Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik
Vorlesung 7: Darstellungen der Lorentz-Gruppe, Weyl- und Dirac-Fermionen

Hendrik van Hees

24. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Literatur: [Col18, Wei95, SU01, LL91]

Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

- eigentlich brauchen wir unitäre Darstellungen der Poincarégruppe
- Raum-Zeit-Translationen: alle Felder Skalare
- kanonische Feldquantisierung: über Energie- und Impuls via Noether
- Lorentz-Gruppe: eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe $\mathrm{SO}(1,3)^{\uparrow}$
- diskrete Symmetrien CPT: modellabhängig!
- für QED und QCD: mindestens Raumspiegelungs-Invarianz (es sind aber C, P und T alle separat Symmetrien)
- schwache Wechselwirkung: verletzt alle diskreten Symmetrien bis auf CPT (muss erfüllt sein gemäß CPT-Theorem)
- Lie-Algebra der $\mathrm{SO}(1,3)^{\uparrow}$
  - kann alle $\hat{\Lambda}$ durch Boosts und Drehungen zusammensetzen: $\hat{\Lambda} = \hat{B}(\eta,\vec{n})\hat{R}(\varphi,\vec{n}')$
  - Beweis: schreibe $\hat{\Lambda} = (\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad {\Lambda^0}_0 = {e_0}^0 > 1, \quad \det\hat{\Lambda} = +1.$$

  - Boost:

$$\hat{B}(\eta,\vec{n}) \equiv \hat{B} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \vec{n}^{\mathrm{T}}\sinh\eta \\ \vec{n}\sinh\eta & (\cosh\eta - 1)\vec{n}\vec{n}^{\mathrm{T}} + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}, \quad \eta = \operatorname{artanh} v, \quad \hat{B}^{-1} = \hat{B}(-\eta,\vec{n}),$$

$$\hat{B}^{-1}\hat{\Lambda} = (\hat{B}^{-1}\underline{e}_0, \hat{B}^{-1}\underline{e}_1, \hat{B}^{-1}\underline{e}_2, \hat{B}^{-1}\underline{e}_3)$$

  - setze $\vec{n} = \vec{e}_0/|\vec{e}_0| \Rightarrow$

$$\underline{e}_0' = \hat{B}^{-1}\underline{e}_0 = \begin{pmatrix} \cosh\eta\, {e_0}^0 - \sinh\eta\, \vec{n}\cdot\vec{e}_0 \\ -\sinh\eta\, {e_0}^0\vec{n} + (\cosh\eta - 1)(\vec{n}\cdot\vec{e}_0)\vec{n} + \vec{e}_0 \end{pmatrix}.$$

  - setze $\vec{e}_0' = 0 \Rightarrow$ mit $\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{e}_0) = \vec{e}_0$

$$\cosh\eta|\vec{e}_0| - {e_0}^0\sinh\eta = 0 \Rightarrow \tanh\eta = \frac{|\vec{e}_0|}{{e_0}^0}.$$

- wegen ${e_0}^0 = \sqrt{1+\vec{e}_0^2}$ ist $\eta \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{e}'_0 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}} \Rightarrow$

$$\hat{\Lambda}' = \hat{B}^{-1}\hat{\Lambda} = \left(\underline{e}'_0, \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\right) \Rightarrow e'^{0}_j = \underline{e}'_0 \cdot \underline{e}'_j = 0$$

- damit $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$ und $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \det \hat{\Lambda}' = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \hat{\mathscr{R}} \in \mathrm{SO}(3)$

$$\hat{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^{\mathrm{T}} \\ \vec{0} & \hat{\mathscr{R}}^{-1} \end{pmatrix},$$

  so dass $\hat{R}^{-1}\hat{\Lambda}' = \hat{R}^{-1}\hat{B}^{-1}\hat{\Lambda} = \mathbb{1}_4 \Rightarrow$

$$\hat{\Lambda} = \hat{B}(\eta, \vec{n})\hat{R}(\varphi, \vec{n}').$$

- Infinitesimale Erzeugende (Lie-Algebra)
  - endliche Boosts und Drehungen

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \vec{n}^{\mathrm{T}} \sinh\eta \\ \vec{n}\sinh\eta & (\cosh\eta - 1)\vec{n}\vec{n}^{\mathrm{T}} + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^{\mathrm{T}} \\ \vec{0} & \vec{n}\vec{n}^{\mathrm{T}} + (\mathbb{1}_3 - \vec{n}\vec{n}^{\mathrm{T}})\cos\varphi + \vec{n}\cdot\hat{\vec{\epsilon}}\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

  mit

$$(\hat{\epsilon}^j)^{ik} = \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik}.$$

  - für kleine $\delta\eta$ bzw. $\delta\varphi$ ist

$$\hat{B} = \mathbb{1}_4 + \mathrm{i}\delta\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}, \quad \hat{R} = \mathbb{1}_4 - \mathrm{i}\delta\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}.$$

  mit

$$\vec{k} = -\mathrm{i}\mathrm{d}_\eta \hat{B}|_{\eta=0} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^{\mathrm{T}} \\ \vec{n} & 0_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}^j = \mathrm{i}\mathrm{d}_\varphi \hat{R}_{\varphi=0} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^{\mathrm{T}} \\ \vec{0} & \hat{\epsilon}^j \end{pmatrix}$$

  - Kommutatoren (direkt nachrechnen)

$$\left[\hat{k}^a, \hat{k}^b\right] = -\mathrm{i}\epsilon^{abc}\hat{s}^c, \quad \left[\hat{s}^a, \hat{s}^b\right] = +\mathrm{i}\epsilon^{abc}\hat{s}^c, \quad \left[\hat{k}^a, \hat{s}^b\right] = \left[\hat{s}^a, \hat{k}^b\right] = \mathrm{i}\epsilon^{abc}\hat{k}^c.$$

  - Boosts bilden keine Untergruppe und sind i.a. *nicht* kommutativ
  - Hintereinanderausführung zweier drehungsfreier(!) Boosts in verschiedenen Richtungen *nicht* drehungsfrei
  - nur zwei Boosts in gleicher Richtung bilden abelsche Untergruppe mit

$$\hat{B}(\eta_1, \vec{n})\hat{B}(\eta_2, \vec{n}) = \hat{B}(\eta_1 + \eta_2, \vec{n}).$$

