
Quantenfeldtheoretische Beschreibung des $\pi\rho$ -Systems
Diplomarbeit

Hendrik van Hees
Technische Hochschule Darmstadt
Institut für Kernphysik

August 1997

Inhaltsverzeichnis

1	Eichfeldtheorien	9
1.1	Mathematische Grundlagen	9
1.1.1	Klassische Yang-Mills-Eichfeldtheorie	9
1.1.2	Spontane Symmetriebrechung	12
1.1.3	Anwendung auf das $\pi\rho$ -System	16
1.2	Quantisierung von Eichtheorien	19
1.3	Quantisierung des Higgsmodells	24
1.4	Eichinvarianz der S-Matrixelemente	26
1.5	Slavnov-Taylor-Identitäten	29
1.5.1	Die allgemeine Slavnov-Taylor-Identität	29
1.5.2	Elektrodynamik	29
1.5.3	Ungebrochene Eichtheorie	31
1.5.4	Spontan gebrochene Eichtheorie	32
2	Vakuumsfeldtheorie des ρ-Mesons	33
2.1	Dimensionale Regularisierung	33
2.2	Dispersionsrelationen und Renormierung	37
2.3	Pionenstreudaten	41
2.3.1	Streuphase im $J = 1, T = 1$ -Kanal	41
2.3.2	Elektromagnetischer Formfaktor des Pions	43
3	Selbstkonsistente Näherungen	47
3.1	Funktionale der Quantenfeldtheorie	47
3.1.1	Ein einfaches Beispiel: ϕ^4 -Theorie	53
3.2	Die Erhaltungssätze	56
3.2.1	Das Noethertheorem für klassische Feldtheorien	56
3.2.2	Symmetrien der effektiven Wirkung	60
3.3	Die selbstkonsistenten Näherungen für das $\pi\rho$ -System	62
4	Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen	69

Inhaltsverzeichnis

4.1	Operatorformalismus	70
4.2	Das Pfadintegral für die Gleichgewichtsthermodynamik	74
4.2.1	Das erzeugende Funktional für freie Teilchen	77
4.2.2	Die Feynmanregeln	80
5	Zusammenfassung und Ausblick	85
A	Dimensionale Regularisierung	87
A.1	Die Γ -Funktion	88
A.2	Kugelkoordinaten in d Dimensionen	95
A.3	Standardintegrale für Feynmanregeln	95
B	Herleitung der Feynmanregeln	101
B.1	Vorbereitungen	101
B.2	Propagatoren	102
B.3	Vertizes	104
B.4	Zusammenstellung der Vertizes	105
	Literaturverzeichnis	109

Einleitung

Der Versuch, das Verhalten von subatomaren Teilchen mit Hilfe der relativistischen Quantentheorie zu beschreiben, hat zu der Erkenntnis geführt, daß dies nur in Form einer Vielteilchentheorie geschehen kann, weil eine der Schrödingerschen Wellenmechanik wechselwirkender Teilchen analoge Theorie nicht zu einem von unten beschränkten Hamiltonoperator führt.

Dies geschieht in Form einer relativistischen Quantenfeldtheorie. Die Beschreibung eines physikalischen Vorgangs verlangt dabei die Kenntnis der involvierten Teilchen und der zwischen ihnen wirkenden Kräfte. Da aber eben diese i.a. nicht der direkten Beobachtung zugänglich sind, wie z.B. bei der Gravitations- oder elektromagnetischen Kraft, ist man auf andere Methoden angewiesen, diese Beschreibung zu finden. Dabei haben sich die grundlegenden Symmetrieprinzipien als das schlagkräftigste Hilfsmittel erwiesen.

Grob kann man die Symmetrien in Raum-Zeitsymmetrien und intrinsische Symmetrien der Teilchen unterteilen. Die Raum-Zeitsymmetrie ist durch das speziell-relativistische Raum-Zeit-Kontinuum, also den Minkowskiraum bestimmt. Das ist der vierdimensionale affine Punktraum mit der symmetrischen Bilinearform mit einem positiven und drei negativen Trägheitsindizes als Fundamentalf orm.

Dessen Symmetriegruppe ist die Poincarégruppe, die ein semidirektes Produkt aus den Translationen der Raum-Zeit und der Lorentzgruppe $O[1, 3]$ darstellt. Die letztere beschreibt Drehungen des Raumes (Rotationen) und den Wechsel von einem Inertialsystem in ein anderes (Boosts). Relativistische Invarianz bedeutet nun, daß die der Quantenfeldtheorie zugrundeliegenden Felder eine Darstellung der universellen Überlagerung der Poincarégruppe bilden müssen. E.P. Wigner hat 1939 alle (physikalisch relevanten) linearen unitären Darstellungen der Poincarégruppe gefunden (vgl. [Wig39] oder [Wei95]).

Diese Darstellungen sind durch die freien Felder gegeben und klassifizieren die Teilchen nach ihrer Masse und ihrem Spin. Der Spin ist bei massiven Teilchen durch die Darstellung der Drehgruppe (kleine Gruppe der Darstellung der Poincarégruppe) bzgl. des Ruhesystems dieses Teilchens gegeben (die kleine Gruppe der Darstellung ist im Fall massiver Teilchen die Drehgruppe). D.h. die Darstellungen sind ganz- oder halbzahlig. Dabei handelt es sich im halbzahligen Fall um Darstellungen der Überlagerungsgruppe $SL[2, \mathbb{C}]$ der Lorentzgruppe.

Die intrinsischen Symmetrien der Teilchen lassen sich ihrerseits wieder in globale und lokale Symmetrien aufteilen. Durch unitäre Symmetriegruppen zu beschreibende globale Symmetrien haben aufgrund des Noethertheorems die Erhaltung der zugeordneten Ladungen zur Folge. Das historisch erste Beispiel für eine solche Symmetrie ist die von Heisenberg eingeführte Isospinsymmetrie der Nukleonen. Er betrachtete Neutron und Proton als ein Teilchen mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad, nämlich dem Isospin. Danach bilden diese beiden Teilchen ein $SU[2]$ -Dublett und werden durch die 3-Komponente des Isospins unterschieden.

Schließlich kann die Symmetrie sogar unter lokalen Gruppenoperationen invariant sein, d.h. die

Transformationen dürfen vom Raum-Zeit-Punkt abhängen, an dem sie ausgeführt werden. Dies führt im Rahmen der Eichfeldtheorien zur Einführung von an erhaltene Ströme koppelnden Vektorbosonen, die die Kräfte vermitteln.

Allgemein besteht die grundlegende Idee der Symmetriebetrachtungen darin, daß die Forderung der Symmetrie die Form der Wechselwirkungen weitgehend festlegt. Ob die zugrundegelegten Symmetrien physikalisch tragfähig sind, kann nur durch Vergleich mit dem Experiment entschieden werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, die grundlegenden Methoden zur Beschreibung von Vielteilchensystemen im Rahmen der Quantenfeldtheorie bereitzustellen. Insbesondere sollen Fragen der Renormierung betrachtet werden. In der relativistischen Quantenfeldtheorie treten nämlich Divergenzen bei der Beschreibung physikalischer Größen auf, so bei Streuquerschnitten im Falle der Vakuumfeldtheorie oder thermodynamischer Zustandsgrößen im Falle der quantenstatistischen Feldtheorie Divergenzen auf. Bestimmte Theorien besitzen nun aber die Eigenschaft, daß all diese Divergenzen in einen endlichen Satz grundsätzlich unbeobachtbarer Parameter (sog. "nackte" Massen und Kopplungskonstanten) der nichtwechselwirkenden Teilchen absorbiert werden können. Die physikalisch relevanten Parameter, die stets den wechselwirkenden Teilchen zugeordnet sind, sind endlich und werden durch Anpassung an experimentelle Daten gewonnen. Solche Theorien heißen renormierbar.

Die Forderung nach Renormierbarkeit ist aber zunächst eine rein technisch mathematische Forderung. Eine effektive Theorie beschreibt nämlich physikalische Sachverhalte stets nur für einen bestimmten Energiebereich. So ist etwa die in dieser Arbeit behandelte Theorie von Mesonen nur solange eine gültige Approximation, wie die Energien klein genug sind, um die unterliegende Struktur, die durch die Zusammensetzung der Teilchen aus Quarks und Gluonen gegeben ist, nicht anzuregen. Solange also eine Theorie nicht für beliebig hohe Energien Gültigkeit beansprucht, ist die Forderung nach Renormierbarkeit nicht zwingend. Andererseits kann man zeigen, daß für Energien, die klein sind verglichen mit der die Gültigkeit der Theorie einschränkenden Skala, der renormierbare Anteil der Wechselwirkungsterme in der Lagrangedichte (die höchstens Energiedimension 4 haben dürfen) die führenden Terme bestimmt. Das bedeutet, daß die Forderung der Renormierbarkeit der Theorie zwar einerseits die Freiheit, Wechselwirkungsterme einzuführen, erheblich einschränkt, andererseits aber die Chance bietet, das Niederenergieverhalten korrekt zu beschreiben.

Der Vorteil einer renormierbaren Theorie liegt nun darin, daß durch Anpassung einiger weniger Parameter die wesentlichen Eigenschaften einer durch Symmetrien festgelegten Wechselwirkung untersucht werden können, wobei das Energiespektrum nicht durch die Einführung eines Cutoffs von oben beschränkt wird.

In dieser Arbeit werden zunächst die mathematischen Grundlagen zur Beschreibung wechselwirkender relativistischer Vielteilchensysteme mit Hilfe von Eichtheorien behandelt. Nach der ausführlichen Erläuterung der Konstruktion eichinvarianter Lagrangedichten wird deren Quantisierung im Rahmen des Pfadintegralformalismus' nach der Faddeev-Popov-Methode referiert. Zum Schluß wird mit Hilfe der BRST-Invarianz die Eichinvarianz der S-Matrix und deren Unitarität gezeigt.

Das Vektordominanzmodell von Kroll, Lee und Zumino [KLZ67] wird auf ein Modell mit den drei ρ -Mesonen als $SU[2]$ -Eichbosonen erweitert. Dabei muß der Mechanismus der spontanen Brechung der Eichsymmetrie (Higgsmechanismus) angewandt werden, wobei ein Higgsboson, dem kein physikalisch beobachtbares Teilchen entspricht, eingeführt werden muß. Diese Theorie kann als der renormierbare Anteil der "Hidden-Gauge"-Theorie ([BK84]) angesehen werden.

Einleitung

Im zweiten Teil wird die ρ -Selbstenergie im Pionensektor in Einschleifennäherung behandelt. Dabei werden zwei verschiedene Techniken der Renormierung angewandt: Dimensionale Regularisierung und die Anwendung von Dispersionsrelationen. Es wird gezeigt, daß die mit Hilfe der Selbstenergie berechenbaren Größen (Pionformfaktor und Streuphase im $I = 1, J = 1$ -Kanal) bereits gut wiedergegeben werden.

Im dritten Kapitel werden allgemeine Funktionalmethoden der Quantenfeldtheorie und das Noethertheorem behandelt. Dies ermöglicht eine systematische Herleitung der von Luttinger und Ward zuerst angegebenen Methode selbstkonsistente Näherungen, die die fundamentalen Erhaltungssätze (allgemein solche, die aus einer linear realisierten Symmetrie folgen) respektiert. Die Selbstenergie von Pionen und ρ -Mesonen wird in niedrigster selbstkonsistenter Näherung berechnet.

Im abschließenden vierten Kapitel werden die Techniken der Quantenstatistik bei endlichen Temperaturen zusammenfassend referiert. Es zeigt sich, daß dieselben auf Funktionalen beruhenden Methoden auch in diesem Fall anwendbar sind und daß für statistische Operatoren, die keine Anfangskorrelationen beinhalten, dieselben Diagrammregeln wie in der Störungstheorie anwendbar sind.

Anhang A stellt technische Details zur dimensional Regularisierung und Anhang B die Feynmanregeln des $\pi\rho$ -Modells zusammen.

Einleitung

Kapitel 1

Eichfeldtheorien

1.1 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen die mathematischen Grundlagen der Eichfeldtheorien dargestellt werden. Die lokale Struktur der Quantenfeldtheorie legt es nämlich nahe, daß die Basis der Ladungsräume, die intrinsische Freiheitsgrade von Teilchen beschreiben, an jeder Stelle der Raum-Zeit frei wählbar sind, ohne daß dies die physikalischen Aussagen der Theorie verändert. Das bedeutet, daß die Theorie so formuliert werden muß, daß eine Transformation dieser Basen an jedem Raum-Zeitpunkt, also eine sog. *lokale Eichtransformation* ihren physikalischen Gehalt nicht ändert. Es ist also im mathematischen Sinne eine *kovariante Formulierung* der Theorie bzgl. Eichtransformationen gesucht.

1.1.1 Klassische Yang-Mills-Eichfeldtheorie

Sei im folgenden G eine halbeinfache kompakte Liegruppe und $U : G \rightarrow U[N]$ eine irreduzible unitäre Darstellung derselben. Es sei weiter $\{\underline{b}_i\}_{i \in 1 \dots N}$ eine beliebige Basis des Darstellungsraums. Dieser N -dimensionale komplexe Darstellungsraum der Liegruppe soll jetzt zum Ladungsraum von Teilchen werden, d.h. wir wollen Felder betrachten, die Werte aus diesem Vektorraum annehmen. Dazu müssen wir den Darstellungsraum zu einem sog. Faserbündel erweitern, d.h. wir stellen uns vor, daß jedem Raum-Zeit-Punkt ein solcher Ladungsraum mit der vermöge der unitären Darstellung wirkenden Gruppe zugeordnet ist.

