödinger-Bild der Zeitentwicklung:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[-i\mathbf{H}_S(t-t_0)] |i\rangle = \mathbf{C}_S(t, t_0) |i\rangle$$

- Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zu asymptotisch freien Endzustand ($t \rightarrow \infty$)

$$\langle \vec{p}'_1, \sigma'_1, \dots, \vec{p}'_n, \sigma'_n | = \langle \Omega | \mathbf{c}_{\sigma'_1}(\vec{p}'_1) \cdots \mathbf{d}_{\sigma'_n}(\vec{p}'_n)$$

- Streumatrix(-Element)

$$S_{fi} = \langle f | \mathbf{C}_S(\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f | \mathbf{S} | i \rangle$$

- S-Operator $\mathbf{S} = \mathbf{C}_S(\infty, -\infty)$: Unitärer Operator

- bildet asymptotisch freie Anfangszustände $|i, \text{in}\rangle$ in asymptotisch freie Endzustände $|f, \text{out}\rangle$ ab
- gewisse Wahrscheinlichkeit, dass gar nichts passiert + echte Streuung/Teilchenreaktionen
- es gilt Energie-Impuls-Erhaltung

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) T_{fi}.$$

- Problem: Übergangswahrscheinlichkeit: formal a la Born: $|S_{fi}|^2$

- für Streuquerschnitt: Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und pro Volumen
- regularisierte δ -Distribution für große aber endliche Zeit von Anfangs- zu Endzustand ($-T/2, T/2$) und endliches Volumen (wie bei Box-Regularisierung der freien QFT)

$$(2\pi)^4 \delta_{\text{reg}}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3 \vec{x} \exp(i \Delta \underline{p} \cdot \underline{x}), \quad \Delta \underline{p} = \underline{P}_f - \underline{P}_i, \quad V = (-L/2, L/2)^3$$

- für „echte Streuprozesse“ $|i\rangle \neq |f\rangle$:

$$\frac{1}{TL^3} |S_{fi}^{(\text{reg})}|^2 = \left(\frac{2}{T}\right) \left(\frac{2}{L}\right)^3 \left(\frac{\sin(\Delta P_0 T/2)}{\Delta P_0/2}\right)^2 \prod_{k=1}^3 \left(\frac{\sin(\Delta P_k L/2)}{\Delta P_k/2}\right)^2 |T_{fi}|^2$$

$$\xrightarrow[T,L \rightarrow \infty]{} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2.$$

- **Lorentz-invarianter Streuquerschnitt**

- Wahrscheinlichkeit (pro Zeit), dass $|i\rangle$ in gegebenen Endzustand $|f\rangle$ übergeht
- Zahl der asymptotisch freien Endzustände von Teilchen k : $d^3 \vec{p}'_k V / (2\pi)^3$:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) |T_{fi}|^2 V \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_k V}{(2\pi)^3}$$

- sollte **Lorentz-invariant sein**
- abfaktorisiert der Normierungsfaktoren $1/\sqrt{2E_p V}$ in den Modenfunktionen der asymptotisch freien Felder:

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{2E_1 2E_2 V} \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_k}{(2\pi)^3 2E'_k}$$

- da freie Teilchen **on-shell** sind, $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ist $d^3 p/E_p$ Lorentz-invariant und damit auch \mathcal{M}_{fi}
- **Streuquerschnitt** definiert in **Ruhssystem von Teilchen 2 in $|i\rangle$** , i.e., $E_2 = m_2$
- **Streuquerschnitt**: Teilchenzahlstromdichte für Teilchen 1: $\vec{j} = \vec{p}_1/(V E_1) = \vec{v}_1/V$
- schreibe $j = |\vec{j}|$ in (halb-)kovarianter Form

$$\underline{p}_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow j = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1 V} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}{E_1 V} = \frac{\sqrt{E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 m_2 V} = \frac{\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 V} = \frac{I}{E_1 E_2 V}$$

- \Rightarrow **invarianter Streuquerschnitt**

$$d\sigma = \frac{dw}{j} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_f - \underline{P}_i) \frac{1}{4I} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}'_k}{(2\pi)^3 2E'_k}.$$

- **Aufgabe:**

- berechne **invariante Matrixelemente \mathcal{M}_{fi}** mit QFT

2 Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

Literatur: [\[IZ80\]](#), [\[Phi25\]](#), [\[Hee02\]](#)

Wechselwirkende Felder und LSZ-Formalismus

- Heisenberg-Bild der Zeitentwicklung
 - einfacher Modell-Lagrangian Φ^4 -Theorie: reelles Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu - \frac{m^2}{2}\Phi^2) - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4$$
 - Zeitentwicklung im Schrödingerbild

$$\Phi_S = \Phi_S(\vec{x}), \quad |\Psi_S(t)\rangle = \exp[-i\mathbf{H}(t-t_0)]|\Psi_S(t_0)\rangle = \mathbf{U}(t, t_0)|\Psi_S(t_0)\rangle$$
 - Erwartungswerte für lokale Observablen $\mathbf{O}_S(\underline{x}) = \mathbf{O}_S[\Phi_S(\vec{x})]$

$$\langle \mathbf{O}_S \rangle(t) = \langle \Psi_S(t) | \mathbf{O}_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_S(t_0) | \mathbf{U}^\dagger(t, t_0) \mathbf{O}_S \mathbf{U}(t, t_0) | \Psi_S(t_0) \rangle$$
 - zeitabhängige unitäre Transformation \Rightarrow Heisenberg-Bild

