

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 7: Darstellungen der Lorentz-Gruppe, Weyl- und Dirac-Fermionen

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

24. Januar 2026

Outline

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Spin $1/2$: Weyl- und Dirac-Spinoren

Spin $1/2$ + Parität: Quantisiertes Dirac-Feld

Bibliography

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Literatur: [Col18, Wei95, SU01, LL91]

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- ▶ eigentlich brauchen wir unitäre Darstellungen der **Poincarégruppe**
- ▶ Raum-Zeit-Translationen: alle Felder **Skalare**
- ▶ kanonische **Feldquantisierung**: über **Energie- und Impuls** via Noether
- ▶ Lorentz-Gruppe: **eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe** $SO(1,3)^\uparrow$
- ▶ diskrete Symmetrien **CPT**: modellabhängig!
- ▶ für **QED und QCD**: mindestens Raumspiegelungs-Invarianz
(es sind aber **C, P und T** alle separat Symmetrien)
- ▶ **schwache Wechselwirkung**: verletzt alle diskreten Symmetrien bis auf **CPT**
(muss erfüllt sein gemäß **CPT-Theorem**)

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

► Lie-Algebra der $SO(1,3)^\dagger$

► kann alle $\hat{\Lambda}$ durch Boosts und Drehungen zusammensetzen: $\hat{\Lambda} = \hat{B}(\eta, \vec{n})\hat{R}(\varphi, \vec{n}')$

► Beweis: schreibe

$$\hat{\Lambda} = (\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3):$$

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad \Lambda^0_0 = e_0^0 > 1, \quad \det \hat{\Lambda} = +1.$$

► Boost:

$$\hat{B}(\eta, \vec{n}) \equiv \hat{B} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \vec{n}^T \sinh \eta \\ \vec{n} \sinh \eta & (\cosh \eta - 1) \vec{n} \vec{n}^T + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}, \quad \eta = \operatorname{artanh} v, \quad \hat{B}^{-1} = \hat{B}(-\eta, \vec{n}),$$

$$\hat{B}^{-1} \hat{\Lambda} = (\hat{B}^{-1} \underline{e}_0, \hat{B}^{-1} \underline{e}_1, \hat{B}^{-1} \underline{e}_2, \hat{B}^{-1} \underline{e}_3)$$

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- ▶ setze $\vec{n} = \vec{e}_0/|\vec{e}_0| \Rightarrow$

$$\underline{e}'_0 = \hat{B}^{-1} \underline{e}_0 = \begin{pmatrix} \cosh \eta e_0^0 - \sinh \eta \vec{n} \cdot \vec{e}_0 \\ -\sinh \eta e_0^0 \vec{n} + (\cosh \eta - 1)(\vec{n} \cdot \vec{e}_0) \vec{n} + \vec{e}_0 \end{pmatrix}.$$

- ▶ setze $\vec{e}'_0 = 0 \Rightarrow$ mit $\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_0) = \vec{e}_0$

$$\cosh \eta |\vec{e}_0| - e_0^0 \sinh \eta = 0 \Rightarrow \tanh \eta = \frac{|\vec{e}_0|}{e_0^0}.$$

- ▶ wegen $e_0^0 = \sqrt{1 + \vec{e}_0^2}$ ist $\eta \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{e}'_0 = (1, 0, 0, 0)^T \Rightarrow$

$$\hat{\Lambda}' = \hat{B}^{-1} \hat{\Lambda} = (\underline{e}'_0, \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3) \Rightarrow e_j'^0 = \underline{e}'_0 \cdot \underline{e}'_j = 0$$

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- damit $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$ und $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \det \hat{\Lambda}' = 1 \Rightarrow \exists \hat{\mathcal{R}} \in \text{SO}(3)$

$$\hat{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{\mathcal{R}}^{-1} \end{pmatrix},$$

so dass $\hat{R}^{-1} \hat{\Lambda}' = \hat{R}^{-1} \hat{B}^{-1} \hat{\Lambda} = \mathbb{1}_4 \Rightarrow$

$$\hat{\Lambda} = \hat{B}(\eta, \vec{n}) \hat{R}(\varphi, \vec{n}').$$

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

► Infinitesimale Erzeugende (Lie-Algebra)

► endliche Boosts und Drehungen

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \vec{n}^T \sinh \eta \\ \vec{n} \sinh \eta & (\cosh \eta - 1) \vec{n} \vec{n}^T + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{n} \vec{n}^T + (\mathbb{1}_3 - \vec{n} \vec{n}^T) \cos \varphi + \vec{n} \cdot \hat{\vec{e}} \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

mit

$$(\hat{e}^j)^{ik} = \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik}.$$

► für kleine $\delta\eta$ bzw. $\delta\varphi$ ist

$$\hat{B} = \mathbb{1}_4 + i\delta\eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}, \quad \hat{R} = \mathbb{1}_4 - i\delta\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{s}}.$$

mit

$$\vec{k} = -i \text{id}_\eta \hat{B}|_{\eta=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^T \\ \vec{n} & 0_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}^j = \text{id}_\varphi \hat{R}|_{\varphi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{e}^j \end{pmatrix}$$

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- ▶ Kommutatoren (direkt nachrechnen)

$$[\hat{k}^a, \hat{k}^b] = -i\epsilon^{abc} \hat{s}^c, \quad [\hat{s}^a, \hat{s}^b] = +i\epsilon^{abc} \hat{s}^c, \quad [\hat{k}^a, \hat{s}^b] = [\hat{s}^a, \hat{k}^b] = i\epsilon^{abc} \hat{k}^c.$$

- ▶ **Boosts bilden keine Untergruppe** und sind i.a. *nicht* kommutativ
- ▶ Hintereinanderausführung zweier drehungsfreier(!) Boosts in verschiedenen Richtungen *nicht drehungsfrei*
- ▶ nur zwei Boosts in gleicher Richtung bilden **abelsche Untergruppe** mit

$$\hat{B}(\eta_1, \vec{n})\hat{B}(\eta_2, \vec{n}) = \hat{B}(\eta_1 + \eta_2, \vec{n}).$$

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- Bestimmung der (irreduziblen) Darstellungen
 - definiere „Pseudospins“

$$\hat{a}^j = \frac{1}{2}(\hat{s}^j + i\hat{k}^j), \quad \hat{b}^j = \frac{1}{2}(\hat{s}^j - i\hat{k}^j)$$

- **Kommutatoren** (einfach direkt nachrechnen!)