- Bestimmung der (irreduziblen) Darstellungen
  - definiere „Pseudospins“
$$\hat{a}^j = \frac{1}{2}\left(\hat{s}^j + \mathrm{i}\hat{k}^j\right), \quad \hat{b}^j = \frac{1}{2}\left(\hat{s}^j - \mathrm{i}\hat{k}^j\right)$$
  - Kommutatoren (einfach direkt nachrechnen!)
$$\left[\hat{a}^j, \hat{a}^k\right] = \mathrm{i}\epsilon^{jkl}\hat{a}^l, \quad \left[\hat{a}^j, \hat{a}^k\right] = \mathrm{i}\epsilon^{jkl}\hat{a}^l, \quad \left[\hat{a}^j, \hat{b}^k\right] = 0.$$
  - $\Rightarrow \hat{\vec{a}}$ und $\hat{\vec{b}}$ erfüllen Kommutatorrelationen für zwei unabhängige Spins
  - alle (endlichdimensionalen) irreduziblen Darstellungen aus QM bekannt:
$$\begin{aligned}
&\hat{\vec{a}}^2 |s_a, m_a\rangle = s_a(s_a+1)|s_a, m_a\rangle, \quad \hat{a}^3 |s_a, m_a\rangle = m_a |s_a, m_a\rangle, \\
&\hat{\vec{b}}^2 |s_b, m_b\rangle = s_b(s_b+1)|s_b, m_b\rangle, \quad \hat{b}^3 |s_b, m_b\rangle = m_b |s_b, m_b\rangle \\
&\qquad \text{mit} \quad s_a, s_b \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \ldots\}, \\
&\qquad\qquad m_a \in \{-s_a, -s_a+1, \ldots, s_a-1, s_a\}, \quad m_b \in \{-s_b, -s_b+1, \ldots, s_b-1, s_b\}.
\end{aligned}$$
  - o.B.d.A: wie in QM können Pseudospins hermitesch gewählt werden: $\hat{a}^{j\dagger} = \hat{a}^j$, $\hat{b}^{j\dagger} = \hat{b}^j$
  - entspricht unitären Darstellungen der Drehgruppe SO(3) (ganzzahlige s_a bzw. s_b) bzw. der SU(2) (halbzahlige s_a, s_b)
- Bestimmung der (irreduziblen) Darstellungen
  - jede irreduzible Darstellung der $\mathrm{so}(1,3)^{\uparrow}$ eindeutig bestimmt durch Paar von Pseudospinquantenzahlen (s_a, s_b)
  - dann
$$\hat{s}^j = \hat{a}^j + \hat{b}^j, \quad \hat{k}^j = -\mathrm{i}(\hat{a}^j - \hat{b}^j)$$
  - wirken auf Vektoren im Kronecker-Produktraum
  - Basisvektoren
$$|m_a, m_b\rangle = |m_a\rangle \otimes |m_b\rangle$$
  - für $s_b = 0$: $|m_a, m_b\rangle \equiv |m_a\rangle$
  - (s_a, s_b)-Darstellung ist $(2s_a+1)(2s_1+a)$-dimensional

- (s_a, s_b)-Darstellung: Rotationsuntergruppe enthält irreduzible Spindarstellungen $s \in \{|s_a - s_b|, |s_a - s_b| + 1, \cdots, s_a + s_b\}$ (cf. Drehimpulsaddition in QM)

- $\hat{s}^j$ hermitesch $\Rightarrow$ Rotationsuntergruppe der $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ wird unitär dargestellt
- $\hat{k}^{j\dagger} = -\hat{k}^j$: Boosts werden nicht unitär dargestellt
- $\Rightarrow$ es gibt keine endlichdimensionalen unitären Darstellungen der $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ (außer der trivialen $(0,0)$-Darstellung)
- für Spin $s \geq 1/2$: schließt a priori „relativistische Quantenmechanik" a la 1. Quantisierung aus!
- $(0,0)$-Darstellung führt auf Klein-Gordon-Felder/Teilchen
- vorige Vorlesung: in 1. Quantisierung keine positiv definite Ladungsdichte, die man à la Born als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren könnte!

• „kaonisch quantisiertes" Klein-Gordon-Feld führt auf Vielteilchenquantentheorie für Spin-0-Teilchen

• Poincaré-Symmetrie (Raumzeit-Translationen und $\mathrm{SO}(1,3)^\dagger$, also Drehungen und Boosts) als unitäre Darstellung realisiert

• diskrete Symmetrien C, P, T (nur durch schwache Wechselwirkung verletzt

• CPT für lokale relativistische QFTn stets Symmetrie

2 Spin 1/2: Weyl- und Dirac-Spinoren

Spin 1/2: Weyl- und Dirac-Fermionen

Literatur: [Col18, PS95, Wei95, SU01, LL91]

Spin-1/2-Darstellungen

- einfachste Darstellungen mit Spin 1/2: (1/2,0) und (0,1/2)
- enthalten nur Spin 1/2
- im Folgenden: (1/2,0)-Darstellung linkshändige Weyl-Spinoren (0,1/2)-Darstellung rechtshändige Weyl-Spinoren
- Linkshändige Weyl-Spinoren
  - Generatoren für Boosts und Drehungen:

$$\hat{a}_{\mathrm{L}}^{j} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{j}, \quad \hat{b}_{\mathrm{L}}^{j} = 0 \Rightarrow \hat{k}_{\mathrm{L}}^{j} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\sigma}^{j}, \quad \hat{s}^{j} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{j}.$$

  - Pauli-Matrizen

$$\hat{\sigma}^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  - Eigenschaften der Pauli-Matrizen (direkt nachrechnen)

$$\hat{\sigma}^{j\dagger} = \hat{\sigma}^{j}, \quad \mathrm{Tr}\,\hat{\sigma}^{j} = 0, \quad \left[\hat{\sigma}^{j}, \hat{\sigma}^{k}\right] = 2\mathrm{i}\epsilon^{jkl}\hat{\sigma}^{l}, \quad \left\{\hat{\sigma}^{j}, \hat{\sigma}^{k}\right\} = 2\delta^{jk}, \quad \mathrm{Tr}(\hat{\sigma}^{j}\hat{\sigma}^{k}) = 2\delta_{jk}.$$

- Endliche Boosts und Drehungen
  - Boosts und Drehungen $\Rightarrow$ wegen $(\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}})^2 = \vec{n}^2 = 1$ kann Exponentialreihe leicht ausgewertet werden:

$$\hat{D}_{B,\mathrm{L}} = \exp(\mathrm{i}\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}_{\mathrm{L}}) = \exp\left(\frac{\eta}{2}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right) = \mathbb{1}_2\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) + \vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right),$$
$$\hat{D}_{R,\mathrm{L}} = \exp(-\mathrm{i}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}_{\mathrm{L}}) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right) = \mathbb{1}_2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \mathrm{i}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

- Rechtshändige Weyl-Spinoren
  - Generatoren für Boosts und Drehungen:

$$\hat{a}_{\mathrm{L}}^{j} = 0, \quad \hat{b}_{\mathrm{L}}^{j} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{j} \Rightarrow \hat{k}_{\mathrm{R}}^{j} = +\frac{\mathrm{i}}{2}\hat{\sigma}^{j}, \quad \hat{s}_{\mathrm{R}}^{j} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^{j}.$$