$$|\Psi_H(t)\rangle = \mathbf{U}^\dagger(t, t_0)|\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle := |\Psi_H(t_0)\rangle,$$

$$\mathbf{O}_H = \mathbf{U}^\dagger(t, t_0)\mathbf{O}_S\mathbf{U}(t, t_0).$$
 - speziell für Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} \Phi_H(\underline{x}) &= \mathbf{U}^\dagger(t, t_0)\Phi_S(\vec{x})\mathbf{U}(t, t_0) \\ \Rightarrow \partial_t \Phi_H(\underline{x}) &= \mathbf{U}^\dagger(t, t_0)\frac{1}{i}[\Phi_S(\vec{x}), \mathbf{H}_S]\mathbf{U}(t, t_0) \\ &= \frac{1}{i}[\Phi_H(\underline{x}), \mathbf{H}_S]. \end{aligned}$$
 - entsprechende Zeitentwicklungsgleichungen gelten demnach für alle Operatoren, auch für die kanonischen Feld-Impulse
 - Klein-Gordon-Gleichung mit Wechselwirkungsterm
 - Problem: man kann keine Formulierung mit Erzeugern und Vernichtern finden wie für freie Felder
 - \Rightarrow Teilcheninterpretation für wechselwirkende Felder problematisch
 - \Rightarrow keine Normalordnung für Wechselwirkungsterm formulierbar
 - divergente Ausdrücke zu erwarten
- Asymptotenhypothese

- Annahme:

$$\Phi(\underline{x}) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \sqrt{Z} \Phi_{\text{in}}(\underline{x}), \quad \Phi(\underline{x}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \sqrt{Z} \Phi_{\text{out}}(\underline{x}),$$

- Φ_{in} und Φ_{out} : **freie Feldoperatoren**
- Normierungsfaktor \sqrt{Z} : **wechselwirkende Feldoperatoren**, die auf Einteilchenzustände wirken, führen i.a. auf Mehrteilchenzustände
- Asymptotenformeln gelten **im schwachen Sinne**, also nur für die **Matrixelemente der Operatoren**
- kann nicht als Operatoridentität („starker Limes“) gelten, weil sonst wegen gleichzeitigen kanonischen Kommutatorregeln $Z = 1$ folgen würde
- dann wäre die Theorie aber **nicht wechselwirkend**

- **LSZ-Reduktionsformel**

- benannt nach Harry Lehmann, Kurt Symanzik und Wolfhart Zimmermann [LSZ55]
- drückt die S-Matrix-Elemente durch **Korrelationsfunktionen** von Feldoperatoren bzgl. des Vakuumzustands aus

$$S_{fi} = \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \vec{p}_1, \vec{p}_2, \text{in} \rangle$$

- nehme für das Folgende an: kein \vec{p}'_k stimmt mit \vec{p}_1 oder \vec{p}_2 überein \Rightarrow **nur „echte Streuprozesse“**
- **Modenfunktionen** freier KG-Felder

$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{x}) \Big|_{p^0 = E_p}$$

- 1. Reduktionsschritt (s. Vorl. 6 bzgl. Extraktion der Erzeuger/Vernichter aus $\Phi(\underline{x})$)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \mathbf{a}_{\text{in}}(\vec{p}_1)^\dagger | \vec{p}_2, \text{in} \rangle \\ &= -iZ^{-1/2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle. \end{aligned}$$

- für beliebige Funktion $f(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \int_{\mathbb{R}} dt d_t f(t)$$

- damit

$$S_{fi} = iZ^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 \partial_{t_1} \left[u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle \right].$$

- Beitrag von oberer Grenze $t \rightarrow \infty$ verschwindet, denn

$$-i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \lim_{t \rightarrow \infty} u_{\vec{p}_1}(\underline{x}) \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \sqrt{Z} \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \mathbf{a}_{\text{out}}^\dagger(\vec{p}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle$$

- lasse out-Erzeuger als out-Vernichter auf linken Vektor wirken \Rightarrow
da $\vec{p}'_k \neq \vec{p}_1$ verschwindet dieses Matrixelement
- Zeitableitungen auf $u_{\vec{p}_1}$:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= iZ^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) (E_1^2 + \partial_{t_1}^2) \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle \\ &= iZ^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) (m^2 + \vec{p}_1^2 + \partial_{t_1}^2) \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

- mit $\vec{p}_1^2 u_{\vec{p}_1} = -\Delta u_{\vec{p}_1}$ und partieller Integration (keine Randterme, da wir Φ im räumlich Unendlichen als verschwindend annehmen dürfen (wir müssen ohnehin Wellenpakete betrachten!))
- **1. Reduktionsschritt erreicht:**

$$S_{fi} = iZ^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) (\square_1 + m^2) \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle$$

- **2. Reduktionsschritt:** analoge Rechnung für

$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle = \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \mathbf{a}_{\text{out}}(\vec{p}_1') \Phi(\underline{x}_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle$$

- damit beim Einführen der 2. Zeitableitung und Integration über t der Beitrag mit dem in-Vernichter (für $t \rightarrow -\infty$) **auf in-Vektor** wirkt
 \Rightarrow **Zeitordnung muss beachtet werden**

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (iZ^{1/2})^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x'_1 u_{\vec{p}_1}(\underline{x}_1) u_{\vec{p}_1'}^*(\underline{x}'_1) \\ &\quad (\square_1 + m^2)(\square_{1'} + m^2) \langle \vec{p}'_2, \dots, \vec{p}'_n; \text{out} | \mathcal{T} \Phi(\underline{x}_1) \Phi(\underline{x}'_1) | \vec{p}_2; \text{in} \rangle \end{aligned}$$