$$[\hat{a}^j, \hat{a}^k] = i\epsilon^{jkl} \hat{a}^l, \quad [\hat{a}^j, \hat{a}^k] = i\epsilon^{jkl} \hat{a}^l, \quad [\hat{a}^j, \hat{b}^k] = 0.$$

- $\Rightarrow \hat{\vec{a}}$ und $\hat{\vec{b}}$ erfüllen Kommutatorrelationen für **zwei unabhängige Spins**
- alle (endlichdimensionalen) irreduziblen Darstellungen aus **QM** bekannt:

$$\hat{a}^2 |s_a, m_a\rangle = s_a(s_a + 1) |s_a, m_a\rangle, \quad \hat{a}^3 |s_a, m_a\rangle = m_a |s_a, m_a\rangle,$$

$$\hat{b}^2 |s_b, m_b\rangle = s_b(s_b + 1) |s_b, m_b\rangle, \quad \hat{b}^3 |s_b, m_b\rangle = m_b |s_b, m_b\rangle$$

$$\text{mit } s_a, s_b \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\},$$

$$m_a \in \{-s_a, -s_a + 1, \dots, s_a - 1, s_a\}, \quad m_b \in \{-s_b, -s_b + 1, \dots, s_b - 1, s_b\}.$$

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- ▶ o.B.d.A: wie in QM können Pseudospins **hermitesch** gewählt werden:
 $\hat{a}^{j\dagger} = \hat{a}^j, \hat{b}^{j\dagger} = \hat{b}^j$
- ▶ entspricht **unitären Darstellungen** der Drehgruppe $SO(3)$ (ganzzahlige s_a bzw. s_b) bzw. der $SU(2)$ (halbzahlige s_a, s_b)

▶ Bestimmung der (irreduziblen) Darstellungen

- ▶ jede irreduzible Darstellung der $\mathfrak{so}(1,3)^\uparrow$ eindeutig bestimmt durch **Paar von Pseudospinquantenzahlen** (s_a, s_b)
- ▶ dann

$$\hat{s}^j = \hat{a}^j + \hat{b}^j, \quad \hat{k}^j = -i(\hat{a}^j - \hat{b}^j)$$

- ▶ wirken auf Vektoren im **Kronecker-Produktraum**
- ▶ Basisvektoren

$$|m_a, m_b\rangle = |m_a\rangle \otimes |m_b\rangle$$

- ▶ für $s_b = 0$: $|m_a, m_b\rangle \equiv |m_a\rangle$
- ▶ (s_a, s_b) -Darstellung ist $(2s_a + 1)(2s_b + 1)$ -dimensional
- ▶ (s_a, s_b) -Darstellung: Rotationsuntergruppe enthält irreduzible Spindarstellungen $s \in \{|s_a - s_b|, |s_a - s_b| + 1, \dots, s_a + s_b\}$ (cf. **Drehimpulsaddition in QM**)

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- ▶ \hat{s}^j hermitesch \Rightarrow Rotationsuntergruppe der $SO(1,3)^\dagger$ wird unitär dargestellt
- ▶ $\hat{k}^{j\dagger} = -\hat{k}^j$: Boosts werden nicht unitär dargestellt
- ▶ \Rightarrow es gibt keine endlichdimensionalen unitären Darstellungen der $SO(1,3)^\dagger$ (außer der trivialen $(0,0)$ -Darstellung)
- ▶ für Spin $s \geq 1/2$:
schließt a priori „relativistische Quantenmechanik“ a la 1. Quantisierung aus!
- ▶ $(0,0)$ -Darstellung führt auf Klein-Gordon-Felder/Teilchen
- ▶ vorige Vorlesung: in 1. Quantisierung keine positiv definite Ladungsdichte, die man à la Born als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren könnte!
- ▶ „kaonisch quantisiertes“ Klein-Gordon-Feld führt auf Vielteilchenquantentheorie für Spin-0-Teilchen
- ▶ Poincaré-Symmetrie (Raumzeit-Translationen und $SO(1,3)^\dagger$, also Drehungen und Boosts) als unitäre Darstellung realisiert
- ▶ diskrete Symmetrien C , P , T (nur durch schwache Wechselwirkung verletzt)
- ▶ CPT für lokale relativistische QFTn stets Symmetrie

Spin 1/2: Weyl- und Dirac-Fermionen

Literatur: [Col18, PS95, Wei95, SU01, LL91]

Spin-1/2-Darstellungen

- ▶ einfachste Darstellungen mit Spin 1/2: (1/2,0) und (0,1/2)
- ▶ enthalten **nur Spin 1/2**
- ▶ im Folgenden: (1/2,0)-Darstellung **linkshändige Weyl-Spinoren**
(0,1/2)-Darstellung **rechtshändige Weyl-Spinoren**
- ▶ **Linkshändige Weyl-Spinoren**
 - ▶ Generatoren für Boosts und Drehungen:

$$\hat{a}_L^j = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^j, \quad \hat{b}_L^j = 0 \Rightarrow \hat{k}_L^j = -\frac{i}{2} \hat{\sigma}^j, \quad \hat{s}^j = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^j.$$

- ▶ **Pauli-Matrizen**

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ **Eigenschaften der Pauli-Matrizen** (direkt nachrechnen)

$$\hat{\sigma}^{j\dagger} = \hat{\sigma}^j, \quad \text{Tr} \hat{\sigma}^j = 0, \quad [\hat{\sigma}^j, \hat{\sigma}^k] = 2i\epsilon^{jkl} \hat{\sigma}^l, \quad \{\hat{\sigma}^j, \hat{\sigma}^k\} = 2\delta^{jk}, \quad \text{Tr}(\hat{\sigma}^j \hat{\sigma}^k) = 2\delta_{jk}.$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Endliche Boosts und Drehungen

- **Boosts und Drehungen** \Rightarrow wegen $(\vec{n} \cdot \hat{\sigma})^2 = \vec{n}^2 = 1$ kann Exponentialreihe leicht ausgewertet werden:

$$\hat{D}_{B,L} = \exp(i\eta \vec{n} \cdot \hat{k}_L) = \exp\left(\frac{\eta}{2} \vec{n} \cdot \hat{\sigma}\right) = \mathbb{1}_2 \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

$$\hat{D}_{R,L} = \exp(-i\varphi \vec{n} \cdot \hat{s}_L) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \hat{\sigma}\right) = \mathbb{1}_2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\vec{n} \cdot \hat{\sigma} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