- Boosts und Drehungen

$$\hat{D}_{B,\mathrm{R}} = \exp(\mathrm{i}\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}_\mathrm{R}) = \exp\left(-\frac{\eta}{2}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right) = \mathbb{1}_2\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - \vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right),$$
$$\hat{D}_{R,\mathrm{R}} = \exp(-\mathrm{i}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{s}}_\mathrm{R}) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right) = \mathbb{1}_2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \mathrm{i}\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

- Raumspiegelungen: Parität
  - elektromagnetische und starke Wechselwirkungen: spiegelsymmetrisch $\Rightarrow$ brauche Raumspiegelungen als Symmetrieoperator
  - nehme an, $\hat{P} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) = \hat{P}^{-1}$ wird in Darstellungen linear (im Feldformalismus unitär) dargestellt
  - $\hat{D}_P\hat{D}(\hat{\Lambda})\hat{D}_P^{-1} = \hat{D}(\hat{P}\hat{\Lambda}\hat{P})$
  - für infinitesimale Boosts und Drehungen (direkt nachrechnen)

$$\hat{P}\hat{\vec{k}}\hat{P} = -\hat{\vec{k}}, \quad \hat{P}\hat{\vec{s}}\hat{P} = \hat{\vec{s}}$$

  - Anschauung: Boost in Richtung von Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen $\Rightarrow \hat{\vec{k}}$ transformiert sich unter Spiegelungen wie Geschwindigkeiten $\vec{v} \to -\vec{v} \Rightarrow \hat{\vec{k}}$ ist polarer Vektor $\hat{\vec{s}}$ transformiert sich wie Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p} \to +\vec{L} \Rightarrow \hat{\vec{s}}$ ist axialer Vektor

- Parität und Weyl-Spinoren
  - Verhalten unter Raumspiegelungen wie für Operatoren im Minkowski-Raum („fundamentale Darstellung“)

$$\hat{D}_P\hat{D}_{B,\mathrm{R/L}}\hat{D}_P^{-1} = \hat{D}_P\exp(\mathrm{i}\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}_\mathrm{L/R})\hat{D}_P^{-1} = \exp(-\mathrm{i}\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}_\mathrm{L/R}) = \exp(+\mathrm{i}\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}_\mathrm{R/L})$$

  - für Theorien mit Raumspiegelsymmetrien braucht man Spinorfelder mit rechts- **und** linkshändigen Weyl-Spinoren
  - irreduzible Darstellung mit Spin 1/2 für $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ und $\hat{P} \Rightarrow \mathrm{O}(1,3)^\uparrow$: $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$
  - vierkomponentige Bispinoren = Dirac-Spinoren

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\mathrm{L}\\ \psi_\mathrm{R}\end{pmatrix}, \quad \hat{D}_P\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\mathrm{R}\\ \psi_\mathrm{L}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Psi = \hat{\gamma}^0\Psi$$

- Raumspiegelung vertauscht links- und rechtshändige Weyl-Spinoren
- wie bei Händen: im Spiegel wird eine linke zu einer rechten Hand
- Eigenschaft wird „Händigkeit“ oder Chiralität genannt

- Generatoren für Lorentz-Transformationen für Dirac-Spinoren

$$\hat{\vec{k}}_{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -\hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\vec{s}}_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}.$$

- Pseudo-Hermitezität:

$$\hat{\gamma}^0 \hat{\vec{k}}_{\mathrm{D}}^{\dagger} \hat{\gamma}^0 = \hat{\vec{k}}_{\mathrm{D}}, \quad \hat{\gamma}^0 \hat{\vec{s}}_{\mathrm{D}}^{\dagger} \hat{\gamma}^0 = \hat{\vec{s}}_{\mathrm{D}}^{\dagger} = \hat{\vec{s}}_{\mathrm{D}}.$$

- endliche Boosts und Drehungen pseudo-unitär:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{B,\mathrm{D}}^{\dagger} \hat{\gamma}^0 &= \hat{\gamma}^0 \exp(-\mathrm{i}\vec{\eta} \cdot \hat{\vec{k}}_{\mathrm{D}}) \hat{\gamma}^0 = \exp(-\mathrm{i}\vec{\eta} \cdot \hat{\vec{k}}_{\mathrm{D}}) = \hat{D}_{B,\mathrm{D}}^{-1}, \\ \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{R,\mathrm{D}}^{\dagger} \hat{\gamma}^0 &= \hat{\gamma}^0 \exp(+\mathrm{i}\vec{\varphi} \cdot \hat{\vec{s}}_{\mathrm{D}}) \hat{\gamma}^0 = \exp(\mathrm{i}\vec{\varphi} \cdot \hat{\vec{s}}_{\mathrm{D}}) = \hat{D}_{R,\mathrm{D}}^{-1}. \end{aligned}$$

- Dirac-Darstellung aller Lorentz-Transformationen pseudounitär
- Parität:

$$\hat{D}_{P,\mathrm{D}} = \hat{\gamma}^0 \Rightarrow \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{P,\mathrm{D}}^{\dagger} \hat{\gamma}^0 = (\hat{\gamma}^0)^3 = \hat{\gamma}^0 = \hat{D}_{P,\mathrm{D}}^{-1}.$$

- Invariante Sequilinear-Formen
  - um Lagrangians für freie Weyl- oder Dirac-Felder zu konstruieren ⇒ benötige Sesquilinear-Formen aus Spinoren, die sich wie Lorentz-Skalare bzw. -Tensoren transformieren
  - müssen Ableitungen ∂_μ enthalten, das sich wie (kovariante) Vektorkomponenten Transformiert
  - Transformationsverhalten von adjungierten Weyl-Spinoren
    * Boosts ⇒ wegen $\hat{\sigma}^{j\dagger} = \hat{\sigma}^j$:

$$\psi_{\mathrm{L/R}} \underset{\hat{B}}{\longrightarrow} \exp\left(\pm\eta\vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right)\psi_{\mathrm{L/R}} \Rightarrow \psi_{\mathrm{L/R}}^{\dagger} \underset{\hat{B}}{\longrightarrow} \psi_{\mathrm{L/R}}^{\dagger} \exp\left(\pm\eta\vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right).$$

    * invariant („skalar“) sind also Ausdrücke wie $\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}}$ und $\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}}$

* für Dirac-Spinoren ist

$$\Psi^\dagger \hat{\gamma}^0 \Psi = \overline{\Psi}\Psi$$

Skalar unter Boosts

- Drehungen

$$\psi_{\mathrm{L/R}} \underset{\hat{R}}{\longrightarrow} \exp\left(-\mathrm{i}\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right) \psi_{\mathrm{L/R}} \Rightarrow \psi^\dagger_{\mathrm{L/R}} \underset{\hat{R}}{\longrightarrow} \psi^\dagger_{\mathrm{L/R}} \exp\left(+\mathrm{i}\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right).$$