- **Zeitordnungsoperator:** $\mathcal{T}\Phi(\underline{x}_1)\Phi(\underline{x}_2)\cdots\phi(\underline{x}_n)$: Operatoren in der Reihenfolge, dass Zeiten von rechts nach links zunehmen
- Wiederhole Prozedur für die übrigen in- und out-Zustände \Rightarrow **LSZ-Reduktionsformel**

$$S_f i = (iZ^{-1/2})^{n+2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4x_2 \int_{\mathbb{R}^4} dx'_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^4} d^4x'_n$$

$$\prod_{a=1}^n \varphi_{\vec{p}'_a}^*(\underline{x}'_a) \prod_{b=1}^2 \varphi_{\vec{p}_b}(\underline{x}_b) \prod_{c=1}^n (\square_{c'} + m^2) \prod_{d=1}^2 (\square_d + m^2) \times$$

$$\underbrace{\langle \Omega | \mathcal{T}\Phi(\underline{x}'_1)\dots\Phi(\underline{x}'_n)\Phi(\underline{x}_1)\dots\Phi(\underline{x}_2) | \Omega \rangle}_{iG^{(n+2)}(\underline{x}'_1, \dots, \underline{x}'_k, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_l)}$$

- exakte zeitgeordnete n -Punkt-Green-Funktion

$$iG_n(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \langle \Omega | \mathcal{T}\Phi(\underline{x}_1)\dots\Phi(\underline{x}_n) | \Omega \rangle.$$

3 Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

Literatur: [IZ80, Phi25, Hee02]

Störungsrechnung und Feynman-Diagramme

- Dirac-Bild der Zeitentwicklung

- LSZ-Reduktionstheorem: berechne Erwartungswerte zeitgeordneter Heisenberg-Bild-Feldoperatorprodukte
- in geschlossener Form nur für freie Felder möglich
- daher zeitabhängige Störungstheorie
- Wahl eines beliebigen „Bildes“ der Zeitentwicklung
- weitgehend willkürliche Wahl der Verteilung der Zeitentwicklung auf Zustände und Observablen-Operatoren
- Physikalische Größen, insbes. S-Matrixelemente unabhängig vom Bild
- beginne wieder mit dem Schrödinger-Bild
- nehme an, dass Hamilton-Operator \mathbf{H} und Observablen-Operatoren nicht explizit zeitabhängig sind
- für unsere QFTs: Observablen-Operatoren sind Funktionale der Feld-Operatoren, und der Lagrangian ist nicht explizit von t abhängig (und damit wegen der Poincaré-Invarianz nicht von x)
- Noether: \mathbf{H} erhalten (totaler Hamiltonian, einschließlich Wechselwirkungen!)

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_S(t) &= \mathbf{O}_S(t_0), \quad |\Psi(t)\rangle_S = \mathbf{C}_S(t, t_0)|\Psi(t)\rangle_S, \\ i\partial_t \mathbf{C}_S(t, t_0) &= \mathbf{H}_S \mathbf{C}_S(t, t_0), \quad \mathbf{C}_S(t_0, t_0) = \mathbb{1} \\ \Rightarrow \mathbf{C}_S(t, t_0) &= \exp[-i\mathbf{H}_S(t - t_0)]\end{aligned}$$

- physikalische Größen invariant unter zeitabhängigen unitären Transformationen
- Resultierende Zeitabhängigkeit: „Dirac-Bild“

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_D(t) &= \mathbf{B}(t, t_0)\mathbf{O}_S(t)\mathbf{B}^\dagger(t, t_0), \quad |\Psi(t)\rangle_D = \mathbf{B}(t, t_0)|\Psi(t)\rangle_S, \\ \mathbf{B}^\dagger(t, t_0) &= \mathbf{B}^{-1}(t, t_0), \quad \mathbf{B}(t_0, t_0) = \mathbb{1}.\end{aligned}$$

- Bewegungsgleichung für Zustände und Operatoren

$$\begin{aligned}i\partial_t |\Psi(t)\rangle_D &= i(\partial_t \mathbf{B})|\Psi(t)\rangle_S + \mathbf{B} \mathbf{H}_S |\Psi(t)\rangle_S \\ &= i(\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^\dagger |\Psi(t)\rangle_D + \mathbf{B} \mathbf{H}_S \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} |\Psi(t)\rangle_S \\ &= \underbrace{[(i\partial_t \mathbf{B})\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{H}_D]}_{Y_D(t)} |\Psi(t)\rangle_D\end{aligned}$$

- Operator in Klammer \mathbf{Y}_D selbstadjungiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_D^\dagger &= \mathbf{H}_D, \quad \text{weil } \mathbf{H}_S \text{ selbstadjungiert ist,} \\ [\mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{B}^\dagger]^\dagger &= -\mathrm{i} \mathbf{B} \partial_t \mathbf{B}^\dagger\end{aligned}$$

- wegen $\mathbf{B} \mathbf{B}^\dagger = \mathbb{1}$

$$(\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B} \partial_t \mathbf{B}^\dagger = 0 \Rightarrow \mathbf{B} \partial_t \mathbf{B}^\dagger = -(\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{B}^\dagger$$

\Rightarrow

$$[\mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{B}^\dagger]^\dagger = +\mathrm{i}(\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{B}^\dagger$$

