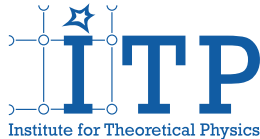


Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 2: Das Fermi-Gas-Modell

Hendrik van Hees

Goethe University Frankfurt



Outline

Quantenmechanik-Review

Teilchen im Kasten

Fermi-Gas-Modell für Kerne

Quantenmechanik-Review

Literatur: [ST93, Fic79]

Nichtrelativistische Quantenmechanik (Kinematik)

- ▶ (Reine) Zustände: Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ in **Hilbertraum** $\mathcal{H}$
- ▶ $\mathcal{H}$: komplexer Vektorraum mit **Skalarprodukt** $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$
- ▶ Observablen: **Selbstadjungierte** lineare Operatoren $\mathbf{A}:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}$, d.h. $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$; i.a. $\langle\psi_1|\mathbf{A}\psi_2\rangle = \langle\mathbf{A}^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$
- ▶ Mögliche **Messwerte**: Eigenwerte von $\mathbf{A}$; reell; Eigenvektoren orthonormiert

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \begin{cases} \delta_{a_1, a_2} & \text{für diskrete Eigenwerte,} \\ \delta(a_1 - a_2) & \text{für kontinuierliche Eigenwerte} \end{cases}$$

- ▶ zwei Observablen gleichzeitig scharf determinierbar, wenn $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 0$
- ▶ dann existieren **gemeinsame vollständige Eigensysteme von Eigenvektoren**
- ▶ $(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$: vollständiger Satz kompatibler Observabler $\Leftrightarrow |a_1, \dots, a_n\rangle$ **bis auf Phasenfaktor eindeutig bestimmt**
- ▶ Phasenfaktoren irrelevant

Nichtrelativistische Quantenmechanik (Kinematik)

- ▶ **Bornsche Regel:** falls System in Zustand $|\psi\rangle$ mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ präpariert, dann ist

$$P(a_1, \dots, a_n) = |\langle a_1, \dots, a_n | \psi \rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit (diskrete Eigenwerte) bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte (kontinuierliche Eigenwerte), die Werte $(a_1, \dots, a_n)$ zu erhalten

- ▶ Vollständigkeit der $|a_1, \dots, a_n\rangle \Rightarrow$ „**vollständiges Orthonormalsystem (VONS)**“

$$\sum \int d^n a |a_1, \dots, a_n\rangle \langle a_1, \dots, a_n| = \mathbb{1}$$

- ▶ selbstadjungierte Operatoren: **diskrete und kontinuierliche Eigenwerte**
- ▶ **Vollständigkeitsrelation:** Summe (Integral) über diskrete (kontinuierliche) Eigenwerte
- ▶ im kontinuierlichen Spektrum „auf δ -Distributionen normiert“

Nichtrelativistische Quantenmechanik (Dynamik)

- ▶ **Hamilton-Operator: $\mathbf{H}$** (repräsentiert Gesamtenergie des Systems)
- ▶ **Zeitentwicklung des Zustandes (Schrödinger-Bild)**

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = \mathbf{H} |\psi(t)\rangle$$

- ▶ Observablen-Operatoren **zeitunabhängig** (allenfalls „explizite Zeitabhängigkeit“)
- ▶ Falls $\mathbf{H}$ nicht explizit zeitabhängig

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\mathbf{H}t/\hbar) |\psi_0\rangle = \mathbf{U}(t) |\psi_0\rangle$$

- ▶ $\mathbf{U}$ unitär: $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$
- ▶ falls $|\psi_0\rangle = |E\rangle$ **Energieeigenzustand** zum Eigenwert E

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iEt/\hbar) |\psi_0\rangle$$

- ▶ Phasenfaktor irrelevant $\Rightarrow$ **Wahrscheinlichkeiten zeitunabhängig**

$$\begin{aligned} P(t, a_1, \dots, a_n) &= |\langle a_1, \dots, a_n | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle a_1, \dots, a_n | \exp(-iEt/\hbar) \psi_0 \rangle|^2 \\ &= |\exp(-iEt/\hbar)|^2 |\langle a_1, \dots, a_n | \psi_0 \rangle|^2 = P_0(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

- ▶ **Quantisierung** eines klassischen Teilchens: Observablen Funktionen aus $\vec{x}$ und $\vec{p}$
- ▶ $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0, \quad [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}$ (**Heisenberg-Algebra**)
- ▶ Relation zum Noether-Theorem: $\vec{p}$ erzeugt **Translationen** $\Leftrightarrow$ Impuls in abgeschlossenen Systemen **erhalten**
- ▶ Ortsdarstellung: $|x_1, x_2, x_3\rangle = |\vec{x}\rangle$ VONS von gemeinsamen Eigenvektoren von $\mathbf{x}_k$
- ▶ kontinuierliche Eigenwerte: $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
- ▶ Vollständigkeit