Es sei nun $\underline{\Phi} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^N$ das die Teilchen repräsentierende Feld. Wir betrachten zunächst klassische Felder. Mit der Quantisierung der Theorie beschäftigt sich der nächste Abschnitt.

Die Lagrangedichte der freien Felder ist durch

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \underline{\Phi})^\dagger (\partial^\mu \underline{\Phi}) - m^2 \underline{\Phi}^\dagger \underline{\Phi} \quad (1.1)$$

gegeben. Sie ist offenbar invariant unter der Wirkung der Gruppe, weil diese durch die unitäre Darstellung U angewandt auf $\underline{\Phi}$ gegeben ist.

Wir können an jedem Raum-Zeit-Punkt x eine Basis $\{\underline{b}_i(x)\}_{i \in 1 \dots N}$ wählen. Diese Wahl ist aber nicht völlig frei, weil alle Raum-Zeit-Punkte gleichberechtigt sind, d.h. die Basis an einem Raum-Zeit-Punkt muß durch eine Symmetrietransformation aus der Basis an einem beliebigen anderen

Raum-Zeit-Punkt hervorgehen. Es gibt also eine Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow G$, so daß

$$\underline{b}_i(x) = U[g(x)]^k{}_i \underline{b}_k(0). \quad (1.2)$$

Weiter sei $\mathcal{L}G$ die Liealgebra von G , und wir verstehen unter U auch die von der Darstellung der Gruppe induzierte Darstellung der Liealgebra. Weiter sei $\{iT^a\}_{a \in 1 \dots n}$ eine reelle Basis der Liealgebra. Die Basis sei so gewählt, daß die Spurform diagonal ist:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (1.3)$$

Wegen der Halbeinfachheit der Liegruppe und damit auch der Liealgebra ist dies stets möglich. Dann ist auch die Killingform, also die Spurform der adjungierten Darstellung, diagonal, und infolgedessen sind die durch

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c \quad (1.4)$$

definierten Strukturkonstanten f_{abc} total antisymmetrisch.

Für die folgenden Rechnungen schreiben wir zur Abkürzung

$$U[g(x)] \equiv U(x) = \exp[i\beta_a(x)T^a]. \quad (1.5)$$

Da U unitär ist, sind die T^a hermitisch und folglich die Strukturkonstanten reell.

Die Ableitung des Feldes $\underline{\Phi}$ ist

$$\partial_\mu \underline{\Phi}(x) = [\partial_\mu \Phi^i(x)] \underline{b}_i(x) + \Phi^i(x) \partial_\mu \underline{b}_i(x). \quad (1.6)$$

Wegen (1.2) ist

$$\partial_\mu \underline{b}_k(x) = \partial_\mu U^l{}_k(x) (U^{-1})^i{}_l(x) \underline{b}_i = [U^{-1} \partial_\mu U]^i{}_k(x) \underline{b}_i(x). \quad (1.7)$$

Aus der Unitaritätsbeziehung $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ folgt

$$[U^{-1}(x) \partial_\mu U(x)]^\dagger = [\partial_\mu U^\dagger(x)] U(x) = -U^{-1}(x) [\partial_\mu U(x)], \quad (1.8)$$

d.h. die in (1.7) auftretende Matrix gehört zu $\mathcal{L}G$. Also existieren reellwertige Vektorfelder A_μ^a , so daß

$$U^{-1}(x) [\partial_\mu U(x)] = i g A_\mu^a(x) T^a \quad (1.9)$$

ist. Dabei bezeichnet $g \in \mathbb{R}$ eine dimensionslose (!) Kopplungskonstante. Im folgenden sei

$$A_\mu^a(x) T^a = \mathcal{A}_\mu(x). \quad (1.10)$$

In (1.6) eingesetzt folgt daraus

$$\partial_\mu \underline{\Phi}(x) = [\partial_\mu \Phi^i(x)] \underline{b}_i(x) + \Phi^i(x) i g \mathcal{A}_\mu \underline{b}_i(x). \quad (1.11)$$

Man bezeichnet den Differentialoperator

$$D_\mu^{ik} = \delta^{ik} \partial_\mu + i g \mathcal{A}_\mu^{ik} \quad (1.12)$$

als kovariante Ableitung. Das Feld \mathcal{A}_μ ist also differentialgeometrisch betrachtet ein affiner Zusammenhang auf dem Faserbündel. Die Lagrangedichte (1.1) wird also bei Ersetzen der partiellen Ableitungen der Felder durch die entsprechenden kovarianten Ableitungen

$$\mathcal{L}'_0 = (D_\mu \Phi)^{i*} (D^\mu \Phi)^i + m^2 \Phi^{i*} \Phi^i \quad (1.13)$$

invariant unter lokalen Eichtransformationen. Dies läßt sich auch direkt durch Anwendung einer Eichtransformation zeigen:

$$\Phi'^i(x) = V(x)^i_k \Phi^k(x) = [\exp(-ig\chi_a(x)T^a)]^i_k \Phi^k(x). \quad (1.14)$$

Die Felder Φ'^i können nun als Felder bzgl. der Basis $\{b'_k\}$ interpretiert werden, die durch

$$b'_k(x) = [V^{-1}(x)]^i_k b_i(x) \quad (1.15)$$

definiert ist. Dann ist nämlich

$$\Phi'^k(x) b'_k(x) = \Phi^i(x) b_i(x). \quad (1.16)$$

Wir gehen im folgenden zur Matrix-Vektor-Schreibweise über, wobei wir die als Spaltenvektor geschriebenen Komponenten von $\underline{\Phi}$ bzgl. der beiden durch die Eichtransformation verbundenen Basen mit Φ bzw. Φ' bezeichnen. Es bleibt zu zeigen, wie sich das Eichfeld \mathcal{A}_μ transformiert. Nach (1.9) muß bzgl. der neuen Basis $(\partial_\mu U')U'^{-1} = ig\mathcal{A}'_\mu$ gelten. Für U findet man wegen (1.2):

$$b'_k(x) = [V^{-1}]^i_k(x) b_i(x) = [V^{-1}]^i_k(x) U^j_i(x) V^l_j(0) b'_l(x). \quad (1.17)$$

Daraus liest man unmittelbar ab, daß

$$U'(x) = V(0)U(x)V^{-1}(x) \quad (1.18)$$

ist, und aus der Definition (1.9), nunmehr angewandt auf $U'(x)$, ergibt sich

$$\mathcal{A}'_\mu(x) = V(x)\mathcal{A}_\mu V^{-1}(x) - \frac{i}{g}V(x)[\partial_\mu V^{-1}(x)]. \quad (1.19)$$

Die Wirkung einer infinitesimalen Eichtransformation auf die Felder ergibt sich durch Entwickeln von $V(x) = \exp[-ig\delta\chi_a(x)T^a]$ bis zur ersten Ordnung in $\delta\chi$ und Einsetzen in (1.19). Mit Hilfe von (1.4) finden wir schließlich

$$\delta\Phi = -ig\delta\chi_a T^a \Phi; \quad \delta A_\mu^a = \partial_\mu \delta\chi^a - gf^{abc} A_\mu^b \delta\chi^c. \quad (1.20)$$

In der Lagrangedichte benötigen wir noch einen kinetischen Term für das Eichfeld \mathcal{A} , der die Eichinvarianz nicht zerstört. Da sich das Eichfeld gem. (1.19) nicht nach der adjungierten Darstellung transformiert (Zusammenhangskomponenten sind keine Tensoren!), läßt sich für das Eichfeld nicht einfach eine kovariante Ableitung definieren. Die differentialgeometrisch nächstliegende Größe ist die Krümmung, die durch den Kommutator zweier kovarianter Ableitungen

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \quad (1.21)$$

gegeben ist. Anwendung von (1.12) auf diese Definition ergibt

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (1.22)$$

Das läßt sich mit Hilfe der Strukturkonstanten (1.4) in der Form

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.23)$$

durch die Feldkomponenten ausdrücken. Da sich $\mathcal{D}\Phi$ unter der Darstellung der Eichgruppe wie ein Vektor transformiert, verhält sich der Krümmungstensor unter Eichtransformationen (1.14) wie folgt:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = V\mathcal{F}_{\mu\nu}V^{-1}. \quad (1.24)$$

Damit ist

$$\text{Tr}[\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1.25)$$

invariant unter Eichtransformationen und

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad (1.26)$$

eine geeignete Lagrangedichte für das reine Eichfeld. Man erkennt daraus, daß die Eichbosonen für eine nichtabelsche Eichgruppe untereinander wechselwirken, also Ladungen der Eichgruppe tragen. Ein wichtiges Beispiel ist die Quanten-Chromo-Dynamik, die eine $SU[3]$ -Eichtheorie der eben dargestellten Art ist. Die Selbstwechselwirkung der Eichbosonen (Gluonen) ist für die asymptotische Freiheit der starken Wechselwirkung verantwortlich (siehe z.B. [BBJ83]).

Weiter ist aus der reinen Yang-Mills-Lagrangedichte (1.26) ersichtlich, daß das Eichfeld notwendig masselos ist. Ein Masseterm $\propto A_\mu^a A^{a\mu}$ ergibt eine explizite Brechung der Eichsymmetrie, und dadurch geht die Renormierbarkeit der Theorie verloren (s.u.).

Eine vollständige eichinvariante Lagrangedichte mit kinetischem Term für das Eichfeld ist durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}] + (\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\Phi) - m^2\Phi^\dagger\Phi \quad (1.27)$$

gegeben. Wegen der Eichinvarianz ist nicht die volle in dem Feld \mathcal{A} enthaltene Information physikalisch relevant. Die Eichbosonen werden also nicht durch die Felder beschrieben, sondern durch Äquivalenzklassen von Feldern, wobei sich alle Felder in einer Äquivalenzklasse lediglich durch eine Eichtransformation unterscheiden. Mathematisch gesehen sind sie die Bahnen der Eichgruppe im Raum der liealgebrawertigen Eichbosonenfelder.

Dieses Phänomen ist schon von der klassischen Elektrodynamik her bekannt: Die Maxwellgleichungen lassen sich vollständig durch den Faradaytensor $F_{\mu\nu}$, d.h. in nichtkovarianter Schreibweise durch das elektromagnetische Feld (\vec{E}, \vec{B}) ausdrücken, und die ‘‘Potentiale’’ A^μ werden als ‘‘Hilfsfelder’’ aufgrund des Lemmas von Poincaré eingeführt. Zur Bestimmung einer eindeutigen Bewegungsgleichung der Potentiale muß durch geeignete Nebenbedingungen (z.B. die Lorentzbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$) die Eichung fixiert werden. Wir werden uns damit weiter unten bei der Quantisierung der Eichfeldtheorien näher beschäftigen.

1.1.2 Spontane Symmetriebrechung

In der oben dargestellten Theorie der Eichfelder sind die Eichbosonen stets masselos. Das einfache Hinzufügen eines Masseterms $m^2\text{Tr}(\mathcal{A}^\mu\mathcal{A}_\mu)$ würde die Eichinvarianz verletzen. In van ’t Hoofts Renormierbarkeitsbeweis [Hoo71] sind aber die Slavnov-Tayloridentitäten und damit die Eichinvarianz die wesentliche Voraussetzung. Tatsächlich zeigt schon ein einfaches Dimensionsargument, daß durch den Masseterm die Renormierbarkeit zerstört wird: Der Propagator eines freien massiven Vektorfeldes (Proca-Feld) besitzt einen longitudinalen Anteil der Form $k^\mu k^\nu/k^2$. D.h. der Propagator ist von Impulsordnung $O(1)$, statt von der Ordnung $O(k^{-2})$ wie im Falle masseloser Vektorfelder.

Es gibt aber eine Möglichkeit, den Eichfeldern Masse zu verleihen, ohne daß die Eichinvarianz der Lagrangedichte zerstört wird, und zwar durch den Higgs-Kibble-Mechanismus. Dabei handelt es sich um die spontane Brechung der Eichsymmetrie. Unter spontaner Symmetriebrechung versteht man dabei, daß die zugrundeliegende Lagrangedichte die Symmetrie respektiert, nicht aber der

Grundzustand (also das Vakuum) der Theorie. Ein weiteres Charakteristikum dabei ist, daß der Grundzustand entartet ist.

Nun betrachten wir eine Eichtheorie der eben dargestellten Art. Wir wollen aber o.B.d.A. eine rein reelle Darstellung wählen, d.h. alle Felder sollen im folgenden reell sein. Dies bedeutet keine Einschränkung: Haben wir eine Eichgruppe, die in Form einer komplexen Darstellung auf den Materiefeldern operiert, können wir durch einfache Aufspaltung dieser Felder in Real- und Imaginärteil eine reelle Darstellung erzeugen. Wir wollen von der Eichgruppe nur voraussetzen, daß sie eine kompakte halbeinfache Liegruppe ist oder in das direkte Produkt solcher Liegruppen zerfällt. Unter dieser Voraussetzung ist die reelle Darstellung o.B.d.A. orthogonal wählbar. Im komplexen Falle ist sie unitär wählbar, und durch die kanonische reelle Form derselben wird diese ebenfalls orthogonal.