- Bewegungsgleichung für Zustand mit $\mathbf{Y}_D(t) = \mathbf{Y}_D^\dagger(t)$

$$\mathrm{i} \partial_t |\Psi(t)\rangle_D = \mathbf{Y}_D(t) |\Psi(t)\rangle_D.$$

- formale Lösung: unitärer Zeitentwicklungsoperator $\mathbf{C}_D(t, t_0)$:

$$|\Psi(t)\rangle_D = \mathbf{C}_D(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_D \Rightarrow \partial_t \mathbf{C}_D(t, t_0) = -\mathrm{i} \mathbf{Y}_D(t) \mathbf{C}_D(t, t_0).$$

- mit $\mathbf{C}_D(t_0, t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow$

$$\mathbf{C}_D(t, t_0) = \mathbb{1} - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \mathbf{Y}_D(t) \mathbf{C}_D(t, t_0).$$

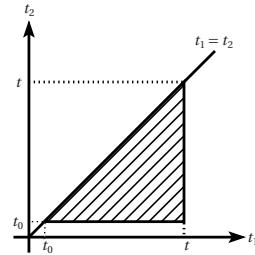
- Störungsrechnung: iteriere diese Gleichung

$$\mathbf{C}^{(0)}(t, t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbf{C}^{(j+1)}(t, t_0) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t \mathbf{Y}_D(t) \mathbf{C}^{(j)}(t, t_0).$$

- Beitrag 2. Ordnung

$$\mathbf{C}^{(1)}(t, t_0) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_2 \mathbf{Y}_D(t_2), \quad \mathbf{C}^{(2)}(t, t_0) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 (-\mathrm{i}) \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \mathbf{Y}_D(t_1) \mathbf{Y}_D(t_2).$$

- bei Umkehrung der Integrationsreihenfolge: $[\mathbf{Y}_D(t_1), \mathbf{Y}_D(t_2)] \neq 0!$



$$\mathbf{C}^{(2)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t dt_2 (-i) \int_{t_2}^t dt_1 \mathbf{Y}_D(t_1) \mathbf{Y}_D(t_2) = -i \int_{t_0}^t dt_1 (-i) \int_{t_1}^t dt_2 \mathbf{Y}_D(t_2) \mathbf{Y}_D(t_1).$$

- in beiden Versionen des Integrals: $\mathbf{Y}_D(t)$ -Operatoren **zeitgeordnet**, d.h.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{C}^{(2)}(t, t_0) &= (-i) \int_{t_0}^t dt_1 (-i) \int_{t_0}^t dt_2 \mathcal{T} \mathbf{Y}_D(t_1) \mathbf{Y}_D(t_2) \\ \Rightarrow \mathbf{C}^{(2)}(t, t_0) &= \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \mathcal{T} \mathbf{Y}_D(t_1) \mathbf{Y}_D(t_2) \end{aligned}$$

- durch weitere Iteration (vollständige Induktion):

$$\mathbf{C}^{(j)}(t, t_0) = \frac{(-i)^j}{j!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_j \mathcal{T} \mathbf{Y}_D(t_1) \cdots \mathbf{Y}_D(t_j).$$

- formal **Exponentialreihe**:

$$\mathbf{C}_D(t, t_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}^{(j)}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{Y}_D(t') \right].$$

- **Zeitentwicklung der Observablen**

- Zeitableitung der Observablen-Operatoren

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_D(t) &= \mathbf{B} \mathbf{O}_S(t) \mathbf{B}^\dagger \Rightarrow \partial_t \mathbf{O}_D(t) = (\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{O}_S(t) \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B} \mathbf{O}_S(t) \partial_t \mathbf{B}^\dagger \\ &= (\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{B}^\dagger \mathbf{O}_D(t) \mathbf{B}(t) \partial_t \mathbf{B}^\dagger \\ &= -i [\mathbf{O}_D(t), \mathbf{X}_D(t)] \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{X}_D(t) = \mathbf{H}_D(t) - \mathbf{Y}_D(t) = \mathbf{X}_D^\dagger(t).$$

- **unitärer Zeitentwicklungsoperator für Observablen**

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_D(t) &= \mathbf{A}_D(t, t_0) \mathbf{O}_D(t_0) \mathbf{A}_D^\dagger(t, t_0) \\ \Rightarrow \partial_t \mathbf{O}_D(t) &= (\partial_t \mathbf{A}_D) \mathbf{O}_D(t_0) \mathbf{A}_D^\dagger + \mathbf{A}_D \mathbf{O}_D(t_0) \partial_t \mathbf{A}^\dagger \\ &= (\partial_t \mathbf{A}) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{O}_D(t) + \mathbf{O}_D(t) \mathbf{A} \partial_t \mathbf{A}^\dagger \\ &= -[\mathbf{O}_D(t), (\partial_t \mathbf{A}) \mathbf{A}^\dagger] \\ &\stackrel{!}{=} -i [\mathbf{O}_D(t), \mathbf{X}_D(t)] \end{aligned}$$

- \Rightarrow Bewegungsgleichung für \mathbf{A}_D

$$(\partial_t \mathbf{A}_D) \mathbf{A}_D^\dagger = i \mathbf{X}_D$$

$$\Rightarrow \partial_t \mathbf{A}_D = i \mathbf{X}_D \mathbf{A}_D.$$

- Lösung analog wie für \mathbf{C}_D

$$\mathbf{A}_D(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[+i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{X}_D(t') \right].$$