► Rechtshändige Weyl-Spinoren

- Generatoren für Boosts und Drehungen:

$$\hat{a}_L^j = 0, \quad \hat{b}_L^j = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^j \Rightarrow \hat{k}_R^j = +\frac{i}{2} \hat{\sigma}^j, \quad \hat{s}_R^j = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^j.$$

- **Boosts und Drehungen**

$$\hat{D}_{B,R} = \exp(i\eta \vec{n} \cdot \hat{k}_R) = \exp\left(-\frac{\eta}{2} \vec{n} \cdot \hat{\sigma}\right) = \mathbb{1}_2 \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

$$\hat{D}_{R,R} = \exp(-i\varphi \vec{n} \cdot \hat{s}_R) = \exp\left(-i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \hat{\sigma}\right) = \mathbb{1}_2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - i\vec{n} \cdot \hat{\sigma} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Raumspiegelungen: Parität

- elektromagnetische und starke Wechselwirkungen: **spiegelsymmetrisch** \Rightarrow brauche Raumspiegelungen als Symmetrioperator
- nehme an, $\hat{P} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \hat{P}^{-1}$ wird in Darstellungen linear (im Feldformalismus unitär) dargestellt
- $\hat{D}_P \hat{D}(\hat{\Lambda}) \hat{D}_P^{-1} = \hat{D}(\hat{P} \hat{\Lambda} \hat{P})$
- für infinitesimale Boosts und Drehungen (direkt nachrechnen)

$$\hat{P} \hat{\vec{k}} \hat{P} = -\hat{\vec{k}}, \quad \hat{P} \hat{\vec{s}} \hat{P} = \hat{\vec{s}}$$

- **Anschauung:** Boost in Richtung von **Relativgeschwindigkeit** zwischen Inertialsystemen $\Rightarrow \hat{\vec{k}}$ transformiert sich unter Spiegelungen wie Geschwindigkeiten $\vec{v} \rightarrow -\vec{v} \Rightarrow \hat{\vec{k}}$ ist **polarer Vektor**
 $\hat{\vec{s}}$ transformiert sich wie **Drehimpuls** $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \rightarrow +\vec{L} \Rightarrow \hat{\vec{s}}$ ist **axialer Vektor**

Spin-1/2-Darstellungen

► Parität und Weyl-Spinoren

- Verhalten unter Raumspiegelungen wie für Operatoren im Minkowski-Raum („fundamentale Darstellung“)

$$\hat{D}_P \hat{D}_{B,R/L} \hat{D}_P^{-1} = \hat{D}_P \exp(i\eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}_{L/R}) \hat{D}_P^{-1} = \exp(-i\eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}_{L/R}) = \exp(+i\eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}_{R/L})$$

- für Theorien mit Raumspiegelsymmetrien braucht man Spinorfelder mit **rechts- und linkshändigen Weyl-Spinoren**
- irreduzible Darstellung mit Spin 1/2 für $SO(1,3)^\uparrow$ und $\hat{P} \Rightarrow O(1,3)^\uparrow: (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$
- **vierkomponentige Bispinoren = Dirac-Spinoren**

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_P \Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi = \hat{\gamma}^0 \Psi$$

- Raumspiegelung **vertauscht links- und rechtshändige Weyl-Spinoren**
- wie bei Händen: im Spiegel wird eine linke zu einer rechten Hand
- Eigenschaft wird „Händigkeit“ oder **Chiralität** genannt

Spin-1/2-Darstellungen

- Generatoren für Lorentz-Transformationen für Dirac-Spinoren

$$\hat{\vec{k}}_D = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{s}}_D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}.$$

- Pseudo-Hermitezität:

$$\hat{\gamma}^0 \hat{\vec{k}}_D^\dagger \hat{\gamma}^0 = \hat{\vec{k}}_D, \quad \hat{\gamma}^0 \hat{\vec{s}}_D^\dagger \hat{\gamma}^0 = \hat{\vec{s}}_D^\dagger = \hat{\vec{s}}_D.$$

- endliche Boosts und Drehungen pseudo-unitär:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{B,D}^\dagger \hat{\gamma}^0 &= \hat{\gamma}^0 \exp(-i\vec{\eta} \cdot \hat{\vec{k}}_D) \hat{\gamma}^0 = \exp(-i\vec{\eta} \cdot \hat{\vec{k}}_D) = \hat{D}_{B,D}^{-1}, \\ \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{R,D}^\dagger \hat{\gamma}^0 &= \hat{\gamma}^0 \exp(+i\vec{\varphi} \cdot \hat{\vec{s}}_D) \hat{\gamma}^0 = \exp(i\vec{\varphi} \cdot \hat{\vec{s}}_D) = \hat{D}_{R,D}^{-1}. \end{aligned}$$

- Dirac-Darstellung aller Lorentz-Transformationen pseudounitär
- Parität:

$$\hat{D}_{P,D} = \hat{\gamma}^0 \Rightarrow \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{P,D}^\dagger \hat{\gamma}^0 = (\hat{\gamma}^0)^3 = \hat{\gamma}^0 = \hat{D}_{P,D}^{-1}.$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Invariante Sesquilinear-Formen

- um Lagrangians für freie Weyl- oder Dirac-Felder zu konstruieren \Rightarrow benötige Sesquilinear-Formen aus Spinoren, die sich wie **Lorentz-Skalare bzw. -Tensoren** transformieren
- müssen Ableitungen ∂_μ enthalten, das sich wie (kovariante) Vektorkomponenten Transformiert
- Transformationsverhalten von adjungierten Weyl-Spinoren
 - **Boosts** \Rightarrow wegen $\hat{\sigma}^{j\dagger} = \hat{\sigma}^j$:

$$\psi_{L/R} \xrightarrow{\hat{B}} \exp(\pm \eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}) \psi_{L/R} \Rightarrow \psi_{L/R}^\dagger \xrightarrow{\hat{B}} \psi_{L/R}^\dagger \exp(\pm \eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}).$$

- invariant („skalar“) sind also Ausdrücke wie $\psi_L^\dagger \psi_R$ und $\psi_R^\dagger \psi_L$
- für Dirac-Spinoren ist

$$\Psi^\dagger \hat{\gamma}^0 \Psi = \bar{\Psi} \Psi$$

Skalar unter Boosts

Spin-1/2-Darstellungen

► Drehungen

$$\psi_{L/R} \xrightarrow{\hat{R}} \exp(-i\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}) \psi_{L/R} \Rightarrow \psi_{L/R}^\dagger \xrightarrow{\hat{R}} \psi_{L/R}^\dagger \exp(+i\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}).$$