Zerfällt die Gruppe in mehr als einen halbeinfachen Faktor, kann jedem dieser Faktoren eine andere Kopplungskonstante zugeordnet werden. Da die zu jedem Faktor gehörigen Eichfelder voneinander unabhängig sind und nicht miteinander wechselwirken, ergibt sich gegenüber dem Fall einer halbeinfachen Eichgruppe nichts wesentlich neues. Daher müssen wir lediglich eine halbeinfache kompakte Eichgruppe betrachten.

Sei also G eine kompakte halbeinfache Liegruppe. Diese Gruppe wirkt mittels einer orthogonalen Darstellung auf \mathbb{R}^n -Feldern Φ . Diese Gruppe wird nun in dem oben dargestellten Sinne zur Eichgruppe einer Eichfeldtheorie. Die Materiefelder werden als masselos vorausgesetzt, und die Eichfelder sind es nach Konstruktion. Zusätzlich führen wir aber noch eine Selbstwechselwirkung der Materiefelder ein, so daß die Lagrangedichte folgende Gestalt besitzt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\Phi) - V(\Phi). \quad (1.28)$$

Dabei werden die Bezeichnungen vom vorigen Abschnitt übernommen, nur daß die Liealgebrenbasis $(-i)T^a$ von $\mathcal{L}G$ jetzt eine Unteralgebra von $\text{so}(n)$ aufspannen, d.h. die T^a sind antisymmetrisch und rein imaginär.

Entscheidend für das Auftreten spontaner Symmetriebrechung ist nun die Wahl des Potentials. Dieses darf für eine renormierbare Theorie ein Polynom höchstens vierten Grades in Φ sein. Wie wählen es so, daß die Eichinvarianz der Theorie erhalten bleibt:

$$V(\Phi) = -\frac{\mu^2}{2}\Phi^t\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^t\Phi)^2. \quad (1.29)$$

Dieses hat die typische Form eines mexikanischen Hutes: Klarerweise ist der Zustand niedrigster Energie nicht mehr durch $\Phi = 0$ gegeben ist, sondern durch die konstanten Felder mit $\Phi^t\Phi = \mu^2/\lambda$. Diese bilden eine Hypersphäre im \mathbb{R}^n . Das Vakuum ist also entartet. Dies bedeutet, daß wir mit diesem Potential eine spontane Symmetriebrechung erreicht haben: Die Lagrangedichte und damit auch die Wirkung der Theorie ist invariant unter der Wirkung der Gruppe G , aber jeder der überabzählbar vielen Grundzustände ist es nicht.

Wollen wir in gewöhnlicher Weise Störungstheorie betreiben und Feynmanregeln aufstellen, müssen wir ein Vakuum v auszeichnen. Mit $\Phi = v + \sigma$ setzen sind dann die σ wieder Felder mit verschwindendem Vakuumerwartungswert. Wir rechnen jedoch zunächst noch mit den Feldern Φ weiter. Die Wahl des Vakuums auf der Hypersphäre ist willkürlich. Es ist ein beliebiges lokales Minimum des Potentials V . Es gilt also

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\Phi_i}\right|_{\Phi=v} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j}\right|_{\Phi=v} \text{ positiv semidefinit.} \quad (1.30)$$

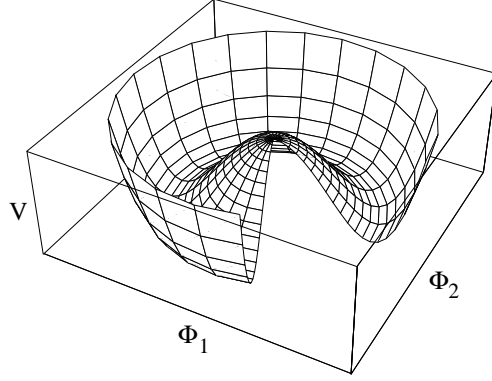


Abbildung 1.1: Das symmetriebrechende Potential

Weiter wissen wir, daß das Potential unter der Gruppe G invariant ist. Für infinitesimale Transformationen $\delta\Phi = -i\delta\epsilon^a T^a \Phi$ gilt also:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} \delta\epsilon^a T_{ij}^a \Phi_j = 0. \quad (1.31)$$

Leitet man diese Gleichung nach Φ_k ab und setzt $\Phi = v$, so erhält man unter Berücksichtigung von (1.30) und der Tatsache, daß $\delta\epsilon^a$ ein beliebig wählbarer Vektor aus \mathbb{R}^N ist (N sei die Dimension der Gruppe G):

$$\forall a = 1 \dots N : T_{ij}^a \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \partial \Phi_k} \Big|_{\Phi=v} v_j = 0. \quad (1.32)$$

Sei nun H die Untergruppe von G , die auf dem Vakuum trivial operiert, also die Standuntergruppe von v . Wir wählen im folgenden die Basis der Liealgebra $\mathcal{L}G$ so, daß die T^a für $a = 1 \dots r$ die Unterliealgebra $\mathcal{L}H$ und die T^a für $a = (r+1) \dots N$ die Nebenklasse G/H aufspannen, d.h. es gilt

$$T^a v = 0 \text{ für } a = 1 \dots r; \quad \sum_{a=r+1}^N \epsilon_a T^a v \neq 0 \Leftrightarrow \forall a = (r+1) \dots N : \epsilon^a = 0. \quad (1.33)$$

Ein Blick auf (1.32) zeigt, daß die Massenmatrix

$$M_{ik}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi_i \partial \Phi_k} \Big|_{\Phi=v} \quad (1.34)$$

der σ -Felder mindestens $N - r$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 0 besitzt. Diese werden Goldstonemoden $T^a v$ mit $a = r+1, \dots, n$ genannt. Daß diese linear unabhängig sind, folgt unmittelbar aus (1.33). Wir bezeichnen den Untervektorraum von \mathbb{R}^n , der von den Goldstonemoden aufgespannt wird, im folgenden als V_G . Die von ihm aufgespannten Felder sind stets masselos.

Das orthogonale Komplement von V_G bezeichnen wir mit V_H , und seine Basisvektoren werden Higgsmoden genannt. Die von ihnen aufgespannten Felder, die Higgsfelder, können massiv sein. Für die Higgsmoden gilt also

$$\tilde{\Phi} \in V_H \Leftrightarrow \forall a = 1 \dots N : \tilde{\Phi}^t T^a v = 0, \quad (1.35)$$

wobei diese Gleichung für $a = 1 \dots r$ wegen (1.33) trivial ist und für die übrigen a die Orthogonalitätsforderung darstellt.

Als nächstes zeigen wir, daß sich eine Basis von \mathbb{R}^n durch Wirkung der Gruppe G auf die Higgsmoden erzeugen läßt. Sei dazu Φ ein beliebiger Vektor aus \mathbb{R}^n und $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $F(g) = v^t g \Phi$, wobei g die darstellende Matrix eines beliebigen Gruppenelements auf \mathbb{R}^n ist. Da G kompakt ist, existiert eine Parametrisierung von G mit kompaktem Parameterbereich $K \subset \mathbb{R}^N$. Wegen der Stetigkeit der Funktion F nimmt sie nach dem Satz von Weierstraß ihr Maximum an. Sei g_Φ eine Maximalstelle. Da G eine Liegruppe ist, ist sie an jeder Stelle des Parameterraums differenzierbar. Sei $g(t_0) = g_\Phi$. Dann gilt notwendig

$$\forall a = 1 \dots N : \left. \frac{\partial F[g(t)]}{\partial t^a} \right|_{t=t_0} = v^t \left. \frac{\partial g}{\partial t^a} \right|_{t=t_0} \Phi = 0. \quad (1.36)$$

Nun spannen aber die Ableitungen von g an der Stelle t_0 den Tangentialraum von G an der Stelle g_Φ auf. Dieser wird aber auch von den Liealgebrenenlementen $T^a g_\Phi$ aufgespannt. D.h. es folgt, daß

$$\forall \Phi \in \mathbb{R}^n \exists g_\Phi \in G \forall a = 1 \dots N : v^t T^a g_\Phi \Phi = 0. \quad (1.37)$$

Damit ist aber $g_\Phi \Phi$ eine Linearkombination von Higgsmoden, aus dem durch Anwendung von g_Φ^{-1} der oben willkürlich vorgegebene Vektor Φ zurückgewonnen werden kann, also in der Tat aus einem Higgsfeld durch Wirkung der Gruppe erzeugt wird. Dieser Beweis ist aus [Wei96] übernommen.

All diese Betrachtungen gelten nun unabhängig davon, ob G die Gruppe einer globalen Symmetrie oder einer lokalen Symmetrie der Wirkung der Feldtheorie ist. Der wesentliche Unterschied liegt aber nun in der physikalischen Interpretation der Goldstonefelder. Im Falle der spontanen Brechung einer globalen Symmetrie folgt aus den obigen Betrachtungen einfach, daß es masselose Felder geben muß. Diese sind anschaulich so zu deuten, daß sie die Drehung des willkürlich ausgezeichneten Vakuums in einen anderen Zustand derselben Energie bewirken. Das erfordert aber keine Arbeit, so daß die entsprechenden Teilchen masselos sind.

Im Falle einer lokalen Symmetrie, wenn also G eine Eichgruppe ist, können wir aufgrund des eben hergeleiteten Resultats, jedes Φ -Feld durch die Gruppenwirkung auf ein Higgsfeld $\tilde{\Phi}$ darstellen:

$$\forall \Phi(x) \exists g(x) \in G; \tilde{\Phi}(x) \in V_{\text{Higgs}} : \Phi(x) = g(x) \tilde{\Phi}(x). \quad (1.38)$$

Da $g(x) = \exp[-ig\chi^a(x)T^a]$ ist, und für die Higgsfelder nach den obigen Betrachtungen $T^a \tilde{\Phi}(x) = 0$ für $a = 1 \dots r$, lassen sich alle Φ -Felder in der Form

$$\Phi(x) = \exp \left[ig \sum_{a=r+1}^N \chi^a(x) T^a \right] \tilde{\Phi}(x) \quad (1.39)$$

darstellen. Dies ist im Falle einer globalen Symmetrie nicht möglich, weil dann die Gruppenoperationen nicht vom Raum-Zeitvektor x abhängen dürfen.

Wie wir oben gesehen haben, sind von den n Φ -Feldfreiheitsgraden $n - (N - r)$ Higgsfelder und $N - r$ Goldstonefelder. Aufgrund der Parametrisierung der Φ -Felder durch (1.39), sehen wir, daß im Fall einer spontan gebrochenen Eichsymmetrie durch Fixierung der Eichung die Goldstonefelder in die Eichbosonenfelder absorbiert werden können. Dazu müssen wir nur die Eichtransformation

$$\Phi(x) \mapsto V(x)\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x); \mathcal{A}^\mu \rightarrow V(x)\mathcal{A}_\mu V^{-1}(x) - V(x) \frac{i}{g} [\partial_\mu V^{-1}(x)] \quad (1.40)$$

durchführen, wobei

$$V(x) = \exp \left[-ig \sum_{a=r+1}^N \chi^a(x) T^a \right] \quad (1.41)$$

ist. Diese Wahl legt die Eichung fest. Die Eichbedingungen sind durch die Forderung gegeben, daß $\tilde{\Phi}$ ein Higgsfeld ist. Jetzt führen wir auch $\tilde{\Phi}(x) = v + \sigma(x)$ ein. Durch diese Eichung sind nun tatsächlich die durch die $\chi^a(x)$ ($a = r + 1 \dots N$) parametrisierten Goldstonebosonen in den Eichfeldern absorbiert. Jetzt rechnen wir die Lagrangedichte bzgl. dieser Eichung aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + g^2 v^t \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu v + \\ &+ (\partial^\mu \sigma)^t (\partial_\mu \sigma) - \lambda (v^t \sigma)^2 + \\ &+ ig [(\partial^\mu \sigma)^t \mathcal{A}_\mu \sigma - \sigma^t \mathcal{A}^\mu (\partial_\mu \sigma)] + \\ &+ g^2 \sigma^t \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu v + g^2 \sigma^t \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu \sigma - \\ &- \frac{\lambda}{4} (\sigma^t \sigma)^2 - \lambda \sigma^2 (v \sigma) + \frac{\mu^4}{4\lambda}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Der zweite Term in der ersten Zeile bedeutet, daß die Eichfelder tatsächlich massiv geworden sind. Da $T^a v = 0 \Leftrightarrow a = 1 \dots r$, besitzen genau $(N - r)$ Eichfelder eine Masse. Das erklärt auch das ‘‘Verschwinden’’ der Goldstone Felder: Ein masseloses Vektorfeld besitzt zwei Freiheitsgrade (transversale Polarisationen), ein massives hingegen drei. Das bedeutet, daß die Goldstonefelder die longitudinalen Freiheitsgrade der aufgrund der spontanen Brechung der Eichsymmetrie massiv gewordenen Eichbosonen liefern. Wir bemerken noch, daß ein Feld massiver Teilchen mit Spin 1 drei, nicht vier Freiheitsgrade besitzt, weil der vierte Freiheitsgrad dem Spin 0 entspricht. Dies folgt aus einer Zwangsbedingung zweiter Art für das freie Spin-1-Feld, nämlich $\partial_\mu A^\mu = 0$, die ihrerseits eine Konsistenzbedingung für die Lösungen der Feldgleichungen darstellt.

Wir bemerken zum Schluß, daß die Theorie noch durch beliebige weitere Materiefelder erweitert werden kann, soweit sie die Eichinvarianz der Theorie nicht zerstören, d.h. diese Felder müssen sich mit einer beliebigen unitären Darstellung der Eichgruppe transformieren.