- alle Kombinationen von links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren $\psi^\dagger\psi$ sind „skalar unter Drehungen“, also auch diejenigen, die auch Skalare unter Boosts sind

- Vierervektoren
  - für Weylspinoren beider Art

$$\vec{V} = \psi^\dagger \hat{\vec{\sigma}} \psi$$

Vektor unter Drehungen

  - Beweis (es genügen infintesimale Trafos!): mit $\delta\vec{\varphi} = \vec{n}\delta\varphi$

$$\delta\vec{V} = \frac{\mathrm{i}}{2}\delta\varphi_a \psi^\dagger \left[\hat{\sigma}^a, \hat{\vec{\sigma}}\right]\psi = \delta\vec{\varphi} \times \vec{V}$$

  - für Boosts: brauche vierte „Pauli-Matrix„ $\hat{\sigma}^0$ als „Zeitkomponente“ $\Rightarrow$ ändert sich nicht unter Drehungen $\Rightarrow \hat{\sigma}^0 = \mathbb{1}_2$
  - betrachte

$$V^\mu_{\mathrm{L/R}} = \psi^\dagger_{\mathrm{L/R}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \eta_{\mathrm{L/R}} \hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \psi_{\mathrm{L/R}}$$

  - transformiert sich als Vektor unter Drehungen (s.o.)
  - infinitesimaler Boost: $\delta\vec{\eta} = \delta\eta\vec{n}$

$$\delta V^\mu_{\mathrm{L/R}} = \psi^\dagger_{\mathrm{L/R}} \begin{pmatrix} \pm\delta\vec{\eta} \cdot \hat{\vec{\sigma}} \\ \pm\eta_{\mathrm{L/R}}\delta\vec{\eta} \end{pmatrix} \psi_{\mathrm{L/R}} = \begin{pmatrix} \pm\delta\vec{\eta} \cdot \vec{V}/\eta_{\mathrm{L/R}} \\ \pm\delta\vec{\eta} V^0 \eta_{\mathrm{L/R}} \end{pmatrix}.$$

  - infinitesimaler Lorentz-Boost $\Rightarrow \eta_{\mathrm{L/R}} = \pm 1$.

- es sind also

$$\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}}, \quad \psi_{\mathrm{R}}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ -\hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \psi_{\mathrm{R}}$$

  Vierervektoren

- Dirac-Spinoren

$$\Psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 \\ \mathrm{diag}(\hat{\vec{\sigma}}, -\hat{\vec{\sigma}}) \end{pmatrix} \Psi = \overline{\Psi} \hat{\gamma}^0 \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 \\ \mathrm{diag}(\hat{\vec{\sigma}}, -\hat{\vec{\sigma}}) \end{pmatrix} \Psi = \underline{e}_\mu \overline{\Psi} \hat{\gamma}^\mu \Psi$$

- Dirac-Matrizen (chirale Darstellung)

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^j = \hat{\gamma}^0 \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^j & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}^j \\ \hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}.$$

- Eigenschaften der Dirac-Matrizen

$$\gamma^{\hat{0}\dagger} = \hat{\gamma}^0, \quad \hat{\gamma}^{j\dagger} = -\hat{\gamma}^j, \quad \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

• Lorentz-kovariante Sesquilinearformen

  - Transformationsverhalten mit Dirac-Matrix-Algebra und Pseudounitarität aller Lorentz-Transformationen und Raumspiegelungen (also alle Dirac-Darstellungsmatrizen der $\mathrm{O}(1,3)^\uparrow$):

$$\Psi' = \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} \Psi \Rightarrow \overline{\Psi}' = \Psi^\dagger \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^\dagger \hat{\gamma}^0 = \overline{\Psi} \hat{\gamma}^0 \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^\dagger \hat{\gamma}^0 = \overline{\Psi} \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1}.$$

  - Skalar: $\overline{\Psi}\Psi$

$$\overline{\Psi}' \Psi' = \overline{\Psi} \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1} \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} \Psi = \overline{\Psi}\Psi.$$

  - Vierervektor $\overline{\Psi}\hat{\gamma}^\mu\Psi$

$$\overline{\Psi}' \hat{\gamma}^\mu \overline{\Psi} = \overline{\Psi} \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} \Psi$$

  - $\Rightarrow$ Transformationsverhalten der Dirac-Matrizen

$$\hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} = \Lambda^\mu{}_\nu \hat{\gamma}^\nu.$$

  - Tensoren höherer Stufe (Bsp. zweiter Stufe)

$$\hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} = \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1} \hat{\gamma}^\mu \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}}^{-1} \hat{\gamma}^\nu \hat{D}_{\Lambda,\mathrm{D}} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \hat{\gamma}^\rho \hat{\gamma}^\sigma$$

- Irreduzible Teile
  - aus Ψ lassen sich offenbar $4\times 4 = 16$ unabhängige Sesquilinearformen $\overline{\psi}\hat{\Gamma}\psi$ bilden
  - für Lagrangian: reelle Sesquilinerformen $\Rightarrow \hat{\Gamma}$ pseudo-hermitesch:

$$(\overline{\Psi}\hat{\Gamma}\Psi)^* = \Psi^\dagger\hat{\Gamma}^\dagger\overline{\Psi}^\dagger = \overline{\Psi}\gamma^0\hat{\Gamma}^\dagger\gamma^{0\dagger}\Psi = \overline{\Psi}\gamma^0\hat{\Gamma}^\dagger\gamma^0\Psi = \overline{\Psi}\hat{\Gamma}\Psi.$$

  - bereits identifiziert: Skalar (1) und Vierervektor (4)
  - Tensor 2. Stufe: Zerlegung in symmetrischen und antisymmetrischen Teil

$$\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}^\nu = \frac{1}{2}\left\{\hat{\gamma}^\mu,\hat{\gamma}^\nu\right\} + \frac{1}{2}\left[\hat{\gamma}^\mu,\hat{\gamma}^\nu\right] = g^{\mu\nu} - \mathrm{i}\hat{\sigma}^{\mu\nu}$$

  - symmetrischer Teil gibt wieder Skalar
  - antisymmetrischer Teil ist unabhängig von Skalar und Vektor $\Rightarrow$ antisymmetrischer Tensor 2. Stufe (6 unabhängige Komponenten)

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\hat{\gamma}^\mu,\hat{\gamma}^\mu\right], \quad \hat{\gamma}^0\hat{\sigma}^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 = \hat{\sigma}^{\mu\nu} \Rightarrow \overline{\Psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\Psi = (\overline{\Psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\Psi)^*.$$