- alle Kombinationen von links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren $\psi^\dagger \psi$ sind „skalar unter Drehungen“, also auch diejenigen, die auch Skalare unter Boosts sind

► Vierervektoren

- für Weylspinoren beider Art

$$\vec{V} = \psi^\dagger \hat{\vec{\sigma}} \psi$$

Vektor unter Drehungen

- Beweis (es genügen infinitesimale Trafos!): mit $\delta \vec{\varphi} = \vec{n} \delta \varphi$

$$\delta \vec{V} = \frac{i}{2} \delta \varphi_a \psi^\dagger [\hat{\sigma}^a, \hat{\vec{\sigma}}] \psi = \delta \vec{\varphi} \times \vec{V}$$

- für Boosts: brauche vierte „Pauli-Matrix“, $\hat{\sigma}^0$ als „Zeitkomponente“ \Rightarrow ändert sich nicht unter Drehungen $\Rightarrow \hat{\sigma}^0 = \mathbb{1}_2$

Spin-1/2-Darstellungen

- ▶ betrachte

$$V_{L/R}^{\mu} = \psi_{L/R}^{\dagger} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \eta_{L/R} \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \psi_{L/R}$$

- ▶ transformiert sich als Vektor unter Drehungen (s.o.)
- ▶ **infinitesimaler Boost**: $\delta \vec{\eta} = \delta \eta \vec{n}$

$$\delta V_{L/R}^{\mu} = \psi_{L/R}^{\dagger} \begin{pmatrix} \pm \delta \vec{\eta} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \\ \pm \eta_{L/R} \delta \vec{\eta} \end{pmatrix} \psi_{L/R} = \begin{pmatrix} \pm \delta \vec{\eta} \cdot \vec{V} / \eta_{L/R} \\ \pm \delta \vec{\eta} V^0 \eta_{L/R} \end{pmatrix}.$$

- ▶ infinitesimaler Lorentz-Boost $\Rightarrow \eta_{L/R} = \pm 1$.
- ▶ es sind also

$$\psi_L^{\dagger} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi_L, \quad \psi_R^{\dagger} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi_R$$

Vierervektoren

Spin-1/2-Darstellungen

► Dirac-Spinoren

$$\Psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 \\ \text{diag}(\hat{\vec{\sigma}}, -\hat{\vec{\sigma}}) \end{pmatrix} \Psi = \bar{\Psi} \hat{\gamma}^0 \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 \\ \text{diag}(\hat{\vec{\sigma}}, -\hat{\vec{\sigma}}) \end{pmatrix} \Psi = \underline{e}_\mu \bar{\Psi} \hat{\gamma}^\mu \Psi$$

► Dirac-Matrizen (chirale Darstellung)

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^j = \hat{\gamma}^0 \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^j & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}^j \\ \hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}.$$

► Eigenschaften der Dirac-Matrizen

$$\gamma^{\hat{0}\dagger} = \hat{\gamma}^0, \quad \hat{\gamma}^{j\dagger} = -\hat{\gamma}^j, \quad \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Lorentz-kovariante Sesquilinearformen

- Transformationsverhalten mit Dirac-Matrix-Algebra und Pseudounitarität aller Lorentz-Transformationen und Raumspiegelungen (also alle Dirac-Darstellungsmatrizen der $O(1,3)^\uparrow$):

$$\Psi' = \hat{D}_{\Lambda,D} \Psi \Rightarrow \bar{\Psi}' = \Psi^\dagger \hat{D}_{\Lambda,D}^\dagger \hat{\gamma}^0 = \bar{\Psi} \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{\Lambda,D}^\dagger \hat{\gamma}^0 = \bar{\Psi} \hat{D}_{\Lambda,D}^{-1}.$$

- Skalar: $\bar{\Psi}\Psi$

$$\bar{\Psi}' \Psi' = \bar{\Psi} \hat{D}_{\Lambda,D}^{-1} \hat{D}_{\Lambda,D} \Psi = \bar{\Psi} \Psi.$$

- Vierervektor $\bar{\Psi} \hat{\gamma}^\mu \Psi$

$$\bar{\Psi}' \hat{\gamma}^\mu \Psi' = \bar{\Psi} \hat{D}_{\Lambda,D}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{D}_{\Lambda,D} \Psi$$

- \Rightarrow Transformationsverhalten der Dirac-Matrizen

$$\hat{D}_{\Lambda,D}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{D}_{\Lambda,D} = \Lambda^\mu{}_\nu \hat{\gamma}^\nu.$$

- Tensoren höherer Stufe (Bsp. zweiter Stufe)

$$\hat{D}_{\Lambda,D}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{D}_{\Lambda,D} = \hat{D}_{\Lambda,D}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{D}_{\Lambda,D} \hat{D}_{\Lambda,D}^{-1} \hat{\gamma}^\nu \hat{D}_{\Lambda,D} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \hat{\gamma}^\rho \hat{\gamma}^\sigma$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Irreduzible Teile

- aus Ψ lassen sich offenbar $4 \times 4 = 16$ unabhängige Sesquilinearformen $\bar{\psi} \hat{\Gamma} \psi$ bilden
- für Lagrangian: **reelle Sesquilinearformen** $\Rightarrow \hat{\Gamma}$ pseudo-hermitesch:

$$(\bar{\Psi} \hat{\Gamma} \Psi)^* = \Psi^\dagger \hat{\Gamma}^\dagger \bar{\Psi}^\dagger = \bar{\Psi} \gamma^0 \hat{\Gamma}^\dagger \gamma^{0\dagger} \Psi = \bar{\Psi} \gamma^0 \hat{\Gamma}^\dagger \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi} \hat{\Gamma} \Psi.$$

- bereits identifiziert: Skalar (1) und Vierervektor (4)
- Tensor 2. Stufe: Zerlegung in symmetrischen und antisymmetrischen Teil

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu = \frac{1}{2} \{ \hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu \} + \frac{1}{2} [\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu] = g^{\mu\nu} - i \hat{\sigma}^{\mu\nu}$$

- symmetrischer Teil gibt wieder Skalar
- antisymmetrischer Teil ist unabhängig von Skalar und Vektor
 \Rightarrow **antisymmetrischer Tensor 2. Stufe** (6 unabhängige Komponenten)