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}$$

Wellenmechanik

- ▶ **Quantisierung** eines klassischen Teilchens: Observablen Funktionen von $\vec{x}$ und $\vec{p}$
- ▶ $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0$, $[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0$, $[\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}$ (**Heisenberg-Algebra**)
- ▶ NB: **Poisson-Klammern** der klassischen Hamiltonschen Mechanik für Phasenraumfunktionen $f(\vec{x}, \vec{p})$

$$\{f, g\}_{\text{pb}} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j}$$

- ▶ $\{x_j, x_k\}_{\text{pb}} = 0$, $\{p_j, p_k\}_{\text{pb}} = 0$, $\{x_j, p_k\}_{\text{pb}} = \delta_{jk}$
- ▶ Heuristisches Verfahren: **kanonische Quantisierung**: $\{A, B\}_{\text{pb}} \mapsto \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$
- ▶ Relation zum **Noether-Theorem**: $\vec{p}$ erzeugt **Translationen** $\Leftrightarrow$ Impuls in abgeschlossenen Systemen **erhalten**
- ▶ $|x_1, x_2, x_3\rangle = |\vec{x}\rangle$ VONS von gemeinsamen **Eigenvektoren von $\mathbf{x}_k$**
- ▶ **kontinuierliche Eigenwerte**: $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
- ▶ Vollständigkeit

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}$$

Wellenmechanik

- ▶ Schrödinger: Wellenfunktion **Ortsdarstellung** der Zustandskets

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle \Leftrightarrow |\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x} | \psi \rangle$$

- ▶ $dP = d^3x |\psi(x)|^2$ ist **Wahrscheinlichkeit**, das Teilchen in einem Volumenelement d^3x um die Stelle $\vec{x}$ zu detektieren
- ▶ Wellenfunktionen bilden Hilbertraum der **quadratintegralen Funktionen** $L^2(\mathbb{R}^3)$
- ▶ Skalarprodukt

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \langle \psi_1 | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_1^*(\vec{x}) \psi_2(\vec{x})$$

- ▶ **Orts- und Impulsoperatoren:**

$$\vec{x}\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{x}\psi \rangle = \langle \vec{x}\vec{x} | \psi \rangle = \vec{x} \langle \vec{x} | \psi \rangle = \vec{x}\psi(\vec{x}), \quad \vec{p}\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{p}\psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

Teilchen im Kasten

Teilchen im Kasten

- ▶ erst 1D-Bewegung in „Kastenpotential“

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a/2, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

- ▶ **Hamilton-Operator:**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x})$$

- ▶ **Energie-Eigenzustände**

$$\mathbf{H} u_n(x) = E_n u_n(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} u_n''(x) = E_n u_n(x) \Rightarrow u_n''(x) = -k_n^2 u_n(x), \quad k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

- ▶ **Randbedingungen:** $u(a/2) = u(-a/2) = 0$, damit konsistent mit $u(x) = 0$ für $x > |a|$
- ▶ Lösungen der DGL

$$u_n(x) = A \sin(k_n x) + B \cos(k_n x) \quad \text{mit} \quad k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

Teilchen im Kasten

- ▶ Symmetrie unter **Raumspiegelungen** $x \rightarrow -x \Rightarrow$ Eigenfunktionen können als symmetrisch/antisymmetrisch gewählt werden
- ▶ **P** $u_n(x) = u_n(-x) = \pm u_n(x)$: „**Parität**“
- ▶ gerade Eigenfunktionen:

$$u_n^{(+)}(x) = A \cos(k_n x)$$

- ▶ $u_n^{(+)}(a) = u_n^{(+)}(-a) = 0 \Rightarrow k_n^{(+)} a \in \{\pi/2, 3\pi/2, \dots\}$, also

$$k_n^{(+)} = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \{1, 3, 5, \dots\}$$

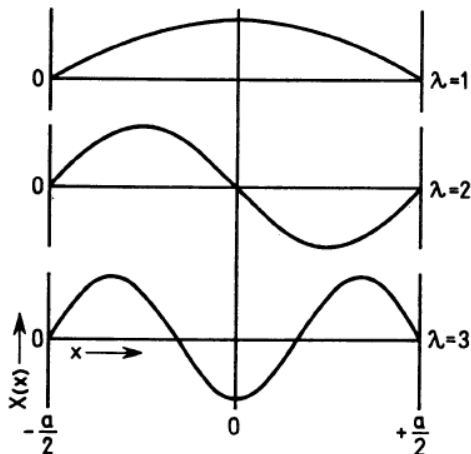
- ▶ Normierung: $\langle u_n | u_n \rangle = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2/a}$
- ▶ analog: ungerade Eigenfunktionen

$$u_n^{(-)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n^{(-)} x), \quad k_n^{(-)} = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- ▶ im Folgenden: $u_n^{\pm} = u_n$ (Parität $P = (-1)^{n+1}$)