- Fazit: Zeitentwicklung in beliebigem Bild

- muss nicht erst im Schrödinger-Bild rechnen
- definiere einfach selbstadjungierte Operatoren \mathbf{X}_D und \mathbf{Y}_D , so dass

$$\mathbf{H}_D = \mathbf{X}_D + \mathbf{Y}_D$$

- dann Zeitentwicklung für Observablen und Zustände aus den oben hergeleiteten Gleichungen für unitäre Zeitentwicklungsoperatoren $\mathbf{C}_D(t, t_0)$ und $\mathbf{A}_D(t, t_0)$

- Umrechnung zwischen zwei Dirac-Bildern

- seien zwei Dirac-Bilder durch $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$ und $(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$ definiert
- Umrechnung zwischen Observablen und Zuständen

$$|\Psi(t)\rangle_1 = \mathbf{C}_1 |\Psi(t_0)\rangle_1 = \mathbf{C}_1 |\Psi(t_0)\rangle_2 = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^\dagger |\Psi(t)\rangle_2 \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^\dagger$$

$$\mathbf{O}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{O}_1(t_0) \mathbf{A}_1^\dagger = \mathbf{A}_1 \mathbf{O}_2(t_0) \mathbf{A}_1^\dagger = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{O}_2(t) \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^\dagger \Rightarrow \mathbf{B}' = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^\dagger$$

- zu zeigen $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' \Leftrightarrow \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2^\dagger = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^\dagger \Leftrightarrow \mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{C}_2.$$

- es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U}_1 &= (\partial_t \mathbf{A}_1^\dagger) \mathbf{C}_1 + \mathbf{A}_1^\dagger \partial_t \mathbf{C}_1 = -i \mathbf{A}_1^\dagger (\mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1) \mathbf{C}_1 \\ &= -i \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{H}_1 \mathbf{C}_1 = -i \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{H}_1 \underbrace{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^\dagger}_{\mathbb{I}} \mathbf{C}_1 - i = \mathbf{H}_1(t_0) \mathbf{U}_1 = -i \mathbf{H}_2(t_0) \mathbf{U}_1. \end{aligned}$$

- gleiche Rechnung für Bild 2 ergibt

$$\partial_t \mathbf{U}_2 = \mathbf{H}_2(t_0) \mathbf{U}_2$$

- wegen $\mathbf{U}_1(t_0, t_0) = \mathbf{U}_2(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ ergibt die Integration dieser DGLn

$$\mathbf{U}_1 = \exp[-i\mathbf{H}_1(t_0)(t - t_0)] = \exp[-i\mathbf{H}_2(t_0)(t - t_0)] = \mathbf{U}_2.$$

- im Folgenden: $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$
- garantiert gleiche Wahrscheinlichkeiten für Messungen...

$${}_1 \langle o, t | \Psi(t) \rangle_1 = {}_1 \langle o, t_0 | \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 | \Psi(t_0) \rangle_1 = {}_2 \langle o, t_0 | \mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{C}_2 | \Psi(t_0) \rangle_2 = {}_2 \langle o, t | \Psi(t) \rangle_2.$$

- ...und Erwartungswerte von Observablen

$$\begin{aligned} \langle O(t) \rangle &= {}_1 \langle \Psi(t) | \mathbf{O}_1(t) | \Psi(t) \rangle_1 = {}_1 \langle \Psi(t_0) | \mathbf{C}_1^\dagger \mathbf{A}_1 \mathbf{O}_1(t_0) \mathbf{A}_1^\dagger \mathbf{C}_1 | \Psi(t_0) \rangle_1 \\ &= {}_2 \langle \Psi(t_0) | \mathbf{U}^\dagger \mathbf{O}_2(t_0) \mathbf{U} | \Psi(t_0) \rangle_2 \\ &= {}_2 \langle \Psi(t) | \mathbf{O}_2(t) | \Psi(t) \rangle_2 \end{aligned}$$

- bildunabhängige „Zeitableitung“

$$\dot{\mathbf{O}}_j(t) = \frac{1}{i} [\mathbf{O}_j, \mathbf{H}_j], \quad j \in \{1, 2, \dots\}$$

- $\dot{\mathbf{O}}_j(t)$ repräsentiert bildunabhängig die Zeitableitung der Observablen $O(t)$
- Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle = \langle \dot{\mathbf{O}}_j(t) \rangle.$$

- Wechselwirkungsbild

- im Folgenden Operatoren, Zustände etc. im Wechselwirkungsbild ohne Index
- setze $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} = \mathbf{H}_0$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} = \mathbf{H}_I$
- als einfaches Beispiel: Φ^4 -Theorie mit $\Phi = \Phi^\dagger$:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} :(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi): - \frac{m^2}{2} : \Phi^2 :, \quad \mathcal{L}_I = -\mathcal{H}_I = -\frac{\lambda}{4!} : \Phi :^4$$

- Feldoperatoren und damit Observablen: freie Felder

- falls Lagrangian (und damit Hamiltonian) nicht explizit von \underline{x} abhängig:

$$\mathbf{H}_0 = \text{const} \Rightarrow \mathbf{A} = \exp[i\mathbf{H}_0(t - t_0)].$$

- als einfaches Beispiel: Φ^4 -Theorie mit $\Phi = \Phi^\dagger$:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} :(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi): - \frac{m^2}{2} :\Phi^2:, \quad \mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} :\Phi^4:$$

- Lösungen aus vorigen Vorlesungen bekannt

$$\Phi(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \left[\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \right].$$

Beziehung zum Heisenberg-Bild

- $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_H = \mathbf{H}_H, \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_H = 0$
- **Bildtransformation**

$$|\Psi(t)\rangle_H = |\Psi(t_0)\rangle_H = |\Psi(t_0)\rangle = \mathbf{C}^\dagger |\Psi(t)\rangle \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}^\dagger \Rightarrow \mathbf{O}_H(t) = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{O}(t) \mathbf{C}.$$

