Die Eulerschen Kreiselgleichungen

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

Wintersemester 2024/2025

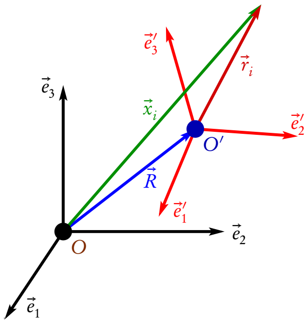
Der freie Kreisel I

- Kreisel: starrer Körper, der in einem Punkt befestigt wird $\Rightarrow$ kann sich nur noch um diesen Punkt drehen
- Befestigung im Schwerpunkt $\Rightarrow$ auch im Schwerefeld der Erde kräftefreie Bewegung („freier Kreisel“)
- rechne mit körperfesten Komponenten
- kann körperfeste kartesische Basis so wählen, dass $\Theta'_{jk} = \mathrm{diag}(A, B, C)$ ist (Hauptträgheitsachsen)
- Hauptträgheitsmomente A, B, C
- falls alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden: unsymmetrischer Kreisel
- falls $A = B \neq C$: symmetrischer Kreisel
- falls $A = B = C$: Kugelkreisel (Körper muss aber keine Kugel sein, z.B. ist homogener Würfel auch ein Kugelkreisel!)

Der freie Kreisel II

- Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}\Theta'_{jk}\omega'_j\omega'_k = \frac{A}{2}\omega_1'^2 + \frac{B}{2}\omega_2'^2 + \frac{C}{2}\omega_3'^2 \tag{1}$$



- hier: $O = O'$!

Der freie Kreisel III

- verwende zur Parametrisierung der Rotation die Drehmatrix $\hat{D}$:

$$\vec{e}_k'(t) = \vec{e}_j D_{jk}(t), \quad \hat{D}^{\mathrm{T}} = \hat{D}^{-1}, \quad \det \hat{D} = +1 \tag{2}$$

- für Euler-Lagrange-Gleichungen: benötige generalisierte Koordinaten, die $\hat{D}$ parametrisieren $\Rightarrow$ Euler-Winkel
- zuerst aber direkte Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung
- variiere $\hat{D}$ um $\delta \hat{D} = \hat{D}\delta \hat{K}$; $\hat{D} + \delta \hat{D} \stackrel{!}{\in} \mathrm{SO}(3)$

$$\begin{aligned} &\hat{D} + \hat{D}\delta\hat{K} = \hat{D}(\mathbb{1} + \delta\hat{K}) \\ \Rightarrow &(\hat{D} + \hat{D}\delta\hat{K})^{\mathrm{T}}(\hat{D} + \hat{D}\delta\hat{K}) = (\mathbb{1} + \delta\hat{K}^{\mathrm{T}})\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D}(\mathbb{1} + \delta\hat{K}) \\ &= \mathbb{1} + \delta\hat{K}^{\mathrm{T}} + \delta\hat{K} + \mathscr{O}(\delta\hat{K}^2) \stackrel{!}{=} \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\delta\hat{K} + \delta\hat{K}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \delta K_{ab} = -\delta K_{ba} = \epsilon_{abc}\delta k_c \Leftrightarrow \delta k_c = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\delta K_{ab} \tag{4}$$

Der freie Kreisel IV

- δk_c: drei Freiheitsgrade der (infinitesimalen) Rotation
- $\Theta'_{mn} = \Theta'_{nm} \Rightarrow$

$$\delta L = \Theta'_{mn} \omega'_m \delta \omega'_n, \tag{5}$$

- Definition der Winkelgeschwindigkeit

$$\hat{\Omega}' = \hat{D}^{\mathrm{T}} \dot{\hat{D}}, \quad \Omega'_{kl} = -\epsilon_{jkl} \omega'_j \Leftrightarrow \omega'_j = -\frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \Omega'_{kl} \tag{6}$$