Teilchen im Kasten

- ▶ Energie-Eigenfunktionen
- ▶ NB: Wellenfunktion mit Quantenzahl $n \in \mathbb{N}$ hat $(n-1)$ Nullstellen (+ die beiden am Rand bei $x = \pm a/2$)



Teilchen im 3D Kasten

- ▶ Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \vec{\mathbf{p}}^2 + V(\vec{x}), \quad V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x} \in [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2], \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Eigenfunktionen

$$u_{n_1, n_2, n_3}(\vec{x}) = u_{n_1}(x_1) u_{n_2}(x_2) u_{n_3}(x_3)$$

- ▶ Energieeigenwerte

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^3 k_{n_j}^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \sum_{j=1}^3 n_j^2$$

Teilchen im 3D Kasten: Zustandsdichte

- ▶ „Impuls“: $\vec{p}_{n_1, n_2, n_3} = \hbar \vec{k}_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar}{a}(n_1, n_2, n_3)$
- ▶ NB: $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ NICHT selbstadjungiert (nur hermitesch)! s. [Hee15], S. 93ff
- ▶ in **Impulsvolumen** d^3p sind

$$dn = \frac{a^3}{(\pi\hbar)^3} d^3p, \quad p_j > 0$$

Zustände

- ▶ $\vec{p}$ in Kugeloktant mit $p_j > 0$ erlaubt. Nimmt man volle Kugel für $\vec{p}$, ergibt sich ein zusätzlicher Faktor $1/8 = 1/2^3$:

$$dn = \frac{a^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3.$$

- ▶ **Phasenraumvolumenelement** der Größe $(2\pi\hbar)^3 = h^3 \hat{=}$ genau **1 Zustand**
- ▶ wegen $E = p^2/(2m)$ bzw. $p = \sqrt{2mE}$ ergibt sich **Zustandsdichte bzgl. der Energie**

$$d^3p|_E = 4\pi p^2 dp = 4\pi \sqrt{2m^3 E} dE \Rightarrow dn = m^{3/2} \frac{V \sqrt{E}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} dE$$

Fermi-Gas-Modell für Kerne

Literatur (+Quelle aller Abbildungen) [\[MK02\]](#)

Ideales Fermi-Gas bei $T = 0$ im Potentialtopf

- ▶ Gas aus N **nicht wechselwirkenden Fermionen mit Spin $S(= 1/2)$** im Topf bei Temperatur $T = 0$
- ▶ vollständiger Satz von Observablen für 1 Teilchen: $\vec{p}$ (Impuls) und $\mathbf{s}_z$
- ▶ VONS: $|\vec{p}, m_s\rangle$ mit $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $s_z = m_s \hbar$ mit $m_s \in \{1/2, -1/2\}$
- ▶ Fermionen: „**Pauli-Verbot**“ in jedem Phasenraumvolumenelement können sich maximal $2S + 1 (= 2)$ identische Fermionen aufhalten
- ▶ $T = 0$: Gas im **Grundzustand** $\Rightarrow N$ Fermionen füllen von unten die Einteilchenenergiezustände auf $\Rightarrow E_F$ Fermienergie

$$N = (2S + 1) \int_0^{E_F} dE \frac{dn}{dE} = (2S + 1) \sqrt{2} m^{3/2} \frac{V E_F^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

- ▶ **Fermi-Energie**

$$E_F = \frac{1}{[2(2S + 1)^2]^{1/3} m} (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Fermi-Gas-MModell für Kerne

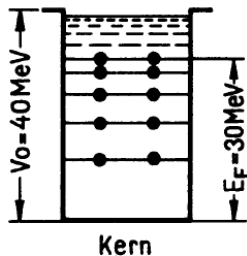
- ▶ Kern besteht aus A Nukleonen: Z Protonen und $N = A - Z$ Neutronen
- ▶ empirisch (z.B. Elektronstreuung an Kernen): Nukleonendichte $\sim \text{const}$ innerhalb des Kerns **unabhängig von A** $\Rightarrow V \propto A$
- ▶ Kugelförmiger Kern mit Kernradius $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 \simeq 1,25 \text{ fm}$,
 $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi r_0^3 A/3$
- ▶ eigentlich kompliziertes Vielteilchenproblem wechselwirkender p und n
- ▶ Drastische Vereinfachung: einzelnes Nukleon spürt konstantes Potential, verursacht von allen anderen Nukleonen (endlich hoher Potentialtopf)
- ▶ **Nukleon-Potential gleich für p und n**
(abgesehen von em. Coulombwechselwirkung für p)