- im Folgenden $t_0 \rightarrow -\infty$ und **adiabatisches Ein- und Ausschalten der WW**:

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(t, -\infty) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^t \mathbf{H}_I(t') \exp(-\epsilon|t'|) dt' \right], \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

- T so groß gewählt, dass $-T \ll t_1, \dots, t_n \ll T$
- außerdem sei $t_1 > t_2 > \dots > t_n$. Dann

$$\langle \Omega | \mathcal{T} \Phi_H(\underline{x}_1) \cdot \phi(\underline{x}_n) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \mathbf{C}^\dagger(t_1) \Phi(\underline{x}_1) \mathbf{C}(t_1) \mathbf{C}(t_2)^\dagger \Phi(\underline{x}_2) \mathbf{C}(t_2) \cdots \mathbf{C}^\dagger(t_n) \Phi(\underline{x}_n) \mathbf{C}(t_n) | \Omega \rangle$$

- Zeitentwicklungsoperator erfüllt offenbar für $t_1 > t_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t_1) &= \mathbf{C}(t_1, -\infty) = \mathbf{C}(t_1, t_2) \mathbf{C}(t_2, -\infty) = \mathbf{C}(t_1, t_2) \mathbf{C}(t_2) \\ &\Rightarrow \mathbf{C}(t_1) \mathbf{C}^\dagger(t_2) = \mathbf{C}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \mathcal{T} \Phi_H(\underline{x}_1) \cdot \phi(\underline{x}_n) | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \mathbf{C}^\dagger(t_1) \Phi(\underline{x}_1) \mathbf{C}(t_1, t_2) \Phi(\underline{x}_2) \mathbf{C}(t_2, t_3) \Phi(\underline{x}_3) \\ &\quad \cdots \mathbf{C}(t_{n-1}, t_n) \Phi(\underline{x}_n) \mathbf{C}(t_n) | \Omega \rangle \end{aligned}$$

- weiter ist

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\infty) &= \mathbf{C}(\infty, t_1)\mathbf{C}(t_1) \Rightarrow \mathbf{C}(t_1) = \mathbf{C}^\dagger(\infty, t_1)\mathbf{C}(\infty) \\ \Rightarrow \mathbf{C}^\dagger(t_1) &= \mathbf{C}^\dagger(\infty)\mathbf{C}(\infty, t_1)\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}iG(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) &= \langle \Omega | \mathcal{T}\Phi_H(\underline{x}_1) \cdots \Phi(\underline{x}_n) | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle} \left\langle \Omega \left| \mathcal{T}\Phi(\underline{x}_1) \cdots \Phi(\underline{x}_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{H}_I(t') \right] \right| \Omega \right\rangle\end{aligned}$$

- denn

$$\mathbf{C}(\infty)|\Omega\rangle = \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle |\Omega\rangle,$$

da das Vakuum stabil unter der Zeitentwicklung ist, also der obige Ausdruck das Vakuum bis auf einen **i.a. unbestimmten Phasenfaktor** ist

- **Störungstheorie:** entwickle Exponentialfunktion (s.o.)

- \Rightarrow Beitrag k -ter Ordnung zur **n -Punkt-Green-Funktion:**

$$\begin{aligned}iG_n^{(k)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle &= \left\langle \Omega \left| \mathcal{T}\Phi(\underline{x}_1) \cdots \Phi(\underline{x}_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{(-i\lambda/4!)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{y}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{y}_k : \Phi^4(\underline{y}_1) : \cdots : \Phi^4(\underline{y}_n) : \right| \Omega \right\rangle.\end{aligned}$$

- **Erzeugendes Funktional**

- mit äußerer Quelle $J(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$$Z_0[J] = \left\langle \Omega \left| \mathcal{T} \exp \left[i \int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{y} J(\underline{y}) \Phi(\underline{y}) \right] \right| \Omega \right\rangle$$

folgt (unter Verzicht auf Normalordnung!) mit

$$\begin{aligned}Z[J] &= \exp \left(-\frac{i\lambda}{4!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{y} \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{y})^4} \right) Z_0[J] \\ iG_n^{(k)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty) | \Omega \rangle &= \left. \left| \frac{1}{i^n} \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(\underline{x}_n)} Z[J] \right| \right|_{J=0}\end{aligned}$$

Berechnung von $Z_0[J]$

- Z_0 ergibt sich aus obigem Formalismus für

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2}\Phi + J\Phi$$

- Wechselwirkungsbild mit

$$\mathbf{H}_I = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}).$$

- berechne also

$$\mathbf{C}(t_1, t_2) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{H}_I(t) \right].$$

- zerlege (t_1, t_2) in $N \gg 1$ Teilintervalle mit $\Delta t = (t_2 - t_1)/N$ und $\tau_k = t_1 + (2k-1)\Delta t/2$ ($k \in \{1, \dots, N\}$):

$$\mathbf{C}(t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp[-i\Delta t \mathbf{H}_I(\tau_N)] \exp[-i\Delta t \mathbf{H}_I(\tau_{N-1})] \cdots \exp[-i\Delta t \mathbf{H}_I(\tau_1)]$$

- da $[\mathbf{H}_I(\tau), \mathbf{H}_I(\tau')] \propto \mathbb{1}$ kann man die **Baker-Campbell-Hausdorff-Formel**

$$\begin{aligned} \exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} &= \exp \left[\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2} [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \right], \\ \text{falls } [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] &= [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0 \end{aligned}$$

verwenden.