1.1.3 Anwendung auf das $\pi\rho$ -System

Für die phänomenologische Beschreibung des $\pi\rho$ -Systems hat sich das Vektordominanzmodell [KLZ67] bewährt. Dieses Modell ist zunächst auf die Beschreibung der beiden geladenen Pionen und des neutralen ρ -Mesons beschränkt. Hierbei ist das ρ -Meson ein abelsches $U(1)$ Eichfeld, und in diesem Falle läßt sich der Masseterm in naiver Weise einführen. Wir wollen nun ein renormierbares Vektordominanz-Modell aller Pionen und ρ -Mesonen aufstellen. Dies geschieht mit dem eben beschriebenen Higgs-Kibble-Formalismus. Da wir drei massive Vektorbosonen beschreiben wollen, bietet sich als Eichgruppe $SU[2]$ an. Der Higgssektor wird durch die niedrigste nichttriviale Darstellung dieser Gruppe, die Fundamentaldarstellung, realisiert, d.h. die Higgs- und Goldstonefelder werden durch vier reelle Feldfreiheitsgrade Φ aufgespannt.

Die Pionen stellen wir durch drei reelle skalare Felder $\vec{\pi}$ dar, die sich nach der $SO[3]$ -Fundamentaldarstellung transformieren. Die Generatoren dieser Gruppe sind in dieser Darstellung durch

$$T^a_{ik} = -i\epsilon_{aik} \quad (1.43)$$

gegeben. Es sei betont, daß diese Eichgruppe nichts mit der starken Isospin-Gruppe der Pionen zu tun hat, sondern eine sog. ‘‘hidden gauge’’-Gruppe ist, die allein dazu dient, drei massive

ρ -Mesonen mit Hilfe des oben beschriebenen Higgs-Kibble-Formalismus' zu beschreiben. Nach Durchführung dieses Formalismus' bleibt aber eine globale $SU[2]$ -Symmetrie übrig, die die Rolle der Isospinsymmetrie übernimmt, wobei sich der Higgsfreiheitsgrad der σ -Felder der gebrochenen Eichtheorie trivial unter der Isospingruppe transformiert, und dies ist dann die Isospingruppe.

Weiter unten werden wir diesen hadronischen Sektor um das elektromagnetische Feld erweitern. Um die Niederenergiethoreme, die aus der explizit schwach gebrochenen (kleine π -Masse) chiralen Symmetrie resultieren, zu berücksichtigen, können wir eine beliebige Realisierung der chiralen Gruppe benutzen (vgl. [DGH92]). Wir entscheiden uns hier der Renormierbarkeit wegen für das sog. lineare σ -Modell ([DGH92]). Wir können unser Vorgehen kurz als Eichung des linearen σ -Modells bezeichnen. Dabei wird sich die Vektormesondominanz und Universalität der starken Kopplung von selbst einstellen. Wir bemerken noch, daß die allgemeinste Aufstellung einer effektiven Theorie dieser Art in [BK84] durch nichtlineare Realisierung der Eichgruppe, eben der "hidden gauge group" beschrieben wird. Diese Theorien enthalten Ableitungskopplungen in beliebiger Ordnung und sind nur im erweiterten Sinne wie in [Wei96] beschrieben, renormierbar. Für die Forderung der Renormierbarkeit im engeren Sinne müssen wir als Preis ein unphysikalisches Higgsteilchen hinnehmen.

Die $SU[2]$ wirkt wie folgt auf die Higgsfelder Φ :

$$U[\vec{\alpha}]\Phi = \exp[-ig\vec{\alpha}\vec{\tau}]\Phi, \quad (1.44)$$

wobei $\vec{\tau} = \vec{\sigma}/2$ ist. Dabei bezeichnet $\vec{\sigma}$ die Paulimatrizen in ihrer Darstellung als antisymmetrische rein imaginäre Matrizen, die aus den wohlbekannteren komplexen Paulimatrizen durch einfaches Trennen von Real- und Imaginärteil hervorgehen. Wir nehmen für diese Felder die Wirkung des Potentials (1.33) an und wählen für das Vakuum $v = (\mu/\sqrt{\lambda}, 0)^t$ und die Felder $\Phi = v + \sigma$. Da keine der drei Paulimatrizen das Vakuum annulliert, haben wir drei Goldstonefelder, und somit werden alle drei Eichfelder massiv, wie es sein soll.

Bei Wahl der oben definierten unitären Eichung setzen wir (vgl. (1.39)):

$$\Phi = \exp[-ig\vec{\Theta}\vec{\tau}](v + H); \quad H \parallel v, \quad (1.45)$$

und (1.42) ergibt für die Masse des Higgsbosons $m_H = \sqrt{2}\mu$. Wegen (1.42) ist die ρ -Masse $M_\rho^2 = (\mu^2 g^2)/(2\lambda)$.

Um die Photonen in dieses Bild einzufügen, erweitern wir die Eichgruppe zu dem direkten Produkt $U[1] \times SU[2]$.

Da die $SU[2]$ -Fundamentaldarstellung irreduzibel ist und der Generator der $U[1]$ mit allen Generatoren der $SU[2]$ vertauscht, muß dieser diagonal sein:

$$Q = \frac{1}{2} \text{diag}(1, 1). \quad (1.46)$$

Die Wirkung der $U[1]$ auf Φ ist die Multiplikation mit dem Phasenfaktor $\exp(ie/2)$. Da $Qv \neq 0$ ist, läßt diese $U[1]$ das Vakuum nicht invariant, folglich erhält man in der Lagrangedichte einen Masseterm für das dazugehörige $U[1]$ -Eichfeld, das wir mit A_μ^0 bezeichnen wollen.

Andererseits ist die Gruppe nicht halbeinfach, und somit die Killingform nicht regulär. Die Massenmatrix für die nunmehr vier Eichbosonen ist demzufolge nicht diagonal, denn wegen (1.42)

ist

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{e^2}{2g^2} M_\rho^2 & 0 & 0 & \frac{e}{2g} M_\rho^2 \\ 0 & \frac{M_\rho^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_\rho^2}{2} & 0 \\ \frac{e}{2g} M_\rho^2 & 0 & 0 & \frac{M_\rho^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Jetzt greifen wir der Quantisierung der Theorie vorweg und benutzen, daß wir Terme $\propto k_\mu$ in den Propagatoren der Vektorbosonen nicht mitnehmen müssen, da diese weggeeeicht werden können. Sie tragen folglich zu physikalischen Matrixelementen nicht bei. Dies werden wir in den nächsten Abschnitten noch ausführlich begründen. In Feynmanzeichnung lautet der Photonenpropagator

$$iD_\gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2 - [(e/g)M_\rho]^2 + i\epsilon} \quad (1.48)$$

und der ρ -Propagator

$$iD_\rho^{ab\mu\nu}(k) = -\frac{i\delta^{ab}g^{\mu\nu}}{k^2 - M_\rho^2 + i\epsilon}. \quad (1.49)$$

Wir stellen diese Propagatoren wie folgt diagrammatisch dar: Den $\rho\gamma$ -Wechselwirkungsvertex

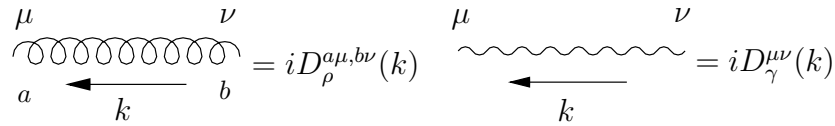


Abbildung 1.2: ρ - und γ -Propagatoren

der Massenmatrix lesen wir unmittelbar an der Lagrangedichte ab:

$$\Gamma_{\rho\gamma} = i\delta^{a3} \frac{e}{g} M_\rho^2. \quad (1.50)$$

Jetzt rechnen wir den aus diesem Vertex resultierenden Beitrag zur Polarisation der Photonen aus. Die Feynmanregeln ergeben für das Diagramm unter Beachtung, daß die äußeren Linien

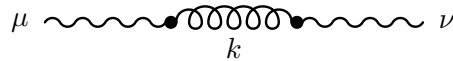


Abbildung 1.3: Baumgraphen-Beitrag zur Photonemasse

amputiert sind:

$$\Pi_\gamma^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \frac{e^2}{g^2} \frac{M_\rho^4}{k^2 - M_\rho^2}. \quad (1.51)$$

Die Lösung der Dysongleichung (entsprechend der Summation einer Neumannschen Reihe) lautet

$$D_\gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - \frac{e^2}{g^2} M_\rho^2 - \frac{e^2}{g^2} \frac{M_\rho^4}{k^2 - M_\rho^2}}. \quad (1.52)$$

Dabei besitzt D_γ als Funktion von $s = k^2$ an der Stelle $s = 0$ einen einfachen Pol mit Residuum $-g^{\mu\nu}$, wie es für ein masseloses Vektorboson sein muß.

Es ist klar, daß man durch eine unitäre Transformation erreichen kann, daß das Photon in der Lagrangedichte manifest masselos wird.

1.2 Quantisierung von Eichtheorien

Bei der Quantisierung von Eichtheorien treten mit der Eichinvarianz zusammenhängende Probleme auf. Ein entscheidender Schritt bei der Herleitung von Feynmanregeln ist nämlich die Einführung des freien Propagators, d.h. der Greenfunktion der freien Feldgleichungen mit Feynman-Stueckelberg-Randbedingungen. Dies ist aber weder bei masselosen noch massiven Vektorbosonen ohne weiteres möglich, weil stets Nebenbedingungen erfüllt werden müssen, die die Spin-1-Darstellungen der Poincarégruppe herausprojizieren.

Im Falle massiver Teilchen gilt die Transversalitätsbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Diese folgt als Konsistenzbedingung aus der freien Feldgleichung, d.h. in diesem Falle der Proca-Gleichung (Zwangsbedingung zweiter Art).

Im folgenden verwenden wir zur Quantisierung der Eichtheorien die Methode von Fadeev und Popov, die auf der Pfadintegralquantisierung beruht. Sie geht von der oben angestellten Überlegung aus, daß die Eichfelder einen Quotientenvektorraum bilden. Die Idee dieses Verfahrens beruht darauf, aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten zu wählen, so daß diese als gewöhnliche Felder interpretiert und eindeutig quantisiert werden können. Dies geschieht durch die Einführung von Zwangsbedingungen, die die Eichung festlegen.

Der nächste Schritt besteht darin, diese Zwangsbedingungen so in den Pfadintegralformalismus einzufügen, daß sie sich durch eine effektive Wirkung (bzw. eine effektive Lagrangedichte) ausdrücken lassen, aus der in der gewohnten Weise Feynmanregeln hergeleitet werden können. Letzteres kann dann sogar durch kanonische Quantisierung erfolgen. Das Ergebnis stimmt mit dem mit Hilfe des Pfadintegralformalismus' gewonnenen Resultat überein. Diese Beobachtung zeigt, daß die naive Quantisierung mit der Lagrangeschen Form des Pfadintegrals für Eichfelder trotz der Ableitungskopplungen korrekt ist. Dies läßt sich auch durch sorgfältige Ausführung der Integrationen über die kanonisch konjugierten Feldimpulse aus der Hamiltonschen Form des Pfadintegrals zeigen. Dies ist in übersichtlicher Form z.B. in ([Kap89]) dargestellt.

Zunächst wollen wir die redundante Integration über die Eichgruppe explizit machen. Dazu beachten wir, daß das Wirkungsfunktional der Eichtheorie unabhängig von der Wahl der Eichung ist, d.h. $S[\mathcal{A}_\mu] = S[\mathcal{A}'_\mu]$ wobei \mathcal{U} die Eichtransformation bezeichnet:

$$\mathcal{U}(x) = \exp(-ig\chi_k(x)T^k); \quad \mathcal{A}'_\mu = \mathcal{U}\mathcal{A}_\mu\mathcal{U}^\dagger - \mathcal{U}\partial_\mu\mathcal{U}^\dagger. \quad (1.53)$$

Durch Hinzufügen eines kleinen negativen Imaginärteils zur Masse eines jeden Feldes werden die Pfadintegrale regularisiert. Trotzdem ist ihre Konvergenz noch nicht gewährleistet, denn es wird über alle liealgebrawertigen Felder und nicht nur über die oben erklärten Äquivalenzklassen integriert, d.h. für jede Äquivalenzklasse wird einmal über die ganze Gruppe integriert, so daß das Pfadintegral nicht konvergent sein kann.

Andererseits bewirkt diese Integration nur einen von den Feldern unabhängigen unendlichen Faktor, der durch die Renormierung des erzeugenden Funktionals eliminiert wird.

Es gilt nun, die überflüssigen Integrationen über die Eichgruppe zu eliminieren, und zwar in der Art, daß man eine effektive Wirkung erhält, die mit Hilfe der üblichen Feynmangraphenmethode störungstheoretisch ausgewertet werden kann. Dies leistet der Faddeev-Popov-Formalismus, der im folgenden dargestellt werden soll.

Zunächst fixieren wir die Eichung dadurch, daß wir Zwangsbedingungen $g^i[\mathcal{A}_\mu] = 0$ einführen, die die Eichung eindeutig festlegen. Dabei sind die g^i geeignet gewählte Funktionale. Daß Funktionale mit der gewünschten Eigenschaft, die Eichung eindeutig festzulegen, existieren, ist keinesfalls

trivial und hat zu umfangreichen mathematischen Untersuchungen Anlaß gegeben, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen (Gribov-Problem). Wir werden im folgenden stets $g^i[\mathcal{A}_\mu] = \partial^\mu A_\mu^i$ wählen. Dies entspricht der Lorentzgleichung in der Elektrodynamik.