Fermi-Gas-MModell für Kerne

- ▶ Kern aus A Nukleonen
- ▶ **Stabilität gegen β -Zerfall:** $E_{\text{Fp}} \simeq E_{\text{Fn}} = E_{\text{F}} \Rightarrow N \simeq Z = A/2$

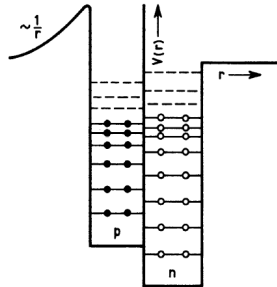
$$E_{\text{F}} = \frac{1}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left(\frac{A}{2V} \right)^{2/3} = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} (\hbar c)^2}{m c^2 r_0^2} \simeq 30 \text{ MeV}$$

- ▶ $\hbar c \simeq 0,197 \text{ GeV fm}$, $m c^2 = 0,938 \text{ GeV}$, $r_0 \simeq 1,25 \text{ fm}$
- ▶ Separationsenergie $\simeq 8 \text{ MeV} \Rightarrow V_0 \simeq 40 \text{ MeV}$



Fermi-Gas-MModell für Kerne

- ▶ bis jetzt: **nur starke Wechselwirkung** berücksichtigt
- ▶ starke Wechselwirkung: „ladungsunabhängig“ $\Rightarrow$ NN-Wechselwirkung für pp, np, nn gleich $\Rightarrow$ Potentialtöpfe im Fermi-Modell für p und n gleich
- ▶ aber Protonen **elektrisch geladen** $\Rightarrow$ abstoßendes **Coulomb-Potential** $\Rightarrow$ Protonen weniger stark gebunden als Neutronen



- ▶ üblicherweise $N \gtrsim Z$ (für β -stabile Kerne)

Fermi-Gas-MModell für Kerne

- ▶ **totale Energie** eines kalten Fermi-Gases mit N Teilchen

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= (2S+1) \int_0^{E_F} dE E \frac{dn}{dE} = (2S+1) \int_0^{E_F} m^{3/2} \frac{V \sqrt{E}^3}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} V (2S+1)}{5\pi^2 \hbar^3} E_F^{5/2} \\ &= \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5 \cdot 2^{1/3} m (2S+1)^{2/3}} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} \end{aligned}$$

- ▶ definiere (a la Mayer-Kuckuck, Kernphysik) mit $V = 4\pi A r_0^3/3$

$$C_3 = \frac{9 \cdot 3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar^2}{10 m [2(2S+1)]^{2/3} r_0^2} \Rightarrow E_{\text{tot}} = C_3 A^{-2/3} N^{5/3}$$

Fermi-Gas-Modell für Kerne

- ▶ Energie für Modell mit $N \neq Z$ (wobei hier $N = A - Z$!)

$$E_T = C_3 A^{-2/3} (N^{5/3} + Z^{5/3})$$

- ▶ für symmetrisches Modell: $N = Z = A/2$

$$E_T^{(\text{symm})} = 2C_3 A^{-2/3} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}.$$

- ▶ **Asymmetrie-Energie:** mit $T_Z = (Z - N)/2$
(Hälfte des negativen Neutronenüberschusses)

- ▶ NB: $T_Z = [(Z - (A - Z))/2] = Z - A/2$

$$\Delta E = E_T - E_T^{(\text{symm})} = C_3 A^{-2/3} \left[\left(\frac{A}{2} - T_Z\right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} + T_Z\right)^{5/3} - 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \right]$$

- ▶ Entwicklung nach kleinen T_Z/A (Binomialformel)

$$\Delta E = C_3 A \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{T_Z}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{T_Z}{A}\right)^{5/3} - 2^{2/3} \right] = \frac{10}{9} 2^{1/3} C_3 \frac{T_Z^2}{A}$$

Bibliography I

- [Fic79] E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Aula-Verlag, Wiesbaden, 4 ed. (1979).
- [Hee15] H. v. Hees, Grundlagen der Quantentheorie, I. Teil: Nichtrelativistische Quantentheorie, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2015).
URL <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/quant.pdf>
- [MK02] T. Mayer-Kuckuck, Kernphysik - Eine Einführung, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 7 ed. (2002).
URL <https://doi.org/10.1007/978-3-322-84876-5>
- [ST93] J. J. Sakurai, S. Tuan, Modern Quantum Mechanics, Addison Wesley (1993).