  - Tensor 3. Stufe: $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$
    * kann nur neues geben, wenn alle drei Indizes verschieden sind. Andernfalls wegen Antivertauschbarkeit von Diracmatrizen mit verschiedenen Indizes und $(\hat{\gamma}^\mu)^2 = \pm 1$ nur wieder Vektor
    * Falls alle 3 Indizes verschieden $\Rightarrow$ total antisymmetrischer Tensor
    * umkehrbar eindeutig auf Axial-Vektor abbildbar

$$\hat{A}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\rho\hat{\gamma}_\sigma = \hat{\gamma}^\mu\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\hat{\gamma}_\alpha\hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\rho\hat{\gamma}_\sigma$$

    * definiere

$$\frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\rho\hat{\gamma}_\sigma = \hat{\gamma}_0\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3 = -\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3 = -\mathrm{i}\hat{\gamma}_5 \Rightarrow \hat{\gamma}_5 = -\mathrm{i}\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

    * Da $\hat{\gamma}^\mu$ wie Vektor transformiert (auch unter Spiegelungen) aber $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ zwar invarianter Tensor unter SO(1,3)-Trafos ist, aber unter Spiegelungen wegen $\det\hat{P} = -1$ Vorzeichen wechselt, transformiert $\hat{\gamma}_5$ unter $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$-Trafos wie Skalar, wechselt aber Vorzeichen unter Spiegelungen $\Rightarrow$ $\hat{\gamma}_5$ ist Pseusoskalar

* Eigenschaften

$$(\mathrm{i}\hat{\gamma}_5)^\dagger = -\mathrm{i}\hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}^0(\mathrm{i}\hat{\gamma}_5)^\dagger\hat{\gamma}^0 = \mathrm{i}\hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}_5^2 = \mathbb{1}_4, \quad \hat{D}_{P,\mathrm{D}}\hat{\gamma}_5\hat{D}_{P,\mathrm{D}} = \hat{\gamma}^0\hat{\gamma}_5\hat{\gamma}^0 = -\hat{\gamma}_5, \quad \hat{\gamma}_5\hat{\gamma}^\mu = -\hat{\gamma}^\mu\hat{\gamma}_5.$$

* Projektion auf links- und rechtshändige Anteile des Dirac-Spinors

$$\frac{1-\hat{\gamma}^5}{2}\Psi = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi_\mathrm{L}, \quad \frac{1+\hat{\gamma}^5}{2}\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \Psi_\mathrm{R}.$$

- damit alle 16 reellen irreduziblen Lorentz-kovarianten Sesquilinearformen:

  $\overline{\Psi}\Psi:$ Skalar (1 Komponente)

  $\mathrm{i}\overline{\Psi}\hat{\gamma}_5\Psi:$ Pseudoskalar (1 Komponente)

  $\overline{\Psi}\hat{\gamma}^\mu\Psi:$ Vierervektor (4 Komponenten)

  $\overline{\Psi}\hat{\gamma}^5\hat{\gamma}^\mu\Psi:$ Pseudovierervektor (4 Komponenten)

  $\overline{\Psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\Psi:$ antisymmetrischer Tensor 2. Stufe (6 Komponenten)

• für später wichtig: endlicher Boost in Dirac-Matrizenschreibweise

$$\begin{aligned}\hat{D}_{B,\mathrm{D}} &= \exp(\mathrm{i}\eta\vec{n}\cdot\hat{\vec{k}}_\mathrm{D}) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2)\mathbb{1}_2 + \sinh(\eta/2)\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \cosh(\eta/2)\mathbb{1}_2 - \sinh(\eta/2)\vec{n}\cdot\hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \\ &= U_\mu\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{pmatrix} U_0\mathbb{1}_2 + \vec{U}\cdot\hat{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & U_0\mathbb{1}_2 - \vec{U}\cdot\hat{\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{U} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \vec{n}\sinh(\eta/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

• $\Rightarrow$

$$\hat{D}_{B,\mathrm{D}} = U_\mu\gamma^\mu\gamma^0 \quad \text{mit} \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \vec{n}\sinh(\eta/2) \end{pmatrix}.$$

• Äquivalente Darstellungen der Dirac-Algebra

- die Antikommutatorrelationen $\left\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\right\} = 2\eta^{\mu\nu}$ bleiben unter beliebigen Ähnlichkeitstransformationen erhalten: $\hat{\tilde{\gamma}}^\mu = \hat{T}\hat{\gamma}^\mu\hat{T}^{-1}$
- damit Relationen zwischen $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ und $\hat{\vec{k}}_\mathrm{D}$ und $\hat{\vec{s}}_\mathrm{D}$ so erhalten bleiben, dass $\hat{\vec{s}}_\mathrm{D}$ unitär und $\hat{\vec{k}}_\mathrm{D}$ antiunitär bleibt $\Rightarrow$ $\hat{T} = \hat{U}$ muss unitär sein
- neue Dirac-Spinoren: $\tilde{\Psi} = \hat{U}\Psi$

- andere verbreitete Konventionen
  - unsere bislang verwendete chirale Darstellung ist Konvention wie in [LL91]
  - Konvention für chirale Darstellung in z.B. [PS95]: $\hat{U} = \hat{\gamma}^0$

$$\tilde{\gamma}^0 = \hat{\gamma}^0, \quad \tilde{\gamma}^j = -\hat{\gamma}^j, \quad \tilde{\gamma}_5 = -\hat{\gamma}_5$$

  - „Standarddarstellung“ (z.B. [BD65])

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^j \\ -\hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix} = -\hat{\gamma}^j.$$

  - Vorteil: Paritätseigenzustände $\Rightarrow$ die beiden oberen (unteren) Spinkomponenten entsprechen Parität +1 (-1)

3 Spin 1/2 + Parität: Quantisiertes Dirac-Feld

Spin 1/2 + Parität: Quantisiertes Dirac-Feld

Literatur: [Col18, PS95, Wei95, SU01, LL91]

Quantisiertes Dirac-Feld

- historische Idee Diracs: finde Wellengleichung mit nur 1. Ableitungen
- Motivation: löst Problem mit nicht positiv definierter erhaltener Ladung (wie bei nichtrelativistischer Schrödinger-Gleichung!)
- moderner Zugang: verwende obige Analyse der Darstellungen der $O(1,3)^{\uparrow}$
- such reelle Lagrangefunktion für freies Diracfeld Ψ mit nur einer Ableitung
- Raumspiegelung $\hat{P}$ soll Symmetrie sein
  - zur Verfügung stehen die reellen Sesquilinearformen und der Einteilchen-Energie-Impulsoperator $\mathrm{i}\partial_\mu$
  - man kann nur den Vektorstrom mit dem polaren Vektor $\mathrm{i}\partial_\mu$ „überschieben"; mit Axialvektor wäre $\mathscr{L}$ nicht spiegelsymmetrisch
  - antisymmetrischer Tensor scheidet aus, weil man zusammen mit nur einem ∂_μ keinen Skalar erzeugen kann
  - für von ∂_μ freie Terme kommt nur der Skalar in Frage; Pseudoskalar bricht wieder Spiegelsymmetrie

$$\mathscr{L} = \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu}\Psi - m\overline{\Psi}\Psi$$