Wir bilden nun das Funktional

$$\Delta_g^{-1}[\mathcal{A}_\mu] = \int \mathcal{D}\mathcal{U} \delta(g^i[\mathcal{A}_\mu^{\mathcal{U}}]) \quad (1.54)$$

und bemerken, daß es ein unter Eichtransformationen invariantes, also ein auf den Klassen äquivalenter Eichfelder wohldefiniertes, Funktional ist:

$$\Delta_g^{-1}[\mathcal{A}^{\mathcal{U}'}] = \int \mathcal{D}\mathcal{U} \delta(g^i[\mathcal{A}^{\mathcal{U}'\mathcal{U}}]) = \int \mathcal{D}\mathcal{U}'' \delta(g^i[\mathcal{A}^{\mathcal{U}''}]) = \Delta_g^{-1}[\mathcal{A}_\mu]. \quad (1.55)$$

Dabei haben wir die Substitution $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}'\mathcal{U}$ sowie die Invarianz $\mathcal{D}\mathcal{U}'' = \mathcal{D}\mathcal{U}$ des Pfadintegralmaßes verwendet. Die Invarianz des Pfadintegralmaßes folgt unmittelbar daraus, daß die Gruppentopologie vermöge der durch die Gruppenoperationen gegebenen Translationen homogen ist. Damit schreibt sich das Pfadintegral in der Form

$$\int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp(iS[\mathcal{A}]) = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta_g[\mathcal{A}] \int \mathcal{D}\mathcal{U} \delta(g[\mathcal{A}^{\mathcal{U}}]) \exp(iS[\mathcal{A}]). \quad (1.56)$$

Führen wir jetzt hierin eine Eichtransformation durch, folgt wegen der Invarianz von $S[\mathcal{A}]$, $\Delta_g[\mathcal{A}]$ und $\mathcal{D}\mathcal{A}$

$$\int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp(iS[\mathcal{A}]) = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta_g[\mathcal{A}] \int \mathcal{D}\mathcal{U} \delta(g[\mathcal{A}]) \exp(iS[\mathcal{A}]). \quad (1.57)$$

Der Integrand ist nun unabhängig von \mathcal{U} , so daß das Integral über die Gruppe, wie erwartet, einen unendlichen von \mathcal{A} unabhängigen Faktor ergibt. Folglich bedeutet diese Integration nur eine Renormierung des erzeugenden Funktionals $Z[j]$ (s.u.). Da durch die Normierungsforderung $Z[0] = 1$ der Faktor von Z festliegt, stellt dies kein Problem für die Bestimmung des Funktionals dar.

Damit haben wir für das Pfadintegral des Eichfeldes:

$$\int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta_g[\mathcal{A}] \delta(g[\mathcal{A}]) \exp(iS[\mathcal{A}]). \quad (1.58)$$

Jetzt bleibt noch zu zeigen, wie diese Vorschrift zur Integration über das Eichfeld als effektive Wirkung geschrieben werden kann. Dazu müssen wir zunächst $\Delta_g[\mathcal{A}]$ berechnen. Betrachten wir g als Funktional von \mathcal{U} und wechseln die Integrationsvariable nach g , erhalten wir gemäß (1.55)

$$\begin{aligned} \Delta_g^{-1}[\mathcal{A}] &= \int \mathcal{D}g \det \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta g} \right) \delta(g) = \\ &= \det \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta g} \right)_{g=0} \Rightarrow \Delta_g[\mathcal{A}] = \det \left(\frac{\delta g}{\delta \mathcal{U}} \right)_{g=0}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Es sei der Vollständigkeit halber erwähnt, daß Probleme auftreten können, wenn $g : G \rightarrow \mathbb{C}^N$ nicht bijektiv ist. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, daß das Verfahren jedenfalls in einem störungstheoretischen Rahmen mit $SU[n]$ -Gruppen als Eichgruppen nicht zu Widersprüchen führt.

Wir parametrisieren die Eichgruppe nun via $\mathcal{U} = \exp(-ig\chi_a \mathcal{T}^a)$, wobei die \mathcal{T}^a mit $a = 1 \dots N$ wie oben eine Liealgebrenbasis der Eichgruppe bilden. Dann wird $\Delta_g = \det\left(\frac{\delta g^a}{\delta \chi^b}\right)$, und damit schreibt sich das Pfadintegral

$$\int \mathcal{D}\mathcal{A} \delta(g[\mathcal{A}]) \det\left(\frac{\delta g}{\delta \chi}\right) \exp(iS[\mathcal{A}]). \quad (1.60)$$

Jetzt wählen wir eine neue Eichung indem wir $g[\mathcal{A}]$ durch $g[\mathcal{A}] - c$ ersetzen, wobei $c: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^N$ eine von \mathcal{A} unabhängige Funktion ist. Weiter kann man das Pfadintegral mit einer beliebigen Gewichtsfunktion über c integrieren, weil dies wegen der Eichunabhängigkeit des ursprünglichen Pfadintegrals nur zu einer weiteren Renormierung des erzeugenden Funktionals Z führt.

Da wir die eichfixierende Funktion g linear in \mathcal{A} wählen und eine störungstheoretische Auswertung des Pfadintegrals anstreben, also das Pfadintegral als Integral über die Exponentialfunktion eines effektiven Wirkungsfunktionalen schreiben wollen, bietet sich dazu der Faktor

$$\int \mathcal{D}c \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x cc\right) \delta[g - c] = \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x gg\right) \quad (1.61)$$

mit einer willkürlichen Konstanten ξ an. Damit wird das erzeugende Funktional schließlich

$$\begin{aligned} Z[J] = & N \int \mathcal{D}\mathcal{A} \det\left(\frac{\delta g}{\delta \chi}\right) \exp\left[iS[\mathcal{A}] + \right. \\ & \left. + i \int d^4x \left(J^{\mu a}(x) A_\mu^a(x) - \frac{1}{2\xi} g(x)g(x)\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Jetzt müssen wir nur noch die Funktionaldeterminante mit Hilfe des Pfadintegrals ausdrücken. Da diese Determinante im Zähler auftritt, muß dies durch Pfadintegration über antikommutierende Grassmann-Felder nach Berezin ausgeführt werden. Dynamisch gesehen entspricht dies fermionischen Feldern. Diese können jedoch nicht physikalischer Natur sein, weil dies dem Spin-Statistik-Theorem und somit den Grundprinzipien der lokalen Quantenfeldtheorien widerspricht. Wir werden weiter unten in der Arbeit noch sehen, daß diese Felder thermodynamisch gesehen bosonischer Natur sind, weil sie lediglich dazu dienen, in jeder Ordnung Störungsrechnung die unphysikalischen Beiträge der bosonischen Eichfelder zu kompensieren. Es gilt

$$\det\left(\frac{\delta g}{\delta \chi}\right) \propto \int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp\left(-i \int d^4x d^4y \eta^{*a}(x) \frac{\delta g^a[\mathcal{A}(x)]}{\delta \chi^b(y)} \eta^b(y)\right). \quad (1.63)$$

Die Proportionalitätskonstante geht wieder in den allgemeinen Normierungsfaktor des erzeugenden Funktionals ein und braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden.

Man nennt die η -Felder Faddeev-Popov-Geister (im Fall der abelschen Eichtheorie (insbesondere in der Elektrodynamik) heißt das Analogon Feynman-Geist). Sie transformieren sich bei Eichtransformationen unter der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Diese Feldfreiheitsgrade entsprechen, wie schon oben betont, keinen physikalischen Teilchen, sondern dienen lediglich dazu, ebenfalls unphysikalische Anteile aus Diagrammen mit inneren Eichbosonenlinien zu eliminieren. Dies folgt daraus, daß entsprechend dem fermionischen Charakter dieser Felder die Feynmanregeln für jede geschlossene Geistschleife in einem Diagramm einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel verlangen (Schleifenregel für Fermionenschleifen). Einen Beweis für die Schleifenregel findet sich in [Ram89].

Das erzeugende Funktional für das Eichfeld lautet somit

$$Z[J, j^*, j] = \int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i S_{\text{eff}}[\mathcal{A}, \eta^*, \eta] + i \int d^4x (J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \eta^*(x) j(x) + j^*(x) \eta(x)) \right]. \quad (1.64)$$

Dabei ist die effektive Wirkung

$$S_{\text{eff}}[\mathcal{A}, \eta^*, \eta] = S[\mathcal{A}] - \frac{1}{2\xi} \int d^4x g^a(x) g^a(x) - \int d^4x d^4y \eta^{*a}(x) \frac{\delta g^a(x)}{\delta \chi^b(y)} \eta^b(y). \quad (1.65)$$

Nun berechnen wir $\frac{\delta g}{\delta \chi}$ im Falle der ‘‘Lorentzzeichnung’’, d.h. für das Funktional

$$g^a = \partial^\mu A_\mu^a. \quad (1.66)$$

Eine infinitesimale Eichtransformation schreibt sich gem. (1.20):

$$\delta A_\mu^c = \partial_\mu \delta \chi^c + g f^{abc} \delta \chi^a A_\mu^b. \quad (1.67)$$

Daraus folgt

$$\frac{\delta g^a(x)}{\delta \chi^b(y)} = \int d^4z \frac{\delta g^a(x)}{\delta A_\nu^c(z)} \frac{\delta A_\nu^c(z)}{\delta \chi^b(y)} = [\delta^{ab} \square_x + g f^{abc} \partial_{x\mu} A^{c\mu}(x)] \delta^{(4)}(x-y) \quad (1.68)$$

Setzt man (1.68) in (1.63) ein, erhalten wir als weiteren Beitrag zur Wirkung im Fall der Lorentzzeichnung:

$$S_{\text{Geist}} = \int d^4x (\partial_\mu \eta^{a*}) \underbrace{\left(\partial^\mu \eta^a + g f^{abc} A^{c\mu} \eta^b \right)}_{(\mathcal{D}^\mu \eta)^a}. \quad (1.69)$$

Dabei haben wir von der Lorentzzeichnung bereits Gebrauch gemacht, was wegen der Integration über c gerechtfertigt ist.

Im Fall einer abelschen Eichgruppe verschwinden die Strukturkoeffizienten f^{abc} identisch, so daß die Geistfelder von allen übrigen Feldern abkoppeln, d.h. das Feynmanintegral über die Geistfelder läßt sich ausintegrieren und trägt lediglich zur Renormierungskonstante des Funktionals bei. Im Falle der abelschen Eichtheorie (z.B. der Elektrodynamik, bei der die Eichgruppe die $U[1]$ ist) benötigt man die Geistfelder also in der effektiven Wirkung nicht, und sie können bei der Aufstellung der Feynmanregeln weggelassen werden. Dies trifft aber nicht für die Berechnung der Zustandssumme im Falle der Gleichgewichtsthermodynamik zu. In diesem Falle kompensieren die zwei Geistfeldfreiheitsgrade die beiden überzähligen Freiheitsgrade des Photonenfeldes, also den longitudinalen raumartigen und den zeitartigen Freiheitsgrad des Vektorfeldes A^μ .

Jetzt können wir das Ergebnis unserer Überlegungen für die nichtabelsche Theorie in der folgenden effektiven Lagrangedichte zusammenfassen, die wir aus der Wirkung (1.65) unter Verwendung von (1.69) ablesen:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu}) (\partial_\nu A^{a\nu}) + (\partial_\mu \eta^a)^* (\partial^\mu \eta_a + g f^{abc} A_c^\mu \eta_a). \quad (1.70)$$

Hinzu kommen noch fermionische oder bosonische Teilchenfelder, in unserem Falle die Pionfelder. Wie oben gezeigt, erhält man deren Beitrag zur Lagrangedichte aus den entsprechenden freien Lagrangedichten dieser Felder indem man alle partiellen Ableitungen durch die im Sinne der Eichtransformationen kovarianten Ableitungen ersetzt. Dabei ist es entscheidend für die Eichinvarianz der Theorie, daß die Kopplungskonstanten für alle Felder, die sich unter Eichtransformation mit einer halbeinfachen Eichgruppe transformieren, gleich sind (Universalität).

Es können aber durchaus Felder benutzt werden, die sich mit verschiedenen Darstellungen der Eichgruppe transformieren. In die weiter unten herzuleitenden Slavnov-Taylor-Identitäten (die eine Verallgemeinerung der Ward-Takahashi-Identitäten der QED darstellen) gehen nämlich nur von der Darstellung der Eichgruppe unabhängige Eigenschaften wie die Strukturkonstanten der dazugehörigen Liealgebra ein.

Die Slavnov-Taylor-Identitäten sind entscheidend für den Beweis wesentlicher Eigenschaften der Eichfeldtheorien, nämlich ihre Renormierbarkeit und die Unabhängigkeit physikalischer Größen (z. B. S -Matrix-Elementen) von der Eichfixierung. Wir gehen weiter unten auf die letztgenannte Behauptung näher ein.