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu], \quad \hat{\gamma}^0 \hat{\sigma}^{\mu\nu\dagger} \gamma^0 = \hat{\sigma}^{\mu\nu} \Rightarrow \bar{\Psi} \hat{\sigma}^{\mu\nu} \Psi = (\bar{\Psi} \hat{\sigma}^{\mu\nu} \Psi)^*.$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Tensor 3. Stufe: $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho$

- kann nur neues geben, wenn alle drei Indizes verschieden sind. Andernfalls wegen Antivertauschbarkeit von Diracmatrizen mit verschiedenen Indizes und $(\hat{\gamma}^\mu)^2 = \pm 1$ nur wieder **Vektor**
- Falls alle 3 Indizes verschieden \Rightarrow total antisymmetrischer Tensor
- umkehrbar eindeutig auf **Axial-Vektor** abbildbar

$$\hat{A}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma = \hat{\gamma}^\mu \epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \hat{\gamma}_\alpha \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma$$

- definiere

$$\frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}_\sigma = \hat{\gamma}_0 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 = -\hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3 = -i \hat{\gamma}_5 \Rightarrow \hat{\gamma}_5 = -i \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

- Da $\hat{\gamma}^\mu$ wie Vektor transformiert (auch unter Spiegelungen) aber $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ zwar invarianter Tensor unter $SO(1,3)$ -Trafos ist, aber unter Spiegelungen wegen $\det \hat{P} = -1$ Vorzeichen wechselt, transformiert $\hat{\gamma}_5$ unter $SO(1,3)^\dagger$ -Trafos wie Skalar, wechselt aber Vorzeichen unter Spiegelungen $\Rightarrow \hat{\gamma}_5$ ist **Pseusoskalar**

Spin-1/2-Darstellungen

► Eigenschaften

$$(\mathrm{i}\hat{\gamma}_5)^\dagger = -\mathrm{i}\hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}^0(\mathrm{i}\hat{\gamma}_5)^\dagger \hat{\gamma}^0 = \mathrm{i}\hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}_5^2 = \mathbb{1}_4, \quad \hat{D}_{P,D}\hat{\gamma}_5\hat{D}_{P,D} = \hat{\gamma}^0\hat{\gamma}_5\hat{\gamma}^0 = -\hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}_5\hat{\gamma}^\mu = -\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}_5.$$

► Projektion auf links- und rechtshändige Anteile des Dirac-Spinors

$$\frac{1-\hat{\gamma}^5}{2}\Psi = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi_L, \quad \frac{1+\hat{\gamma}^5}{2}\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \Psi_R.$$

► damit alle 16 reellen irreduziblen Lorentz-kovarianten Sesquilinearformen:

$\bar{\Psi}\Psi$: **Skalar** (1 Komponente)

$\mathrm{i}\bar{\Psi}\hat{\gamma}_5\Psi$: **Pseudoskalar** (1 Komponente)

$\bar{\Psi}\hat{\gamma}^\mu\Psi$: **Vierervektor** (4 Komponenten)

$\bar{\Psi}\hat{\gamma}^5\hat{\gamma}^\mu\Psi$: **Pseudovierervektor** (4 Komponenten)

$\bar{\Psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\Psi$: **antisymmetrischer Tensor 2. Stufe** (6 Komponenten)

Spin-1/2-Darstellungen

- für später wichtig: endlicher **Boost in Dirac-Matrizenschreibweise**

$$\begin{aligned}\hat{D}_{B,D} &= \exp(i\eta \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}_D) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \mathbb{1}_2 + \sinh(\eta/2) \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \cosh(\eta/2) \mathbb{1}_2 - \sinh(\eta/2) \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \\ &= U_\mu \gamma^\mu \gamma^0 = \begin{pmatrix} U_0 \mathbb{1}_2 + \vec{U} \cdot \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & U_0 \mathbb{1}_2 - \vec{U} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{U} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \vec{n} \sinh(\eta/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

► \Rightarrow

$$\hat{D}_{B,D} = U_\mu \gamma^\mu \gamma^0 \quad \text{mit} \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \vec{n} \sinh(\eta/2) \end{pmatrix}.$$

Spin-1/2-Darstellungen

► Äquivalente Darstellungen der Dirac-Algebra

- die **Antikommutatorrelationen** $\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ bleiben unter **beliebigen Ähnlichkeitstransformationen** erhalten: $\hat{\gamma}^\mu = \hat{T} \hat{\gamma}^\mu \hat{T}^{-1}$
- damit Relationen zwischen $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ und \hat{k}_D und \hat{s}_D so erhalten bleiben, dass \hat{s}_D unitär und \hat{k}_D antiunitär bleibt $\Rightarrow \hat{T} = \hat{U}$ **muss unitär sein**
- neue Dirac-Spinoren: $\tilde{\Psi} = \hat{U} \Psi$
- andere verbreitete Konventionen
 - unsere bislang verwendete **chirale Darstellung** ist Konvention wie in [LL91]
 - Konvention für chirale Darstellung in z.B. [PS95]: $\hat{U} = \hat{\gamma}^0$

$$\tilde{\gamma}^0 = \hat{\gamma}^0, \quad \tilde{\gamma}^j = -\hat{\gamma}^j, \quad \tilde{\gamma}_5 = -\hat{\gamma}_5$$

- „**Standarddarstellung**“ (z.B. [BD65])

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^j \\ -\hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix} = -\hat{\gamma}^j.$$

- Vorteil: **Paritätseigenzustände**
 \Rightarrow die beiden oberen (unteren) Spinkomponenten entsprechen Parität +1 (-1)

Spin $1/2$ + Parität: Quantisiertes Dirac-Feld

Literatur: [Col18, PS95, Wei95, SU01, LL91]

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ historische Idee Diracs: **finde Wellengleichung mit nur 1. Ableitungen**
- ▶ Motivation: löst Problem mit nicht positiv definierter erhaltener Ladung (wie bei nichtrelativistischer Schrödinger-Gleichung!)
- ▶ moderner Zugang: verwende obige Analyse der **Darstellungen der $O(1,3)^\dagger$**
- ▶ such reelle Lagrangefunktion für freies Diracfeld Ψ mit nur einer Ableitung
- ▶ Raumspiegelung \hat{P} soll Symmetrie sein
 - ▶ zur Verfügung stehen die reellen Sesquilinearformen und der **Einteilchen-Energie-Impulsoperator $i\partial_\mu$**
 - ▶ man kann nur den Vektorstrom mit dem **polaren Vektor $i\partial_\mu$** „überschieben“; mit Axialvektor wäre \mathcal{L} nicht spiegelsymmetrisch
 - ▶ antisymmetrischer Tensor scheidet aus, weil man zusammen mit nur einem ∂_μ keinen Skalar erzeugen kann
 - ▶ für von ∂_μ freie Terme kommt nur der **Skalar** in Frage; Pseudoskalar bricht wieder Spiegelsymmetrie