  - nützliche Abkürzung: Feyman-Dolch mit beliebigen Vektoren oder Vektoroperatoren: $A_\mu\hat{\gamma}^\mu = \not{A}$ oder $\partial_\mu\hat{\gamma}^\mu = \not{\partial}$
  - Feldgleichungen: Variiere Ψ und $\overline{\Psi}$ als unabhängige Felder (für die 2×4 reellen Feldfreiheitsgrade)
  - $\Rightarrow$ freie Dirac-Gleichung

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi = 0.$$

  - Gleichung für Dirac-adjungierte Funktion: adjungiere zunächst Dirac-Gleichung

$$\Psi^\dagger(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - m) = 0 \Rightarrow \overline{\Psi}\gamma^0(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - m) = 0 \Rightarrow \overline{\Psi}\gamma^0(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - m)\gamma^0 = \overline{\Psi}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0.$$

  - impliziert auch Gültigkeit der Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\mathrm{i}\not{\partial} + m)(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi = -(\not{\partial}^2 + m^2)\Psi = -(\Box + m^2)\Psi = 0.$$

- $\Rightarrow$ quantisierte Theorie beschreibt Spin-1/2=Teilchen und die dazugehörigen Antiteilchen mit Masse m.
- außer Raum-Zeit-Symmetrien (s. nächste Übung!) Lagrangian auch invariant unter globalen Phasenänderungen

$$\Psi' = \exp(-\mathrm{i}q\alpha)\Psi, \quad \overline{\Psi}' = \exp(+\mathrm{i}q\alpha)\Psi$$

- dazugehöriger erhaltener Noether-Strom

$$j^\mu = q\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi.$$

- checke Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = q[\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu + \left(\partial_\mu\gamma^\mu\overline{\Psi}\right)\Psi] = q\overline{\Psi}(-\mathrm{i}m + \mathrm{i}m)\Psi = 0.$$

- $j^0 = q\overline{\Psi}\gamma^0\Psi = q\Psi^\dagger\Psi$: für $q > 0$ positiv definit $\Rightarrow$ Diracs Idee hat funktioniert
- ABER: Probleme mit negativen Energien wie bei Klein-Gordon-Feld
- daher Feldquantisisierung

- Hamilton-Formalismus für „klassische“ Dirac-Feld
- vereinfacht sich mit etwas abgeänderter Lagrange-Dichte

$$\mathscr{L}' = \overline{\Psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\Psi$$

- äquivalent, weil Wirkung ungeändert, denn

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\mu\left(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right)$$

- unterscheidet sich nur um Viererdivergenz von der Form $\Omega^\mu(\Psi,\overline{\Psi})$
  * mit $\mathscr{L}'$ nur ein von 0 verschiedener Feldimpuls

$$\Pi = \frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial_{\partial_t\Psi}} = \mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma^0 = \mathrm{i}\Psi^\dagger$$

  * Hamilton-Dichte

$$\mathscr{H} = \Pi\partial_t\Psi - \mathscr{L}' = \mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma^0\partial_t\Psi - \mathscr{L}' = -\mathrm{i}\overline{\Psi}\partial_j\hat{\gamma}^j\Psi + m\overline{\Psi}\Psi$$

- * mit Dirac-Gleichung

$$\mathrm{i}(\gamma^0\partial_t+\gamma^j\partial_j)\Psi = m\Psi \Rightarrow (-\mathrm{i}\partial_j\gamma^j+m)\Psi = \mathrm{i}\gamma^0\partial_t\Psi \Rightarrow \mathscr{H} = \mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma^0\partial_t\Psi = \mathrm{i}\Psi^\dagger\partial_t\Psi.$$

- Quantisierung als Fermionen ⇒ gleichzeitige kanonische *Anti*kommutatoren:

$$\left\{\mathbf{\Psi}_a(t,\vec{x}),\mathbf{\Psi}_b(t,\vec{y})\right\} = 0, \quad \left\{\mathbf{\Psi}_a(t,\vec{x}),\mathbf{\Pi}_b(t,\vec{y})\right\} = \mathrm{i}\left\{\mathbf{\Psi}_a(t,\vec{x}),\mathbf{\Psi}_b^\dagger(t,\vec{y})\right\} = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

  * entwickele wieder nach Modenfunktionen positiver und negativer Frequenz (in manifest kovarianter Form)

$$U_{\vec{p},\sigma}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} u_\sigma(\vec{p})\exp(-\mathrm{i}\underline{p}\cdot\underline{x})\bigg|_{p^0=E_p},$$

$$V_{\vec{p},\sigma}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} v_\sigma(\vec{p})\exp(+\mathrm{i}\underline{p}\cdot\underline{x})\bigg|_{p^0=E_p}, \quad E_p = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}.$$

  * $u_\sigma(\vec{p})$ und $v_\sigma(\vec{p})$ geeignete Dirac-Spinoren, $\sigma \in \{1/2,-1/2\}$: Spin-Freiheitsgrade
  * wende gleich Feynman-Stückelberg-Trick an: Moden mit positiver (negativer) Frequenz mit Vernichtern $\mathbf{a}(\vec{p},\sigma)$ (Erzeugern $\mathbf{b}^\dagger(\vec{p},\sigma)$)
  * dabei $\sigma \in \{1/2,-1/2\}$ für $\hat{s}^3_{\mathrm{D}}$-Eigenwerte

$$\mathbf{\Psi}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\sum_\sigma\left[\mathbf{a}_\sigma(\vec{p})U_{\vec{p},\sigma}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger_\sigma(\vec{p})V_{\vec{p},\sigma}(\underline{x})\right]$$

  * Dirac-Gleichung: Teilchen- bzw. Antiteilchen-Dirac-Spinoren (im Folgenden immer „on-shell-Bedingung“ $p^0 = E_p$!)

$$(\not{p}-m)u_\sigma(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p}+m)v_\sigma(\vec{p}) = 0.$$

- Wigner-Basis [Wig39]

- irreduzible Darstellung der $O(1,3)^{\uparrow} \Rightarrow$ kann *alle* Zustände zu $\underline{p}$ mit $\underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 > 0$, also $p^0 = E_p$ durch Boosts aus den Zuständen zu $\vec{p} = 0$ erreichen:

$$\begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \hat{B} \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta\, \vec{n}^{\mathrm{T}} \\ \sin\eta\, \vec{n} & (\cosh\eta - 1)\vec{n}\,\vec{n}^{\mathrm{T}} + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\cosh\eta \\ m\sinh\eta\,\vec{n} \end{pmatrix}$$