Wir wollen nun die Feynmanregeln der Störungstheorie herleiten. Dabei bedient man sich am besten der Darstellung der Felder im Impulsraum. Daher betrachten wir kurz einige Eigenschaften der fouriertransformierten Felder:

Sei dazu $F(x)$ ein Feld. Wir definieren dessen Fouriertransformierte durch

$$F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} F(p) \exp(ipx). \quad (1.71)$$

Dann gilt offenbar

$$\partial_\mu F(x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_\mu F(p) \exp(ipx). \quad (1.72)$$

Weiter ist für zwei Felder F und G :

$$\begin{aligned} \int d^4 x F(x) G(x) &= \int d^4 x \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} F(p_1) G(p_2) \exp[i(p_1 + p_2)x] \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) F(p_1) G(p_2). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für Produkte aus drei und mehr Feldern. Aus dem Pfadintegralformalismus gewinnt man das erzeugende Funktional $Z[J]$, aus dem die allgemeinen n -Punktfunktionen durch Funktionalableiten nach J folgen. Im Impulsraum ist aufgrund der Translationsinvarianz allen n -Punkt-Funktionen der Faktor $(2\pi)^4 \delta(P)$ gemeinsam, wobei P die Summe der Impulsargumente der n -Punktfunktion ist. Diesen Faktor lassen wir in den Feynmanregeln weg und beachten dafür stets die Impulserhaltung an jedem Vertex.

Die Propagatoren erhält man aus der Wirkung, indem man durch partielle Integration alle Ableitungen in der freien Wirkung auf ein Feld bringt. Dabei fallen die Randterme stets weg, weil im Pfadintegral zur Bildung des erzeugenden Funktionals die Felder stets am Rande (d.h. in unserem Falle im Unendlichen) verschwinden. Die Propagatoren im Impulsraum sind stets das Inverse der bei der Fouriertransformation entstehenden Feld-Bilinearform der freien Wirkungen. Dabei ist zu beachten, daß das Pfadintegral durch Einführung eines infinitesimalen negativen Imaginärteils zur Masse eines jeden Feldes regularisiert werden muß. Dadurch werden die Propagatoren erst eindeutig festgelegt.

Durch ihre Polstruktur in der komplexen p_0 -Ebene wird garantiert, daß die Feldmoden mit positiver Energie sich retardiert, die Feldmoden mit negativer Energie avanciert zeitentwickeln. Dies ermöglicht die Deutung der Zustände mit negativer Energie als sich retardiert fortbewegende Antiteilchen mit positiver Energie (Feynman-Stueckelberg-Interpretation). Die Propagatoren mit dieser die Kausalität garantierenden Randbedingungen werden als Feynmanpropagatoren bezeichnet.

Als Beispiel berechnen wir den Feynmanpropagator für das Geistfeld. Es handelt sich dabei um ein masseloses Spin-0-Feld. Die freie Geistwirkung schreibt sich mit dem regularisierenden negativen Imaginärteil der Masse:

$$S_{\text{Geist}} = \int d^4x [(\partial_\mu \eta^{a*})(\partial^\mu \eta^a) + i\epsilon \eta^{a*} \eta^a] = - \int d^4x \eta^{a*} (\partial_\mu \partial^\mu - i\epsilon) \eta^a. \quad (1.74)$$

Fouriertransformation und die oben vereinbarte Vernachlässigung des impulserhaltenden δ -Distributionenfaktors ergibt für den freien Feynmanpropagator der Geistfelder:

$$G_{\text{Geist}}^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (1.75)$$

Der entsprechende Feynmangraph ist eine punktiert dargestellte Geistlinie. Nach den üblichen Feynmanregeln entspricht dieser Linie der Ausdruck $iG_{\text{Geist}}^{ab}(p)$. Im nächsten Abschnitt werden

$$a \cdots \cdots \cdots \blacktriangleleft \cdots \cdots \cdots b = iG_{\text{Geist}}^{ab}(p)$$

p

Abbildung 1.4: Feynmanregel für die Geistlinie

wir für das $\pi\rho$ -System die Feynmanregeln noch genauer herleiten.

1.3 Quantisierung des Higgsmodells

Zur Quantisierung der spontan gebrochenen Eichfeldtheorie muß man prinzipiell genauso vorgehen wie bei der Quantisierung der ungebrochenen. Zwar weist der Grundzustand nicht die volle Eichsymmetrie auf, wohl aber die Wirkung. Daher muß der Faddeev-Popov-Formalismus genauso ausgeführt werden wie im vorigen Abschnitt dargestellt.

Es ist aber (wenigstens im Falle nichtabelscher Eichtheorien) nicht möglich, die unitäre Eichung zu verwenden, weil diese nicht manifest renormierbar ist.

Wir erinnern uns daher der ursprünglichen Lagrangedichte mit dem die spontane Symmetriebrechung bewirkenden Potential.

Für das folgende ist es bequem, den Vektorraum der Teilchenfelder reell zu schreiben. Dementsprechend werden die Basismatrizen T^a der Liealgebra rein imaginär antisymmetrisch, so daß $iT^a \in \mathfrak{so}[n]$ ist. Da man auch komplexe lineare Gruppen in kanonischer Weise auf einem reellen Vektorraum darstellen kann, bedeutet diese Annahme keine Beschränkung der Allgemeinheit (s.o.).

Die Lagrangedichte lautet in der reellen Darstellung:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\Phi)^t(\mathcal{D}^\mu\Phi) - V(\Phi) \\ &\text{mit } V(\Phi) = -\frac{\mu^2}{2}\Phi^t\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^t\Phi)^2.\end{aligned}\quad (1.76)$$

Sei nun v das neue Vakuum. Gemäß (1.31) setzen wir $\Phi = v + \sigma$, so daß σ den Vakuumerwartungswert 0 besitzt. Mit Hilfe der neuen Felder schreibt sich die Lagrangedichte in der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^2(v^t\mathcal{A}_\mu)(v^t\mathcal{A}^\mu) + \\ &+ \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\sigma)^t(\mathcal{D}^\mu\sigma) - \tilde{V}(\sigma) - \\ &- igv^t\mathcal{A}_\mu\partial^\mu\sigma + g^2v^t\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu\sigma.\end{aligned}\quad (1.77)$$

Als nächstes müssen wir, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, eichfixierende Funktionale g^a einführen. Wir benutzen eine van 't Hooft-Eichung, die so gewählt ist, daß die gemischten in \mathcal{A}_μ und σ bilinearen Terme verschwinden:

$$g^a = \partial_\mu A^{\mu a} + ig\xi v^t T^a \sigma. \quad (1.78)$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) + \frac{g^2}{2}v^t\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu v - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})(\partial_\nu A^{\nu a}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\sigma)^t(\mathcal{D}^\mu\sigma) - \tilde{V}(\sigma) + g^2v^t\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu\sigma - \frac{g^2\xi}{2}(v^t iT^a\sigma)(v^t iT^a\sigma),\end{aligned}$$

wobei wir eine totale Divergenz weggelassen haben, da Lagrangedichten, die sich nur um eine totale Divergenz unterscheiden, äquivalent sind.

Zur Berechnung der Faddeev-Popov-Geist-Dichte benötigen wir aufgrund von (1.64) die Funktionalableitung

$$\frac{\delta g^a(x)}{\delta \chi^b(y)} = \int d^4z \left(\frac{\delta g^a(x)}{\delta A_\mu^c(z)} \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \chi^b(y)} + \frac{\delta g^a(x)}{\delta \sigma(z)} \frac{\delta \sigma(z)}{\delta \chi^b(y)} \right). \quad (1.79)$$

Dabei parametrisieren die χ^a die Eichtransformation wie in Gl. (1.20). Die Eichtransformation ist auf die Φ -Felder anzuwenden, und das Resultat muß durch die σ -Feldern ausgedrückt werden:

$$\delta\sigma = -ig\delta\chi_a T^a(v + \sigma); \quad \delta A_\mu^c = \partial_\mu\delta\chi^c + gf^{abc}\delta\chi^b A_\mu^c. \quad (1.80)$$

Dies in (1.79) eingesetzt und die Integration ausgeführt ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\delta g^a(x)}{\delta \chi^b(y)} &= \square_x \delta^{(4)}(x-y)\delta^{ab} - g\partial_x^\mu \delta^{(4)}(x-y) f^{abc} A_\mu^c(y) + \\ &+ g^2\xi v^t T^a T^b (v + \sigma)\delta^{(4)}(x-y).\end{aligned}\quad (1.81)$$

Setzen wir dies in (1.64) ein, finden wir nach Ausführung eines der beiden Integrale die Geist-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = (\partial_\mu \eta^{*a})(\mathcal{D}^\mu \eta)^a - g^2 \xi \eta^{*a} v^t T^a T^b v \eta^b - g^2 \xi \eta^a v^t T^a T^b \sigma \eta^b. \quad (1.82)$$

1.4 Eichinvarianz der S-Matrixelemente

Wir wollen jetzt zeigen, daß die physikalisch relevanten Aussagen der Theorie, nämlich die S-Matrixelemente, unabhängig von der gewählten Eichfixierung sind. Dies soll an der reinen Yang-Mills-Theorie mit ungebrochener Eichsymmetrie demonstriert werden. Ein allgemeiner Beweis dieser Aussage findet sich in [Wei96]. Dort wird gezeigt, daß für jeden Raum-Zeitpunkt über ein Haarmaß der Gruppe integriert wird und folglich die (zusammenhängenden) S-Matrixelemente, also Übergangsmatrixelemente eichinvarianter Feldoperatorprodukte bzgl. asymptotisch freier Feldoperatoren, eichunabhängig sind. Wir wollen hier jedoch gleichzeitig die Unitarität der S-Matrix zeigen. Dazu beschränken wir uns auf den Nachweis der Unabhängigkeit der S-Matrix vom Eichparameter ξ der R_ξ -Eichungen, und damit ist auch die Unitarität der S-Matrix gesichert, weil die R_ξ Eichung für $\xi \rightarrow \infty$ in die U-Eichung übergeht (unitärer Limes).

Die im vorigen Abschnitt durchgeführte Quantisierung der Eichtheorien hat gezeigt, daß die effektive Lagrangedichte die Struktur

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{F/B}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}} \quad (1.83)$$

besitzt. Dabei bedeuten die Terme auf der rechten Seite die Lagrangedichte der Yang-Mills-Felder, die Lagrangedichte der Fermionen- bzw. Bosonenfelder, den eichfixierenden Term und die Faddeev-Popov-Geister-Lagrangedichte.

Wir betrachten jetzt der Einfachheit halber eine Eichtheorie mit ungebrochener Symmetrie. Da die folgende Argumentation sich nur auf die Symmetrie der Lagrangedichte bezieht, ist sie auch für den Fall der gebrochenen Symmetrie durchführbar.

Der eichfixierende Term ist dann für die oben betrachtete Klasse von kovarianten Eichungen von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})(\partial_\nu A^{\nu a}), \quad (1.84)$$

und der dazugehörige Geistterm ergibt sich zu

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = (\partial_\mu \eta_a^*)(D_{ab}^\mu \eta_b). \quad (1.85)$$

Eichinvariant waren nur $\mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{F/B}}$. Die übrigen Terme brechen die Eichinvarianz. Wir wollen zeigen, daß die effektive Lagrangedichte invariant ist unter einer sog. BRST-Transformation ([BRS76, TF72]). Diese ist in infinitesimaler Form durch

$$\begin{aligned} \delta A^{\mu a} &= \delta\Theta D_{ab}^\mu \eta_b; \delta\Psi = -ig\delta\Theta T_a \eta_a \Psi; \\ \delta\eta_a^* &= -\frac{1}{\xi}\delta\Theta(\partial_\mu A^{\mu a}); \delta\eta_a = \frac{g}{2}\delta\Theta f_{abc}\eta_b\eta_c \text{ mit} \\ (\mathcal{D}_\mu\eta)_a &= \partial_\mu\eta_a + gf_{abc}A_\mu^c\eta_b \end{aligned} \quad (1.86)$$

gegeben. Dabei ist $\delta\Theta$ eine konstante Grassmannzahl und Ψ ein Fermionen- bzw. Bosonenfeld. Betrachten wir die Transformation näher, sehen wir, daß sie bzgl. der Ψ - und A -Felder eine Eichtransformation (1.20) mit $\delta\chi_a = \delta\Theta\eta$ ist.

Der Nachweis, daß die Lagrangedichte tatsächlich invariant unter der BRST-Transformation ist, kann sich also auf die Betrachtung von $\mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}}$ beschränken. Dazu muß man nur die BRST-Transformation in diese Summe einsetzen und die Jacobiidentität der Strukturkonstanten

$$f_{abd}f_{dcf} + f_{bcd}f_{daf} + f_{cad}f_{dbf} = 0 \quad (1.87)$$

ausnutzen. Es stellt sich heraus, daß $\delta\mathcal{L}_{\text{fix}} + \delta\mathcal{L}_{\text{Geist}}$ eine reine Viererdivergenz ist, und das bedeutet Invarianz der effektiven Wirkung, wie behauptet.

Da die Wirkung nur bilinear von den Geistfeldern abhängt und die Geistfelder Grassmannfelder sind, gilt

$$\int DA^\mu D\Psi D\Psi^* D\eta^* D\eta\eta_a^*(x) \exp\left[iS_{\text{eff}} + i\int d^4y(J_b^\mu A_\mu^b + \Psi^*\sigma + \sigma^*\Psi)\right] = 0. \quad (1.88)$$

Dabei sind J , σ und σ^* äußere Quellen für die Eichfelder bzw. Fermionen- oder Bosonenfelder. Das Pfadintegralmaß ist BRST-invariant. Wir vernachlässigen im folgenden die Fermionen- bzw. Bosonenfelder um die Schreibweise abzukürzen. Sie stellen für die folgende Argumentation kein Problem dar. Wir wenden nun eine BRST-Transformation auf das Integral an. Wegen der Invarianz der effektiven Wirkung und des Pfadintegralmaßes müssen dabei nur das Geistfeld und die Quellterme variiert werden:

$$\begin{aligned} & \int DA_\mu D\eta^* D\eta \int d^4x \left[\frac{1}{\xi} \partial_\mu A^{\mu a} + iJ_\mu^b \eta_a^* D_{bc}^\mu \eta_c \right] \times \\ & \times \exp[iS_{\text{eff}} + i\int d^4y J_\mu^b(y) A^{\mu b}(y)] = 0. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Das ist eine Slavnov-Taylor-Identität. Die allgemeinen Slavnov-Tayloridentitäten leiten wir im nächsten Abschnitt noch auf andere Weise her.