- Beweis in nächster Übung! \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t_1, t_2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[-i\Delta t \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_I(\tau_k) - \frac{1}{2} \Delta t^2 \sum_{1 \leq k < l \leq N} [\mathbf{H}_I(\tau_k), \mathbf{H}_I(\tau_l)] \right] \\ &= \exp \left[i \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}) \right] \\ &\quad \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x}_1 \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x}_2 \Theta(t_1 - t_2) J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) [\Phi(\underline{x}_1), \Phi(\underline{x}_2)] \right]. \end{aligned} \tag{1}$$

- benötige davon Erwartungswert bzgl. $|\Omega\rangle$
- 1. Faktor kann noch nicht berechnet werden (2. Faktor ist $\propto \mathbb{1}$ und wird in nächster Übung berechnet!)

- kann 1. Faktor in **Normalordnung** bringen
- dazu nochmal BCH-Formel mit Zerlegung der Modenentwicklung nach Beiträgen mit Vernichtern und Erzeugern (positive/negative Frequenz-Moden)

$$\Phi^{(+)}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}), \quad \Phi^{(-)}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) = \Phi^{(+)\dagger}(\underline{x}),$$

$$\Phi = \Phi^{(+)} + \Phi^{(-)}.$$

- da auch hier $[\Phi^{(+)}(\underline{x}_1), \Phi^{(-)}(\underline{x}_2)] \propto 1$, folgt mit BCH-Formel

$$\exp \left[i \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}) \right] = \exp \left[i \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} J(\underline{x}) \Phi^{(-)}(\underline{x}) \right] \exp \left[i \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} J(\underline{x}) \Phi^{(+)}(\underline{x}) \right]$$

$$\exp \left[+ \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x}_1 \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x}_2 J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) [\Phi^{(-)}(\underline{x}_1), \Phi^{(+)}(\underline{x}_2)] \right].$$

- da Kommutator $\propto 1$ ist, können wir schreiben

$$[\Phi^{(-)}(\underline{x}_1), \Phi^{(+)}(\underline{x}_2)] = \langle \Omega | [\Phi^{(-)}(\underline{x}_1), \Phi^{(+)}(\underline{x}_2)] | \Omega \rangle$$

$$= - \langle \Omega | \Phi^{(+)}(\underline{x}_2) \Phi^{(-)}(\underline{x}_1) | \Omega \rangle.$$

- gilt auch für 2. Faktor in (1) \Rightarrow

$$\mathbf{C}(t_1, t_2) = \exp \left[i \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} J(\underline{x}) \Phi^{(-)}(\underline{x}) \right] \exp \left[i \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} J(\underline{x}) \Phi^{(+)}(\underline{x}) \right]$$

$$\exp \left[- \frac{1}{2} \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x}_1 \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x}_2 J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) \langle \Omega | \mathcal{T} \Phi(\underline{x}_1) \Phi(\underline{x}_2) | \Omega \rangle \right]$$

- mit $t_1 \rightarrow -\infty$ und $t_2 \rightarrow \infty$ folgt schließlich

$$Z_0[J] = \langle \Omega | \mathbf{C}(\infty, -\infty) | \Omega \rangle = \exp \left[- \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{x}_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{x}_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) \right]$$

- **Feynman-Propagator**

$$iD_F(\underline{x}) = \langle \Omega | \mathcal{T} \Phi(\underline{x}) \Phi(0) | \Omega \rangle.$$

- **Feynman-Regeln**

$$= -\frac{i\lambda}{4!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \frac{\delta^4}{(iJ(\underline{y}))^4}$$

$$= iD_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

$$= iJ(\underline{x})$$

- Beitrag zu $Z_0[J]$ in k -ter Ordnung

$$Z_0^{(k)}[j] = \frac{1}{k!2^k} \begin{array}{c} \otimes \\ \vdots k\text{-mal} \\ \otimes \end{array}$$

- Korrektur zu G_2 in führender Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$

- $\mathcal{O}(\lambda)$: 1 Vertex $\hat{=}$ vier Ableitungen nach J für $Z^{(1)}[J]$
- G_2 : 2 weitere Ableitungen nach $J \Rightarrow$ brauche Beitrag mit 6 J 's:

$$\begin{aligned} z^{(4)}[\delta] &= \cancel{\times} \frac{1}{3!2^3} \cancel{\times} \cancel{\times} \cancel{\times} \\ &= \frac{1}{3!2^3} \left(6 \cdot \cancel{\frac{1}{6}} \cancel{\times} \cancel{\times} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\times} \cancel{\times} \\ &= \frac{1}{8} [\cancel{\times} \cancel{\times} + \cancel{\times} \cancel{\times}] \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{4} [4 \cancel{\times} \cancel{\times} + \cancel{\times} \cancel{\times} + 8 \cancel{\times} \cancel{\times}] \\ &= \frac{3}{2} \cancel{\times} \cancel{\times} + \cancel{\times} \cancel{\times} \\ &= \frac{3}{2} \cancel{\times} \cancel{\times} + 3 \cancel{\times} \cancel{\times} \\ &= \frac{3}{2} \cancel{\times} \cancel{\times} + 6 \cancel{\times} \end{aligned}$$

- **Wick-Theorem**: alle Beiträge zu zeitgeordneten Green-Funktionen durch **Zweipunkt-Korrelationsfunktionen** („Kontraktionen von zwei Feldoperatoren“) darstellbar [Wic50]

- Korrektur zu G_2 in führender Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$