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ nützliche Abkürzung: **Feynman-Dolch** mit beliebigen Vektoren oder Vektoroperatoren: $A_\mu \hat{\gamma}^\mu = \not{A}$ oder $\partial_\mu \hat{\gamma}^\mu = \not{\partial}$
- ▶ **Feldgleichungen**: Variiere Ψ und $\bar{\Psi}$ als unabhängige Felder (für die 2×4 reellen Feldfreiheitsgrade)
- ▶ \Rightarrow freie **Dirac-Gleichung**

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0.$$

- ▶ Gleichung für Dirac-adjungierte Funktion: adjungiere zunächst Dirac-Gleichung

$$\Psi^\dagger(-i\overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - m) = 0 \Rightarrow \bar{\Psi}\gamma^0(-i\overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - m) = 0 \Rightarrow \bar{\Psi}\gamma^0(-i\overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - m)\gamma^0 = \bar{\Psi}(-i\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0.$$

- ▶ impliziert auch Gültigkeit der **Klein-Gordon-Gleichung**:

$$(i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m)\Psi = -(\not{\partial}^2 + m^2)\Psi = -(\square + m^2)\Psi = 0.$$

- ▶ \Rightarrow quantisierte Theorie beschreibt
Spin-1/2=Teilchen und die dazugehörigen Antiteilchen mit Masse m .

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ außer Raum-Zeit-Symmetrien (s. nächste Übung!) Lagrangian auch **invariant unter globalen Phasenänderungen**

$$\Psi' = \exp(-iq\alpha)\Psi, \quad \bar{\Psi}' = \exp(+iq\alpha)\Psi$$

- ▶ dazugehöriger erhaltener **Noether-Strom**

$$j^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi.$$

- ▶ checke Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = q[\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu + (\partial_\mu\gamma^\mu\bar{\Psi})\Psi] = q\bar{\Psi}(-im + im)\Psi = 0.$$

- ▶ $j^0 = q\bar{\Psi}\gamma^0\Psi = q\Psi^\dagger\Psi$: für $q > 0$ positiv definit \Rightarrow Diracs Idee hat funktioniert
- ▶ ABER: Probleme mit negativen Energien wie bei Klein-Gordon-Feld
- ▶ daher **Feldquantisierung**

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ **Hamilton-Formalismus** für „klassische“ Dirac-Feld
- ▶ vereinfacht sich mit etwas abgeänderter Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi$$

- ▶ äquivalent, weil **Wirkung** ungeändert, denn

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$$

- ▶ unterscheidet sich nur um Viererdivergenz von der Form $\Omega^\mu(\Psi, \bar{\Psi})$
 - ▶ mit \mathcal{L}' nur ein von 0 verschiedener Feldimpuls

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \partial_t \Psi} = i\bar{\Psi}\gamma^0 = i\Psi^\dagger$$

- ▶ **Hamilton-Dichte**

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_t\Psi - \mathcal{L}' = i\bar{\Psi}\gamma^0\partial_t\Psi - \mathcal{L}' = -i\bar{\Psi}\partial_j\hat{\gamma}^j\Psi + m\bar{\Psi}\Psi$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ mit Dirac-Gleichung

$$i(\gamma^0 \partial_t + \gamma^j \partial_j) \Psi = m \Psi \Rightarrow (-i \partial_j \gamma^j + m) \Psi = i \gamma^0 \partial_t \Psi \Rightarrow \mathcal{H} = i \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_t \Psi = i \Psi^\dagger \partial_t \Psi.$$

- ▶ **Quantisierung** als Fermionen \Rightarrow gleichzeitige kanonische **Antikommutatoren**:

$$\{\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\Psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = i \{\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi_b^\dagger(t, \vec{y})\} = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

- ▶ entwickle wieder nach **Modenfunktionen** positiver und negativer Frequenz (in manifest kovarianter Form)

$$U_{\vec{p}, \sigma}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} u_\sigma(\vec{p}) \exp(-i \underline{p} \cdot \underline{x}) \Big|_{p^0=E_p},$$
$$V_{\vec{p}, \sigma}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} v_\sigma(\vec{p}) \exp(+i \underline{p} \cdot \underline{x}) \Big|_{p^0=E_p}, \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}.$$

- ▶ $u_\sigma(\vec{p})$ und $v_\sigma(\vec{p})$ geeignete Dirac-Spinoren, $\sigma \in \{1/2, -1/2\}$: Spin-Freiheitsgrade

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ wende gleich Feynman-Stückelberg-Trick an: Moden mit positiver (negativer) Frequenz mit **Vernichtern** $\mathbf{a}(\vec{p}, \sigma)$ (**Erzeugern** $\mathbf{b}^\dagger(\vec{p}, \sigma)$)
- ▶ dabei $\sigma \in \{1/2, -1/2\}$ für \hat{s}_D^3 -Eigenwerte

$$\Psi(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \sum_{\sigma} [\mathbf{a}_{\sigma}(\vec{p}) U_{\vec{p}, \sigma}(\underline{x}) + \mathbf{b}_{\sigma}^{\dagger}(\vec{p}) V_{\vec{p}, \sigma}(\underline{x})]$$

- ▶ Dirac-Gleichung: **Teilchen- bzw. Antiteilchen-Dirac-Spinoren**
(im Folgenden immer „**on-shell-Bedingung**“ $p^0 = E_p$!)

$$(\not{p} - m)u_{\sigma}(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_{\sigma}(\vec{p}) = 0.$$

Quantisiertes Dirac-Feld

► Wigner-Basis [Wig39]

- **irreduzible Darstellung der $O(1,3)^\dagger$** \Rightarrow kann *alle* Zustände zu \underline{p} mit $\underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 > 0$, also $p^0 = E_p$ durch **Boosts** aus den Zuständen zu $\vec{p} = 0$ erreichen:

$$\begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \hat{B} \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \vec{n}^T \\ \sinh \eta \vec{n} & (\cosh \eta - 1) \vec{n} \vec{n}^T + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cosh \eta \\ m \sinh \eta \vec{n} \end{pmatrix}$$

Setze $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}| \Rightarrow \eta = \text{artanh}(|\vec{p}|/E_p) > 0$.