Diese Identität ist eine direkte Folge der BRST-Invarianz, die die Eichinvarianz der klassischen Yang-Mills-Theorie in der quantisierten Theorie widerspiegelt (s.u.). Die Slavnov-Taylor-Identität stellt das Analogon zu der Ward-Takahashi-Identität der QED dar. Wir benutzen sie nun zum Nachweis, daß die S-Matrixelemente nicht von ξ , d.h. die physikalisch relevanten Ergebnisse nicht von der Eichung abhängen.

Ändern wir nun ξ um $\Delta\xi$, folgt in erster Ordnung für die Änderung des erzeugenden Funktionals der n -Punkt-Funktionen:

$$\begin{aligned} \Delta Z[J] &= \int DAD\eta^* D\eta \int d^4x \left[\frac{i\Delta\xi}{2\xi^2} (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \right] \times \\ & \times \exp[i(S_{\text{eff}} + \int d^4y J_\nu^b A^{\nu b})]. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Durch Anwendung des Operators $\delta(x-z)\partial_{z\lambda}\frac{\delta}{\delta J^{\lambda a}(z)}$ auf die Slavnov-Taylor-Identität und Integration über x und z folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int DA^{\mu a} D\eta^* D\eta \int d^4x (\partial_\lambda A^{\lambda a}) \left(\frac{1}{\xi} \partial_\mu A^{\mu a} + iJ_{\mu b} \eta_a^* D_{bc}^\mu \eta_c \right) \times \\ & \times \exp[i(S + \int d^4y J_\nu^b A^{\nu b})]. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Setzt man dies in (1.90) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta Z_\xi &= \int DAD\eta D\eta^* \int d^4x \left[\frac{\Delta\xi}{2\xi} (\partial_\lambda A^{\lambda a}) J_\mu^b \eta_a^* D_{bc}^\mu \eta_c \right] \times \\ & \times \exp[i(S + \int d^4y J_\nu^b A_\nu^b)]. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Dies läßt sich als Näherung von linearer Ordnung in $\Delta\xi$ des Ausdrucks

$$Z_{\xi+\Delta\xi} = Z_{\xi} + \Delta Z_{\xi} = \int DA^{\mu} D\eta^* D\eta \exp \left[iS_{\text{eff}} + i \int d^4x J_{\mu}^b \left(A^{\mu b} - \frac{i\Delta\xi}{2\xi} (\partial_{\nu} A_{\nu}^a) \eta_a^* D_{bc}^{\mu} \eta_c \right) \right] \quad (1.93)$$

interpretieren. Die Gleichung zeigt, daß das erzeugende Funktional der n -Punkt-Funktionen von der Eichung abhängt. Damit ist klar, daß die n -Punkt-Funktionen selbst eichabhängig sind. Dadurch wird es auch verständlich, daß die manifeste Renormierbarkeit einer Theorie durch eine "ungeschickte" Wahl der Eichung zerstört werden kann. Insbesondere haben wir oben gesehen, daß die unitäre Eichung zu einer nicht manifest renormierbaren Theorie führt.

Andererseits ist aber die Fixierung der Eichung willkürlich. Wir haben nämlich oben gesehen, daß sie lediglich dazu dient, die überzähligen Integrationen über die Eichgruppe im Pfadintegral zu extrahieren. Durch die Eichfixierung wurde aus jeder Klasse des Quotientenvektorraums, der die Zustände eines Eichbosons beschreibt, ein Repräsentant ausgewählt, der dann wie ein gewöhnliches Feld behandelt werden konnte.

All dies zeigt, daß physikalisch relevante Ergebnisse nicht von der Wahl der Eichfixierung abhängen dürfen. D.h. die S-Matrix muß eichunabhängig sein. Dies läßt sich nun aber sofort einsehen. Man gelangt nämlich von den n -Punktfunktionen zu S-Matrixelementen durch die LSZ-Reduktionsformel. Diese besagt, diagrammatisch ausgedrückt, daß das S-Matrixelement für einen Prozeß aus allen Diagrammen mit einer den asymptotischen Anfangs- bzw. Endzuständen entsprechenden Wahl der äußeren Beinchen zu berechnen ist, wobei diese äußeren Beinchen amputiert werden und die ihnen zugeordneten Impulse der Massenschalenbedingung (reale Teilchen) $p^2 - m^2 = 0$ genügen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die exakten Greenfunktionen, als Funktionen von p^2 aufgefaßt, bei der physikalischen Masse einen einfachen Pol mit Residuum 1 besitzen. Alle Beiträge zur n -Punkt-Funktion, die von "off-shell"-Impulsen der äußeren Beinchen herrühren, verschwinden beim Amputieren. Eine auf dem Pfadintegralformalismus basierende Herleitung findet man in [BL86].

Beziehung (1.93) zeigt aber, daß die Änderung der Eichung lediglich eine Änderung des Feldes bewirkt, das an den äußeren Strom koppelt. Will man aber das Funktional als erzeugendes Funktional der physikalischen n -Punkt-Greenfunktionen deuten, muß die Änderung des Residuums durch Reskalierung dieser Funktion kompensiert (Renormierung) werden, so daß das Residuum 1 bleibt. D.h. aber, daß das S-Matrixelement tatsächlich unabhängig von ξ ist.

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, daß unser Beweis der Eichinvarianz der S-Matrix nicht ganz vollständig ist, weil wir die spezielle Form der R_{ξ} -Eichung benutzt haben.

Daß wir aber bei Verwendung der R_{ξ} -Eichungen das richtige physikalische Resultat erhalten, das durch die Teilchen, die in der Unitaritätsbeziehung der S-Matrixelemente auftreten, bestimmt ist, folgt daraus, daß im Limes $\xi \rightarrow \infty$ die R_{ξ} -Eichungen in die unitäre Eichung übergehen. Dabei werden insbesondere die Massen der Faddeev-Popov-Geister unendlich, so daß sie nicht zur Unitaritätsbeziehung beitragen. Folglich sind die Geister auch aus dem diagrammatischen Blickwinkel unphysikalisch, wie es sein muß. Als Nebenprodukt dieser Überlegungen hat sich gleichzeitig die Unitariät der S-Matrix ergeben, und zwar in dem Sinne, daß in der Unitaritätsbedingung für die T-Matrix nur über die physikalischen Freiheitsgrade summiert wird (vgl. [BLP86]).

1.5 Slavnov-Taylor-Identitäten

1.5.1 Die allgemeine Slavnov-Taylor-Identität

Unsere obige Pfadintegralquantisierung der nichtabelschen Eichtheorien hat die folgende allgemeine Form für das erzeugende Funktional der unzusammenhängenden n -Punkt-Funktionen ergeben:

$$Z[\xi, J] = \int D\mathcal{A}D\Phi\Delta[\mathcal{A}, \Phi] \exp \left[i(S_{\text{inv}} + S_{\text{fix}} + J^\dagger\Phi + \xi_\mu^a A^{a\mu}) \right], \quad (1.94)$$

wobei

$$S_{\text{fix}} = \int d^4x f[\mathcal{A}, \Phi] \text{ und } \Delta[\mathcal{A}, \Phi] = \det \frac{\delta f[\mathcal{A}^\chi, \Phi^\chi]|_x}{\delta \chi(y)} \quad (1.95)$$

ist. Φ bezeichnet dabei sämtliche von den Eichfeldern verschiedenen Feldfreiheitsgrade und J die entsprechenden äußeren Ströme. Weiter ist f das eichfixierende Funktional, welches oben passend gewählt wurde (R_ξ -Eichungen). Für die störungstheoretische Auswertung wird die Funktionaldeterminante Δ mit Hilfe der unphysikalischen Faddeev-Popov-Geistfelder in der effektiven Wirkung beschrieben. \mathcal{A}^χ und Φ^χ bezeichnen die mit der durch χ parametrisierten Eichtransformation transformierten Felder.

Wir haben oben nachgewiesen, daß das Pfadintegralmaß $\Delta D\mathcal{A}D\Phi$ eichinvariant ist. Außerdem war per constructionem S_{inv} eichinvariant. Jetzt führen wir die Substitution $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\chi$, $\phi \rightarrow \phi^\chi$ im Pfadintegral durch, wobei die mit χ gekennzeichneten Felder die Eichtransformierten der ursprünglichen Felder bezeichnen, und beachten die genannten Eichinvarianzen. Für das erzeugende Funktional ergibt sich damit die Form

$$Z[\xi, J] = \int D\mathcal{A}D\Phi\Delta[\mathcal{A}, \Phi] \exp \left[i(S_{\text{inv}} + S_{\text{fix}}^\chi + S_{\text{ext}}^\chi) \right]. \quad (1.96)$$

Zieht man nun (1.94) davon ab, ergeben die linken Seiten 0 und die rechten Seiten für eine infinitesimale Eichtransformation

$$\int D\mathcal{A}D\Phi\Delta[\mathcal{A}, \Phi] [\delta S_{\text{fix}} + \delta S_{\text{ext}}] = 0. \quad (1.97)$$

Das ist die allgemeinste Slavnov-Taylor-Identität. Sie läßt sich i.a. nur dann in einfacher Weise auf das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Funktionen oder gar auf das der Vertexfunktionen umschreiben, wenn die Feldvariation unter dem Pfadintegral linear in den Feldern ist. Das ist im allgemeinen Fall einer nichtabelschen Eichtheorie nicht erfüllt. Ein Ausweg bietet die Einführung der Geistfelder und Ausnutzen der Nilpotenz der BRST-Invarianz, die dazu führt, daß die Addition von äußeren Quellen für die nichtlinearen Anteile der BRST-Transformationen zur Lagrangedichte BRST-invariant ist. Dennoch sind die Slavnov-Taylor-Identitäten immer noch sehr kompliziert. Für eine genauere Betrachtung dieser Technik sei auf [Mut87] verwiesen.

Die hier gegebene Herleitung entstammt der Originalabhandlung [Sla72].

1.5.2 Elektrodynamik

Wir beginnen mit der einfachsten Anwendung, nämlich der abelschen $U[1]$ -Eichtheorie (die $U[1]$ ist die einzige kompakte halbeinfache abelsche Liegruppe (vgl. [Wei96])). Wir haben für die

Spinorelektrodynamik in R_ξ -Eichung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{inv}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\
 \mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \\
 \mathcal{L}_{\text{ext}} &= \bar{J}\psi + \bar{\psi}J + \xi_\mu A^\mu,
 \end{aligned} \tag{1.98}$$

wobei die Elektron-Positron-Felder ψ und $\bar{\psi}$ Fermionenfelder sind und folglich durch Grassmannzahlen dargestellt werden. Dasselbe gilt für die externen Ströme J und \bar{J} . Die abelsche Eichtransformation ist

$$\delta\psi = -ie\delta\chi\psi, \quad \delta\bar{\psi} = ie\delta\chi\bar{\psi}, \quad \delta A_\mu = \partial_\mu\delta\chi. \tag{1.99}$$

Beim Einsetzen dieser Variationen in (1.97) resultiert daraus eine Slavnov-Taylor-Identität, bei der die Feldvariation unter dem Pfadintegral linear in den Feldern ist, so daß wir sie durch Ableiten des erzeugenden Funktional nach den äußeren Quellen darstellen können. Es folgt damit die Ward-Takahashi-Identität für das erzeugende Funktional der unzusammenhängenden n -Punkt-Funktionen:

$$\frac{i}{\xi}\square\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta\xi_\mu} + e\left(\frac{\partial Z}{\partial J}\right)_R J - e\bar{J}\left(\frac{\partial Z}{\partial\bar{J}}\right)_L - Z\partial_\mu\xi^\mu = 0. \tag{1.100}$$

Mit $Z = \exp(iW)$ folgt für das erzeugende Funktional der zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen:

$$\frac{i}{\xi}\square\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta\xi_\mu} + e\left(\frac{\partial W}{\partial J}\right)_R J - e\bar{J}\left(\frac{\partial W}{\partial\bar{J}}\right)_L + i\partial_\mu\xi^\mu = 0. \tag{1.101}$$

Durch weitere Ableitung nach den äußeren Quellen finden wir Identitäten für die n -Punktfunktionen selbst. Beispielsweise ergibt die Ableitung der Ward-Takahashi-Identität nach $\xi_\nu(y)$ und Nullsetzen der äußeren Quellen die Ward-Takahashi-Identität für den Photonpropagator

$$\frac{i}{\xi}\square\partial_{x\mu}G^{\mu\nu}(x, y) = -\partial^\nu\delta^{(4)}(x - y). \tag{1.102}$$

Fouriertransformation zeigt, daß die Longitudinalkomponente des exakten Feynmanpropagators durch die Wechselwirkung nicht modifiziert wird. Das bedeutet, daß die Photonenselbstenergie ("Vakuumpolarisation") transversal ist, und zwar in jeder R_ξ -Eichung!