  Setze $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}| \Rightarrow \eta = \operatorname{artanh}(|\vec{p}|/E_p) > 0$.
- Löse Gleichungen für die Dirac-Spinoren $u_\sigma(\vec{p})$ und $v_\sigma(\vec{p})$ bei $\vec{p} = 0$
- definiere dann

$$u_\sigma(\vec{p}) = \hat{D}_{B,\mathrm{D}}\, u_\sigma(\vec{0}), \quad v_\sigma(\vec{p}) = \hat{D}_{B,\mathrm{D}}\, v_\sigma(\vec{0}).$$

- da Drehungen $\vec{p} = 0$ ungeändert lassen $\Rightarrow$ Drehungen Standuntergruppe
- „Wigner's little group“ für massive Darstellungen $m > 0$
- wähle $u_\sigma(\vec{0})$ und $v_\sigma(\vec{0})$ als Eigenspinoren zu $\hat{s}^3_{\mathrm{D}}$ mit Eigenwerten $\sigma = \pm 1/2$
- dann nur diese Zustände zu $\vec{p} = \vec{0}$ haben definite spin-z-Komponente
- da $\hat{\vec{k}}_{\mathrm{D}}$ nicht mit $\hat{s}^3_{\mathrm{D}}$ vertauschen ist das nicht der Fall für die Zustände mit $\vec{p} \neq 0$
- Spin als intrinsische Teilcheneigenschaft: definiert im Ruhsystem des Teilchens!

- Konstruktion der $u_\sigma(\vec{p})$ und $v_\sigma(\vec{p})$
  - Gleichungen für beliebige $\underline{p}$ mit $\underline{p}^2 = m^2$:

$$(\not{p} - m)u_\sigma(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_\sigma(\vec{p}) = 0.$$

  - Gleichungen für $\vec{p} = 0 \Rightarrow \underline{p} = (m, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

$$\gamma^0 u_\sigma(\vec{0}) = u_\sigma(\vec{0}), \quad \gamma^0 v_\sigma(\vec{0}) = -v_\sigma(\vec{0}),$$

  - im Ruhsystem des Teilchens: Teilchen (Antiteilchen) haben Parität 1 (−1)

– bestimme die linear unabhängigen Lösungen als Eigenspinoren von $\hat{s}^3_{\mathrm{D}}$:

$$u_{1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} =: \sqrt{m}\,u'_{1/2}(0,+1/2), \quad u_{-1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} =: \sqrt{m}\,u'(0,-1/2),$$

$$v_{1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} =: \sqrt{m}\,v'(0,+1/2), \quad v_{-1/2}(\vec{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \sqrt{m}\,v'_{-1/2}(\vec{0}).$$

- Boost zu $\vec{p} \neq 0$-Zuständen

  – boost um $\eta = \operatorname{artanh}(|\vec{p}|/E_p)$ in Richtung von $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$

$$\begin{aligned} u_\sigma(\vec{p}) &= \hat{D}_{B,\mathrm{D}}\,u_\sigma(\vec{p}) = \not{U}\gamma^0\,u_\sigma(\vec{0}) = \not{U}\,u_\sigma(\vec{0}), \\ v_\sigma(\vec{p}) &= \hat{D}_{B,\mathrm{D}}\,v_\sigma(\vec{p}) = \not{U}\gamma^0\,v_\sigma(\vec{0}) = -\not{U}\,v_\sigma(\vec{0}), \\ \underline{U} &= \begin{pmatrix}\cosh(\eta/2)\\ \sinh(\eta/2)\vec{n}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

  – drücke Hyperbelfunktionen mit E_p und $|\vec{p}|$ aus

$$\cosh\eta = \frac{E_p}{m} = 2\cosh^2(\eta/2) - 1 \;\Rightarrow\; \cosh(\eta/2) = \sqrt{\frac{1+\cosh\eta}{2}} = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}},$$
$$\cosh\eta = \frac{E_p}{m} = 1 + 2\sinh^2(\eta/2) \;\Rightarrow\; \sinh(\eta/2) = \sqrt{\frac{\cosh\eta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{E_p-m}{2m}}.$$

  – NB:

$$|\vec{p}| = \sqrt{E_p^2 - m^2}$$

- Rechnung für $u_\sigma(\vec{p})$:

$$
\begin{aligned}
u_\sigma(\vec{p}) &= \left(\gamma^0\sqrt{\frac{E_p+m}{2m}} - \sqrt{\frac{E_p-m}{2m}}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\cdot\vec{\gamma}\right)u_\sigma(\vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(E_p+m)}}\left[(m+E)\gamma^0 - \vec{p}\cdot\gamma\right]u'_\sigma(\vec{0}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(E_p+m)}}\left[(m+E)\gamma^0 - \vec{p}\cdot\gamma\right]u'_\sigma(\vec{0}) \\
&= \sqrt{\frac{1}{2(E_p+m)}}(m+\not{p})u'_\sigma(0,\sigma)
\end{aligned}
$$

- analoge Rechung für $v_\sigma(\vec{p})$:

$$
v_\sigma(\vec{p}) = \sqrt{\frac{1}{2(E_p+m)}}(m-\not{p})v'_\sigma(0,\sigma)
$$

- Pseudoorthogonalitätsrelationen

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}_\sigma(\vec{p})u_{\sigma'}(\vec{p}) = 2m\delta_{\sigma,\sigma'}, \quad \overline{v}_\sigma(\vec{p})v_{\sigma'}(\vec{p}) = -2m\delta_{\sigma,\sigma'}, \\
&\overline{u}_\sigma(\vec{p})v_{\sigma'}(\vec{p}) = \overline{v}_\sigma(\vec{p})u_{\sigma'}(\vec{p}) = 0, \\
&u_\sigma(\vec{p})^\dagger u_{\sigma'}(\vec{p}) = 2E\delta_{\sigma\sigma'}, \quad v_\sigma(\vec{p})^\dagger v_{\sigma'}(\vec{p}) = 2E\delta_{\sigma\sigma'}, \\
&u_\sigma(\vec{p})^\dagger v(-\vec{p},\sigma') = v_\sigma(\vec{p})^\dagger u_{\sigma'}(-\vec{p}) = 0.
\end{aligned}
$$

- Spinsummen: Definiere

$$
\hat{A}(\vec{p}) = \sum_\sigma u_\sigma(\vec{p})\overline{u}_\sigma(\vec{p}), \quad \hat{B}(\vec{p}) = \sum_\sigma v_\sigma(\vec{p})\overline{v}_\sigma(\vec{p}).
$$

– Wirkung auf Basis $(u_\sigma(\vec{p}), v_\sigma(\vec{p})$: verwende Pseudoorthogonalitätsrelationen und $\not{p}\, u_\sigma(\vec{p}) = m\, u_\sigma(\vec{p})$, $\not{p}\, v_\sigma(\vec{p}) = -m\, u_\sigma(\vec{p})$