- Löse Gleichungen für die Dirac-Spinoren $u_\sigma(\vec{p})$ und $v_\sigma(\vec{p})$ bei $\vec{p} = 0$
- definiere dann

$$u_\sigma(\vec{p}) = \hat{D}_{B,D} u_\sigma(\vec{0}), \quad v_\sigma(\vec{p}) = \hat{D}_{B,D} v_\sigma(\vec{0}).$$

- da Drehungen $\vec{p} = 0$ ungeändert lassen \Rightarrow Drehungen Standuntergruppe
- „**Wigner's little group**“ für massive Darstellungen $m > 0$
- wähle $u_\sigma(\vec{0})$ und $v_\sigma(\vec{0})$ als Eigenspinoren zu \hat{s}_D^3 mit Eigenwerten $\sigma = \pm 1/2$
- dann nur diese Zustände zu $\vec{p} = \vec{0}$ haben definite spin- z -Komponente
- da \hat{k}_D nicht mit \hat{s}_D^3 vertauschen **ist das nicht der Fall** für die Zustände mit $\vec{p} \neq 0$
- Spin als intrinsische Teilcheneigenschaft: **definiert im Ruhsystem des Teilchens!**

Quantisiertes Dirac-Feld

► Konstruktion der $u_\sigma(\vec{p})$ und $v_\sigma(\vec{p})$

- Gleichungen für beliebige \underline{p} mit $\underline{p}^2 = m^2$:

$$(\not{p} - m)u_\sigma(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_\sigma(\vec{p}) = 0.$$

- Gleichungen für $\vec{p} = 0 \Rightarrow \underline{p} = (m, 0, 0, 0)^T$

$$\gamma^0 u_\sigma(\vec{0}) = u_\sigma(\vec{0}), \quad \gamma^0 v_\sigma(\vec{0}) = -v_\sigma(\vec{0}),$$

- im Ruhssystem des Teilchens: Teilchen (Antiteilchen) haben **Parität** 1 (−1)
- bestimme die linear unabhängigen Lösungen als **Eigenspinoren von \hat{S}_D^3** :

$$u_{1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} u'_{1/2}(0, +1/2), \quad u_{-1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} u'_{-1/2}(0, -1/2),$$

$$v_{1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} v'_{1/2}(0, +1/2), \quad v_{-1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} v'_{-1/2}(0, -1/2).$$

Quantisiertes Dirac-Feld

► Boost zu $\vec{p} \neq 0$ -Zuständen

- boost um $\eta = \operatorname{artanh}(|\vec{p}|/E_p)$ in Richtung von $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$

$$u_\sigma(\vec{p}) = \hat{D}_{B,D} u_\sigma(\vec{p}) = \not{U} \gamma^0 u_\sigma(\vec{0}) = \not{U} u_\sigma(\vec{0}),$$

$$v_\sigma(\vec{p}) = \hat{D}_{B,D} v_\sigma(\vec{p}) = \not{U} \gamma^0 v_\sigma(\vec{0}) = -\not{U} v_\sigma(\vec{0}),$$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \sinh(\eta/2) \vec{n} \end{pmatrix}$$

- drücke Hyperbelfunktionen mit E_p und $|\vec{p}|$ aus

$$\cosh \eta = \frac{E_p}{m} = 2 \cosh^2(\eta/2) - 1 \Rightarrow \cosh(\eta/2) = \sqrt{\frac{1 + \cosh \eta}{2}} = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}},$$

$$\cosh \eta = \frac{E_p}{m} = 1 + 2 \sinh^2(\eta/2) \Rightarrow \sinh(\eta/2) = \sqrt{\frac{\cosh \eta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E_p - m}{2m}}.$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ NB:

$$|\vec{p}| = \sqrt{E_p^2 - m^2}$$

- ▶ Rechnung für $u_\sigma(\vec{p})$:

$$\begin{aligned} u_\sigma(\vec{p}) &= \left(\gamma^0 \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} - \sqrt{\frac{E_p - m}{2m}} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\gamma} \right) u_\sigma(\vec{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(E_p + m)}} [(m + E)\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}] u'_\sigma(\vec{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(E_p + m)}} [(m + E)\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}] u'_\sigma(\vec{0}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2(E_p + m)}} (m + \not{p}) u'_\sigma(0, \sigma) \end{aligned}$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ analoge Rechnung für $v_\sigma(\vec{p})$:

$$v_\sigma(\vec{p}) = \sqrt{\frac{1}{2(E_p + m)}}(m - \not{p})v'_\sigma(0, \sigma)$$

- ▶ Pseudoorthogonalitätsrelationen

$$\bar{u}_\sigma(\vec{p})u_{\sigma'}(\vec{p}) = 2m\delta_{\sigma,\sigma'}, \quad \bar{v}_\sigma(\vec{p})v_{\sigma'}(\vec{p}) = -2m\delta_{\sigma,\sigma'},$$

$$\bar{u}_\sigma(\vec{p})v_{\sigma'}(\vec{p}) = \bar{v}_\sigma(\vec{p})u_{\sigma'}(\vec{p}) = 0,$$

$$u_\sigma(\vec{p})^\dagger u_{\sigma'}(\vec{p}) = 2E\delta_{\sigma\sigma'}, \quad v_\sigma(\vec{p})^\dagger v_{\sigma'}(\vec{p}) = 2E\delta_{\sigma\sigma'},$$

$$u_\sigma(\vec{p})^\dagger v(-\vec{p}, \sigma') = v_\sigma(\vec{p})^\dagger u_{\sigma'}(-\vec{p}) = 0.$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- **Spinsummen:** Definiere

$$\hat{A}(\vec{p}) = \sum_{\sigma} u_{\sigma}(\vec{p}) \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}), \quad \hat{B}(\vec{p}) = \sum_{\sigma} v_{\sigma}(\vec{p}) \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}).$$