- Variation $\delta \underline{\omega}' \Leftrightarrow \delta \hat{\Omega}$

$$\delta \hat{\Omega}' = \delta \hat{D}^{\mathrm{T}} \dot{\hat{D}} + \hat{D}^{\mathrm{T}} \delta \dot{\hat{D}} = \delta \hat{K}^{\mathrm{T}} \hat{D}^{\mathrm{T}} \dot{\hat{D}} + \hat{D}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\hat{D} \delta \hat{K}) = -\delta \hat{K} \hat{\Omega}' + \hat{\Omega}' \delta \hat{K} + \delta \dot{\hat{K}}. \tag{7}$$

- Komponentenschreibweise:

$$\delta \Omega'_{kl} = \Omega'_{ka} \delta K_{al} - \delta K_{ka} \Omega'_{al} + \delta \dot{K}_{kl}. \tag{8}$$

Der freie Kreisel V

- für $\delta \underline{\omega}'$:

$$\begin{aligned} \delta \omega'_n &= -\frac{1}{2} \epsilon_{nkl} \delta \Omega'_{kl} \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{nkl} (\delta \dot{K}_{kl} + \delta K_{al} \Omega'_{ka} - \delta K_{ka} \Omega'_{al}) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{nkl} (\delta \dot{K}_{kl} + 2 \delta K_{al} \Omega'_{ka}). \end{aligned} \tag{9}$$

- mit (4) folgt

$$\epsilon_{nkl} \delta \dot{K}_{kl} = \epsilon_{nkl} \epsilon_{ckl} \delta \dot{k}_c = (\delta_{nc} \delta_{kk} - \delta_{nk} \delta_{ck}) \dot{k}_c = 2 \delta \dot{k}_n \tag{10}$$

Der freie Kreisel VI

- und mit (6)

$$\begin{aligned} \delta K_{al}\Omega'_{ka} &= -\epsilon_{cka}\epsilon_{dal}\omega'_c \delta k_d \\ &= \epsilon_{cka}\epsilon_{dla}\omega'_c \delta k_d \\ &= (\delta_{cd}\delta_{kl} - \delta_{cl}\delta_{kd})\omega'_c \delta k_d \\ &= \omega'_c \delta k_c \delta_{kl} - \omega'_l \delta k_k. \end{aligned} \tag{11}$$

mit (10) und (11) in (9)

$$\delta\omega'_n = -\delta\dot{k}_n + \epsilon_{nkl}\omega'_l \delta k'_k. \tag{12}$$

- Variation der Wirkung (+partielle Integration)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Theta'_{mn}\omega'_m \delta\omega'_n = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Theta'_{mn}\omega'_m(-\delta\dot{k}_n + \epsilon_{nkl}\omega'_l \delta k'_k) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Theta'_{\color{red}{nm}}\omega'_m(-\delta\dot{k}_n + \epsilon_{\color{red}{lnk}}\omega'_l \delta k'_k) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t (\hat{\Theta}'\underline{\dot{\omega}}' + \underline{\omega}' \times \hat{\Theta}'\underline{\omega}') \cdot \delta\underline{k}. \end{aligned} \tag{13}$$

Der freie Kreisel VII

- muss für beliebige $\delta \underline{k}(t)$ verschwinden:
- Eulersche Kreiselgleichungen

$$\hat{\Theta}' \underline{\dot{\omega}}' + \underline{\omega}' \times \hat{\Theta}' \underline{\omega}' = 0. \tag{14}$$

- rotierende Bezugssysteme: kovariante Zeitableitung von Vektorkomponenten bzgl. rotierendem kartesischem Basissystem

$$\mathrm{D}_t \underline{V}' = \underline{\dot{V}}' + \underline{\omega}' \times \underline{V}' \Leftrightarrow \dot{\vec{V}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\vec{e}_j{}' V_j' \right) = \vec{e}_j{}' (\mathrm{D}_t \underline{V}')_j \tag{15}$$

- mit $\underline{J}' = \hat{\Theta}' \underline{\omega}$ (Gesamtdrehimpuls)

$$\dot{\vec{J}} = 0 \tag{16}$$

- Eulersche Kreiselgleichung für freien Kreisel $\Leftrightarrow$ Drehimpulserhaltung
- folgt auch aus Noether-Theorem für Rotationsinvarianz, da freier Kreisel abgeschlossenes System ist!