- G_2 : 2 weitere Ableitungen nach J :

$$iG_2^{(1)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 3 \begin{array}{c} \textcircled{8} \\ \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array} + 12 \begin{array}{c} \textcircled{8} \\ \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array}$$

$$iG_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array} (1 + 3 \textcircled{8}) + 12 \begin{array}{c} \textcircled{8} \\ \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array} + \mathcal{O}(\lambda)$$

- Korrektur zu G_2 in führender Ordnung $\mathcal{O}(\lambda)$

- Beitrag zu $\langle \Omega | S | \Omega \rangle$

$$\langle \Omega | S | \Omega \rangle^{(1)} = \cancel{\begin{array}{c} \textcircled{8} \\ \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array}} = \frac{1}{2} (\cancel{\textcircled{8}} + 4 \cancel{\textcircled{8}}) = \frac{1}{2} (2 \cancel{\textcircled{8}} + 4 \cancel{\textcircled{8}}) = 3 \textcircled{8}$$

$$= \frac{1}{8} (4 \cancel{\textcircled{8}}) = \frac{1}{2} (\cancel{\textcircled{8}} + 2 \cancel{\textcircled{8}})$$

$$\langle \Omega | S | \Omega \rangle = 1 + 3 \textcircled{8} + \mathcal{O}(\lambda)$$

- endgültiges Resultat für G_2

$$iG_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array} + 12 \begin{array}{c} \textcircled{8} \\ \xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\quad} \\ \underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \end{array} + \mathcal{O}(\lambda)$$

$$iG_2(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = iD_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) - \frac{\lambda}{2} \underbrace{D_F(0)}_{\text{divergent!}} \int_{\mathbb{R}^4} d^4y D_F(\underline{x}_1 - \underline{y}) D_F(\underline{y} - \underline{x}_2).$$

- divergentes „Tadpole-Diagramm“
- röhrt von zwei Feldoperatoren am gleichen Raum-Zeit-Punkt her
⇒ kommt aus $H_I \Rightarrow$ verschwindet mit Normalordnung

- alternativ **Renormierung**: Tadpole $\hat{=}$ Korrektur zu $m^2 \Rightarrow$ wird abgezogen, weil wir m als physikalische Masse definieren
- alle Diagramme mit Schleifen i.a. divergent \Rightarrow **Renormierung ohnehin notwendig**
- ϕ^4 -Theorie renormierbar \Leftrightarrow alle Divergenzen können durch Renormierung der Feldnormierungskonstanten, Masse und Kopplungskonstante beseitigt werden

- **Feynman-Regeln im Impulsraum**

- definiere für alle Größen Fourier-Transformierte via

$$\Phi(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}(\underline{p}) \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{x}).$$

- **Propagator** (vgl. Übungsblatt 9)

$$D_F(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{D}_F(\underline{p}) \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{x}) \quad \text{mit} \quad \tilde{D}_F = \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+}$$

- dann (Beweise zur Übung):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_2 J(x_1) D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) J(x_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) \delta^{(4)}(\underline{p}_2 - \underline{p}_3) \tilde{J}(\underline{p}_1) \tilde{J}(\underline{p}_2) \tilde{D}_F(\underline{p}_3) \end{aligned}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{x} \Phi^4(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3 + \underline{p}_4) \prod_{k=1}^4 \tilde{\Phi}(\underline{p}_k).$$

- lasse bei Berechnung von Matrixelementen \mathcal{M}_{fi} die δ -Funktionen (und die oben beschriebenen $1/\sqrt{[(2\pi)^3 2E_p]}$ -Faktoren aus Modenfunktionen weg

- **Diagramm-Regeln** für $iG^{(n)}(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n)$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{i\lambda}{4!} \\
 &= i\bar{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0^+}
 \end{aligned}$$

- zeichne alle Diagramme mit n äußeren Beinchen, die **äußere Punkte** verbinden
- jeder Diagrammteil muss wenigstens ein äußeres Beinchen enthalten (keine Vakuumdiagramme)
- für Ordnung λ^k : **k Vertizes**
- verbinde die äußeren Punkte und Vertexpunkte
- zähle dabei die Möglichkeiten (für kombinatorische Faktoren)
- an jedem Vertex gilt **Viererimpulserhaltung** (impliziert Viererimpulserhaltung des gesamten Diagramms)
- über unabhängige Impulse in Schleifen ist mit $\int_{\mathbb{R}^4} d^4 \underline{p} / (2\pi)^4$ zu integrieren

- Diagramme **für verbundene \mathcal{M}_{fi}**
- zeichne die Diagramme für die entsprechenden zusammenhängenden n -Punktfunktionen
- lasse die äußeren Beinchen weg (gemäß LSZ-Reduktionsformel)
- in unserer Konvention ist der Faktor aus der Modenfunktion einfach durch 1 zu ersetzen
- äußere Viererimpulse sind on-shell mit $p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$
- für $d\sigma \Rightarrow$ Dreierimpulsintegrale: $d^3 \vec{p} / [(2\pi)^3 2E_p]$

4 Literatur

Literatur

Literatur

- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002),
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>.
- [IZ80] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York (1980).
- [LSZ55] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, Nuovo Cim. **1**, 205 (1955),
<https://doi.org/10.1007/BF02731765>.
- [Phi25] O. Philipsen, *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik*, Springer Spektrum, Berlin, 2 edn. (2025),
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-70849-1>.
- [Wic50] G. C. Wick, The evaluation of the collision matrix, Phys. Rev. **80**, 268 (1950), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.80.268>.