- Wirkung auf Basis ($u_{\sigma}(\vec{p}), v_{\sigma}(\vec{p})$): verwende Pseudoorthogonalitätsrelationen und $\not{p} u_{\sigma}(\vec{p}) = m u_{\sigma}(\vec{p}), \not{p} v_{\sigma}(\vec{p}) = -m v_{\sigma}(\vec{p})$

$$\hat{A}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) = \sum_{\sigma} u_{\sigma} 2m \delta_{\sigma, \sigma'} = 2m u_{\sigma'}(\vec{p}) = (\not{p} + m) u_{\sigma'}(\vec{p}),$$

$$\hat{A}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) = 0 = (\not{p} + m) v_{\sigma'}(\vec{p}),$$

$$\hat{B}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) = 0 = (\not{p} - m) u_{\sigma'}(\vec{p})$$

$$\hat{B}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) = - \sum_{\sigma} v_{\sigma} 2m \delta_{\sigma, \sigma'} = -2m v_{\sigma'}(\vec{p}) = (\not{p} - m) v_{\sigma'}(\vec{p});$$

\Rightarrow

$$\hat{A}(\vec{p}) = \sum_{\sigma} u_{\sigma}(\vec{p}) \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) = \not{p} + m, \quad \hat{B}(\vec{p}) = \sum_{\sigma} v_{\sigma}(\vec{p}) \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) = \not{p} - m,$$

$$\hat{A}(\vec{p}) - \hat{B}(\vec{p}) = \sum_{\sigma} [u_{\sigma}(\vec{p}) \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) - v_{\sigma}(\vec{p}) \bar{v}_{\sigma}(\vec{p})] = 2m \mathbb{1}_4.$$

Quantisiertes Dirac-Feld

► Orthonormiertheit der Modenfunktionen

$$(U_{\vec{p},\sigma}, U_{\vec{p}',\sigma'}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} U_{\vec{p},\sigma}^\dagger(\underline{x}) U_{\vec{p}',\sigma'}(\underline{x}) = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$(V_{\vec{p},\sigma}, V_{\vec{p}',\sigma'}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} U_{\vec{p},\sigma}^\dagger(\underline{x}) U_{\vec{p}',\sigma'}(\underline{x}) = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$(V_{\vec{p},\sigma}, U_{\vec{p}',\sigma'}) = (U_{\vec{p}',\sigma'}, V_{\vec{p},\sigma})^* = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} V_{\vec{p},\sigma}^\dagger(\underline{x}) U_{\vec{p}',\sigma'}(\underline{x}) = 0.$$

► damit und **gleichzeitigen Antikommutatorrelationen** der quantisierten Dirac-Felder

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{a}_{\sigma'}(\vec{p}')\} &= \{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}_{\sigma'}(\vec{p}')\} = \{\mathbf{b}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}_{\sigma'}(\vec{p}')\} = \{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}_{\sigma'}^\dagger(\vec{p}')\} = 0, \\ \{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \{\mathbf{b}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}_{\sigma'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned}$$

► in „Box-Regularisierung“ wie bei Klein-Gordon-Feld

$$\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \rightarrow \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad \vec{p} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- **Besetzungzahl- oder Fock-Zustände:** simultane Eigenzustände für $\mathbf{N}_{a,\sigma}(\vec{p}) = \mathbf{a}_{\sigma}^{\dagger}(\vec{p})\mathbf{a}_{\sigma}(\vec{p})$ und $\mathbf{N}_{b,\sigma}(\vec{p}) = \mathbf{b}_{\sigma}^{\dagger}(\vec{p})\mathbf{b}_{\sigma}(\vec{p})$
- $N_{a/b,\sigma}(\vec{p}) \in \{0, 1\}$, denn $\mathbf{a}_{\sigma}^{\dagger 2}(\vec{p}) = 0$ (wegen **Antikommutatorregeln**) \Rightarrow **Pauli-Verbot**

$$|\{N_{a,\sigma}(\vec{p}), N_{b,\sigma}(\vec{p})\}_{\sigma,\vec{p}}\rangle = \prod_{\sigma,\vec{p}} \mathbf{a}_{\sigma}^{\dagger N_{a,\sigma}(\vec{p})}(\vec{p}) \mathbf{b}_{\sigma}^{\dagger N_{b,\sigma}(\vec{p})}(\vec{p}) |\Omega\rangle$$

- **Vakuumzustand**

$$\mathbf{a}_{\sigma}(\vec{p})|\Omega\rangle = \mathbf{b}_{\sigma}(\vec{p})|\Omega\rangle = 0.$$

Quantisiertes Dirac-Feld

- ▶ **Energie, Impuls, Drehimpuls und Ladung**
 - ▶ **Normalordnung**: bringe alle Erzeugungsoperatoren nach links alle Vernichtungsoperatoren nach rechts
 - ▶ beinhaltet dabei das **Vorzeichen der Permutation**, um von ursprünglicher zur Normalordnung zu gelangen, z.B.

$$: \mathbf{a}_\sigma(\vec{p}) \mathbf{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{p}') := -\mathbf{a}_{\sigma'}^\dagger(\vec{p}') \mathbf{a}_\sigma(\vec{p}).$$

- ▶ Energie (Hamilton-Operator): Noether bzgl. **zeitlicher Translationsinvarianz**

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} i : \Psi^\dagger(\underline{x}) \partial_t \Psi(\underline{x}) := \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_p [\mathbf{N}_{a,\sigma}(\vec{p}) + \mathbf{N}_{b,\sigma}(\vec{p})]$$

- ▶ Erhaltungsgröße
- ▶ positiv definit, Teilchenzahloperatoren haben die erwartete Bedeutung
- ▶ hätte *nicht* funktioniert, wenn wir bosonisch quantisiert hätten \Rightarrow **Spin-Statistik-Theorem**: ganz- (halb-) zahliger Spin \Rightarrow Bosonen (Fermionen)

Quantisiertes Dirac-Feld

► Ladung

- Noether von globaler Phasenänderungstransformation

$$\mathbf{Q} = q \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} : \Psi^\dagger \Psi := q \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} [\mathbf{N}_{a,\sigma}(\vec{p}) - \mathbf{N}_{b,\sigma}(\vec{p})]$$

- Übrige Erhaltungsgrößen, C, P, T \Rightarrow Übungen

► Ergebnis

- Gesamt-Energie, -Impuls, -Drehimpuls, Energieschwerpunkt:
erzeugen **unitäre** Darstellung der eigentlich orthochronen Poincaré-Gruppe

Bibliography

- [BD65] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), <https://doi.org/10.1142/9371>.
- [LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).
- [PS95] M. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts (1995).
- [SU01] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativity, Groups, Particles*, Springer, Wien (2001).
- [Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press (1995).

Bibliography

- [Wig39] E. P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *Annals of Mathematics* **40**, 149 (1939),
[https://doi.org/10.1016/0920-5632\(89\)90402-7](https://doi.org/10.1016/0920-5632(89)90402-7).