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) &= \sum_\sigma u_\sigma 2m \delta_{\sigma,\sigma'} = 2m\, u_{\sigma'}(\vec{p}) = (\not{p} + m) u_{\sigma'}(\vec{p}),\\
\hat{A}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) &= 0 = (\not{p} + m) v_{\sigma'}(\vec{p}),\\
\hat{B}(\vec{p}) u_{\sigma'}(\vec{p}) &= 0 = (\not{p} - m) u_{\sigma'}(\vec{p})\\
\hat{B}(\vec{p}) v_{\sigma'}(\vec{p}) &= -\sum_\sigma v_\sigma(\vec{p}) 2m \delta_{\sigma,\sigma'} = -2m\, v_{\sigma'}(\vec{p}) = (\not{p} - m) v_{\sigma'}(\vec{p});
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\hat{A}(\vec{p}) = \sum_\sigma u_\sigma(\vec{p}) \overline{u}_\sigma(\vec{p}) = \not{p} + m, \qquad \hat{B}(\vec{p}) = \sum_\sigma v_\sigma(\vec{p}) \overline{v}_\sigma(\vec{p}) = \not{p} - m,\\
&\hat{A}(\vec{p}) - \hat{B}(\vec{p}) = \sum_\sigma \left[u_\sigma(\vec{p}) \overline{u}_\sigma(\vec{p}) - v_\sigma(\vec{p}) \overline{v}_\sigma(\vec{p}) \right] = 2m\, \mathbb{1}_4.
\end{aligned}$$

– Orthonormiertheit der Modenfunktionen

$$\begin{aligned}
(U_{\vec{p},\sigma}, U_{\vec{p}',\sigma'}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, U^\dagger_{\vec{p},\sigma}(\underline{x}) U_{\vec{p}',\sigma'}(\underline{x}) = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),\\
(V_{\vec{p},\sigma}, V_{\vec{p}',\sigma'}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, U^\dagger_{\vec{p},\sigma}(\underline{x}) U_{\vec{p}',\sigma'}(\underline{x}) = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),\\
(V_{\vec{p},\sigma}, U_{\vec{p}',\sigma'}) &= (U_{\vec{p}',\sigma'}, V_{\vec{p},\sigma})^* = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, V^\dagger_{\vec{p},\sigma}(\underline{x}) U_{\vec{p}',\sigma'}(\underline{x}) = 0.
\end{aligned}$$

– damit und gleichzeitigen Antikommutaturrelationen der quantisierten Dirac-Felder

$$\begin{aligned}
&\left\{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{a}_{\sigma'}(\vec{p}')\right\} = \left\{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}_{\sigma'}(\vec{p}')\right\} = \left\{\mathbf{b}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}_{\sigma'}(\vec{p}')\right\} = \left\{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger_{\sigma'}(\vec{p}')\right\} = 0,\\
&\left\{\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger_{\sigma'}(\vec{p}')\right\} = \left\{\mathbf{b}_\sigma(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger_{\sigma'}(\vec{p}')\right\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}').
\end{aligned}$$

– in „Box-Regularisierung“ wie bei Klein-Gordon-Feld

$$\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \to \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \quad \vec{p} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$$

– Besetzungzahl- oder Fock-Zustände: simultane Eigenzustände für $\mathbf{N}_{a,\sigma}(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger_\sigma(\vec{p}) \mathbf{a}_\sigma(\vec{p})$ und $\mathbf{N}_{b,\sigma}(\vec{p}) = \mathbf{b}^\dagger_\sigma(vecp) \mathbf{b}_\sigma(\vec{p})$

- $N_{a/b,\sigma}(\vec{p}) \in \{0,1\}$, denn $\mathbf{a}_\sigma^{\dagger 2}(\vec{p}) = 0$ (wegen *Anti*kommutatorregeln) $\Rightarrow$ Pauli-Verbot

$$\left|\{N_{a,\sigma}(\vec{p}), N_{b,\sigma}(\vec{p})\}_{\sigma,\vec{p}}\right\rangle = \prod_{\sigma,\vec{p}} \mathbf{a}_\sigma^{\dagger N_{a,\sigma}(\vec{p})}(\vec{p})\mathbf{b}_\sigma^{\dagger N_{b,\sigma}(\vec{p})}(\vec{p})\,|\Omega\rangle$$

- Vakuumzustand

$$\mathbf{a}_\sigma(\vec{p})\,|\Omega\rangle = \mathbf{b}_\sigma(\vec{p})\,|\Omega\rangle = 0.$$

• Energie, Impuls, Drehimpuls und Ladung

- Normalordnung: bringe alle Erzeugungsoperatoren nach links alle Vernichtungsoperatoren nach rechts
- beinhaltet dabei das Vorzeichen der Permutation, um von ursprünglicher zur Normalordnung zu gelangen, z.B.

$$:\mathbf{a}_\sigma(\vec{p})\mathbf{a}^\dagger_{\sigma'}(\vec{p}\,') := -\mathbf{a}^\dagger_{\sigma'}(\vec{p}\,')\mathbf{a}_\sigma(\vec{p}).$$

• Energie (Hamilton-Operator): Noether bzgl. zeitlicher Translationsinvarianz

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathrm{i}:\mathbf{\Psi}^\dagger(\underline{x})\partial_t\mathbf{\Psi}(\underline{x}) := \sum_\sigma \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\,E_p[\mathbf{N}_{a,\sigma}(\vec{p}) + \mathbf{N}_{b,\sigma}(\vec{p})]$$

- Erhaltungsgröße
- positiv definit, Teilchenzahloperatoren haben die erwartete Bedeutung
- hätte *nicht* funktioniert, wenn wir bosonisch quantisiert hätten $\Rightarrow$ Spin-Statistik-Theorem: ganz- (halb-) zahliger Spin $\Rightarrow$ Bosonen (Fermionen)

• Ladung

- Noether von globaler Phasenänderungstransformation

$$\mathbf{Q} = q\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}:\mathbf{\Psi}^\dagger\mathbf{\Psi} := q\sum_\sigma \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}[\mathbf{N}_{a,\sigma}(\vec{p}) - \mathbf{N}_{b,\sigma}(\vec{p})]$$

• Übrige Erhaltungsgrößen, C, P, T $\Rightarrow$ Übungen

• Ergebnis

- Gesamt-Energie, -Impuls, -Drehimpuls, Energieschwerpunkt: erzeugen **unitäre** Darstellung der eigentlich orthochronen Poincaré-Gruppe

4 Bibliography

Bibliography

Literatur

[BD65] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).

[Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), `https://doi.org/10.1142/9371`.

[LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).

[PS95] M. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts (1995).

[SU01] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativity, Groups, Particles*, Springer, Wien (2001).

[Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press (1995).

[Wig39] E. P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, Annals of Mathematics **40**, 149 (1939), `https://doi.org/10.1016/0920-5632(89)90402-7`.