Der Vollständigkeit halber sei dies noch auf die effektive Wirkung umgeschrieben. Dazu müssen wir nur die aus der Legendretransformation von W zu Γ resultierenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta W}{\delta\xi_\mu} &= A^\mu, \quad \left(\frac{\delta W}{\delta J}\right)_R = \bar{\psi}, \quad \left(\frac{\delta W}{\delta\bar{J}}\right)_L \\
 \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} &= -\xi^\mu, \quad \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\right)_R = -\bar{J}, \quad \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}\right)_L = -J
 \end{aligned} \tag{1.103}$$

in (1.101) einsetzen:

$$\frac{i}{\xi}\square\partial_\mu A^\mu - i\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} + e\bar{\psi}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}\right)_L - e\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\right)_R \psi = 0. \tag{1.104}$$

Die Ableitung dieser Beziehung nach $\bar{\psi}(y_1)$ und nach $\psi(y_2)$, Nullsetzen der Felderwartungswerte und Fouriertransformation ergibt dann die bekannten Ward-Takahashi- bzw. Wardidentitäten für den Dreiervertex der QED:

$$\begin{aligned} eG^{-1}(p+q) - eG^{-1}(p) &= q_\mu \Gamma_{A\bar{\psi}\psi}^{(3)\mu}(q, p+q, p) \\ e \frac{\partial}{\partial p^\mu} G^{-1}(p) &= \Gamma_{A\bar{\psi}\psi\mu}^{(3)}(0, p, p), \end{aligned} \quad (1.105)$$

wobei G^{-1} den inversen Elektronen-Positronen-Propagator und $\Gamma^{(3)}$ den exakten QED-Dreiervertex bezeichnen. Die zweite Beziehung in (1.105), die Wardidentität, folgt aus der ersten, der Ward-Takahashi-Identität, durch den Grenzübergang $q \rightarrow 0$.

1.5.3 Ungebrochene Eichtheorie

Im Fall der nichtabelschen Eichtheorie lautet die Eichtransformation (wir behandeln jetzt o.B.d.A. skalare Materiefelder):

$$\delta\phi = -ig\delta\tilde{\chi}_a T^a \phi, \quad \delta\phi^* = ig\delta\tilde{\chi}_a T^a \phi^*, \quad \delta A_\mu^a = [D_\mu \delta\tilde{\chi}]^a := \partial_\mu \delta\tilde{\chi}^a - gf^{abc} A_\mu^b \delta\tilde{\chi}^c. \quad (1.106)$$

Führen wir diese Transformationen in (1.97) ein (wir benutzen die oben definierte Lagrangedichte in R_ξ -Eichung), erweist sich die Definition des Operators

$$M^{ac} \delta\tilde{\chi}^c = -\square \delta\tilde{\chi}^a + gf^{abc} \partial_\nu (A^{b\nu} \delta\tilde{\chi}^c) = -\partial_{x\mu} D^{\mu ac} \delta\tilde{\chi}^c \quad (1.107)$$

als sinnvoll. Im letzten Schritt haben wir berücksichtigt, daß sich die $\delta\tilde{\chi}$ nach der adjungierten Darstellung der Liealgebra transformieren (in diesem Sinne ist auch die kovariante Ableitung in Anwendung auf diese Felder zu verstehen).

Mit diesen Bezeichnungen schreibt sich die Slavnov-Taylor-Identität in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= \int D\mathcal{A} D\phi D\phi^\dagger \Delta \exp\{iS_{\text{total}}\} \int d^4x \left\{ \frac{1}{\xi} [M\delta\tilde{\chi}(x)]^a \partial_\mu A^{a\mu} + \right. \\ &\quad \left. + ig \left[\phi^\dagger(x) T^a J(x) - J^\dagger(x) T^a \phi(x) + \xi_\mu^a(x) D^\mu \right] \delta\tilde{\chi}_a(x) \right\}, \end{aligned} \quad (1.108)$$

wobei jetzt die Variation unter dem Pfadintegral nichtlinear in den Feldern ist, weil der Operator M gem. (1.107) von den Eichfeldern \mathcal{A} abhängt. Nun ist aber dieser Operator nichts anderes als der inverse Propagator bei fest gegebenem Eichfeld für ein Feld, das sich nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformiert, also der inverse Geistpropagator. Auf diese Weise gelangen wir in systematischer Weise zur BRST-Theorie.

Wir führen nun den Geistpropagator selbst ein:

$$\partial_{x\mu} D_x^\mu M^{-1}(x, y) = -\delta^{(4)}(x - y), \quad (1.109)$$

und die infinitesimalen Parameter der Eichtransformation $\delta\tilde{\chi}$ schreiben wir in der Form

$$\delta\tilde{\chi}(x) = \int d^4y M^{-1}(x, y) \delta\chi(y) \Leftrightarrow \delta\chi = M\delta\tilde{\chi}, \quad (1.110)$$

wobei $\delta\chi^a$ beliebig ist. Dann wird (1.108)

$$\begin{aligned}
 0 = & \int DAD\phi D\phi^\dagger \Delta \exp\{iS_{\text{total}}\} \int d^4x \left\{ \frac{1}{\xi} \delta\chi^a(x) \partial_\mu A^{a\mu} + \right. \\
 & \left. + ig \int d^4y \left[\phi^\dagger(x) T^a J(x) - J^\dagger(x) T^a \phi(x) + \xi_\mu^a(x) D_x^\mu \right] M_{xy}^{-1ab} \delta\chi^b(y) \right\}. \quad (1.111)
 \end{aligned}$$

Wegen der Willkür der $\delta\chi$ ergibt dies die Slavnov-Taylor-Identität:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int DAD\phi D\phi^\dagger \Delta \exp\{iS_{\text{total}}\} \left\{ \frac{1}{\xi} \partial_\mu A^{b\mu}(y) + \right. \\
 & \left. \int d^4x \left\{ ig \left[\phi^\dagger(x) T^a J(x) - J^\dagger(x) T^a \phi(x) \right] + \xi_\mu^c(x) D_x^{\mu ca} \right\} M_{xy}^{-1ab} \right\}. \quad (1.112)
 \end{aligned}$$

Die entsprechende Identität für zusammenhängende n -Punkt-Funktionen entsteht einfach durch Division durch das Pfadintegral mit zu 0 gesetzten äußeren Quellen. Eine Formulierung für die Vertexfunktionen ist hingegen in der eben hergeleiteten Form nicht möglich.

Wir können aber die einfachste Slavnov-Taylor-Identität durch Ableiten nach ξ^μ gewinnen. Sie ergibt genau wie im Falle der QED (1.102) die Transversalität der Eichbosonenselbstenergie.

1.5.4 Spontan gebrochene Eichtheorie

Zur Herleitung der Slavnov-Taylor-Identitäten für die spontan gebrochene Eichtheorie ist lediglich die Eichtransformation sowie der eichfixierende Anteil abzuändern. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int DAD\sigma \Delta[A, \sigma] \exp[iS + iS_{\text{fix}} + iS_{\text{ext}}] \times \\
 & \times \int d^4x \left\{ [\partial_\nu A^{a\nu}(x) + ig\xi v^t T^a \sigma(x)] \times \right. \\
 & \times \left[\delta^4(x-y) \delta^{ac} - g^2 v^t T^a T^b [v + \sigma(x)] M^{-1bc}(x, y) \right] + \\
 & + \xi_\mu^a(x) \left[\partial_x^\mu M^{-1ac}(x, y) - g f^{abd} A^{b\mu}(x) M^{-1dc}(x, y) \right] - \\
 & \left. - ig J^t T^b [v + \sigma(x)] M^{-1bc}(x, y) \right\} \quad (1.113)
 \end{aligned}$$

Kapitel 2

Vakuumbfeldtheorie des ρ -Mesons

2.1 Dimensionale Regularisierung

Mit den in Anhang B aufgestellten Feynmanregeln lassen sich nun perturbativ physikalische Größen berechnen. Dabei treten divergente Integrale auf, die zum Renormierungsprogramm der Quantenfeldtheorie geführt haben. Es gibt dabei verschiedene Verfahren der Regularisierung, d.h. der Parametrisierung der Divergenzen.

Wir entscheiden uns hier für die dimensionale Regularisierung, weil diese nicht nur das praktisch am übersichtlichsten durchführbare Verfahren ist, sondern auch die relativistische Invarianz sicherstellt. Außerdem ist es ein eigens für nichtabelsche Eichtheorien entwickeltes eichinvariantes Regulatorverfahren [HV72]. Es wird sich zeigen, daß die Resultate mit denen, die mit Hilfe anderer Regularisierungsverfahren berechnet wurden, übereinstimmen (vgl. [Her92] für die Pauli-Villar-Regularisierung). Dieses Verfahren soll an dem Einschleifenbeitrag gem. Abb. 2.1

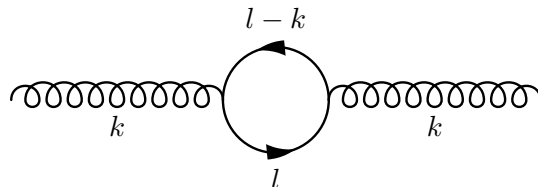


Abbildung 2.1: Einschleifendiagramm für die ρ -Selbstenergie

zur Selbstenergie des ρ -Mesons demonstriert werden:

Anwendung der Feynmanregeln unter Berücksichtigung der Symmetriefaktoren ergibt für die Selbstenergie des ρ -Mesons den Beitrag:

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu} = ig^2 \delta_{ab} \int \frac{(2l_\mu - p_\mu)(2l_\nu - p_\nu)}{(l^2 - m_\pi^2)[(l - p)^2 - m_\pi^2]} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}. \quad (2.1)$$

Einfaches Auswerten der Potenzen in l zeigt, daß das Integral quadratisch divergent ist. Wir wenden daher das in Anhang A beschriebene Verfahren der dimensionalen Regularisierung an.

Berechnen wir also zunächst das Diagramm für beliebige komplexe Raum-Zeit-Dimensionen $d = 2\omega$. Dabei führen wir einen Parameter der Dimension Impuls μ ein, damit die Kopplungskonstante unabhängig von der Raum-Zeit-Dimension dimensionslos ist. Weiter schreiben wir das

Produkt aus den beiden Propagatoren der Schleife als Feynmansches Parameterintegral, um die Standardformeln für raumartige Impulsüberträge k , d.h. $k^2 < 0$, aus Anhang A anwenden zu können.

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu} = ig^2 \delta_{ab} (\mu^{2\epsilon}) \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dz \frac{(2l_\mu - k_\mu)(2l_\nu - k_\nu)}{[(1-z)(l^2 - m_\pi^2) + z((l-k)^2 - m_\pi^2)]^2}. \quad (2.2)$$

Dabei ist $\omega = 2 - \epsilon$. Nach der Substitution $l' = l - pz$ läßt sich dies mit den Standardintegralen von Anhang A ausrechnen:

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^{\mu\nu} = & -g^2 \delta_{ab} \int_0^1 dz \left[1 - \epsilon \ln \left(\frac{m_\pi^2 - z(1-z)k^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{-2g^{\mu\nu}}{(4\pi)^2} [k^2 z(1-z) - m_\pi^2] \left(\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(2) + O(\epsilon) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(2z-1)^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(1) + O(\epsilon) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dabei haben wir bereits die Laurententwicklung der Γ -Funktion bis zur Ordnung ϵ ausgeführt. Ausmultiplizieren ergibt für den im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ divergenten Anteil:

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu}(\text{inf}) = \frac{g^2 \delta_{ab}}{16\pi^2 \epsilon} \left[-2g_{\mu\nu} m_\pi^2 + \frac{1}{3}(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \right]. \quad (2.4)$$

Man kann nun durch Hinzufügen eines im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ divergenten ρ -Massen- und eines ebenfalls divergenten kinetischen ρ -Feldterms zur Wirkung (Counterterme) den Beitrag zur Selbstenergie endlich machen. Dabei sind die endlichen Anteile dieser Counterterme unbestimmt und tragen zur Renormierung der Masse, Wellenfunktion des ρ -Mesons und der Renormierungskonstanten ξ bei. Wir bemerken ferner, daß die Counterterme die Eich- bzw. BRST-Invarianz der Lagrangedichte nicht zerstören. Wie die physikalischen Größen festzulegen sind, werden wir weiter unten erörtern.

Wenden wir uns nun der Bestimmung des endlichen Anteils zu. Dieser ist nach (2.3) für $k^2 < 0$ durch

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^{\mu\nu}(k) = & \frac{g^2 \delta_{ab}}{16\pi^2} \int_0^1 dz \left\{ 2g^{\mu\nu} [k^2 z(1-z) - m_\pi^2] \right. \\ & \left[\Psi_1(2) - \ln \left(\frac{m_\pi^2 - z(1-z)k^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] - \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \left. - k^\mu k^\nu (2z-1)^2 \left[\Psi_1(1) - \ln \left(\frac{m_\pi^2 - z(1-z)k^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right\} - \\ & - C_w (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) + C_m g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.6)$$

gegeben. Dabei sind C_w und C_m die endlichen Wellenfunktions- bzw. Massenrenormierungskonstanten.

Das Integral läßt sich geschlossen auswerten. Die Forderung nach Transversalität, die wir als Slavnov-Tayloridentität gewonnen haben, bestimmt den endlichen Massen-Counterterm-Anteil zu 0. Die Wellenfunktionsrenormierung ist allerdings unbestimmt und muß später phänomenologisch festgelegt werden.

Im raumartigen Gebiet, d.h. für $k^2 < 0$, ergibt sich

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu}(k) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta_{ab} \Pi(k^2), \quad (2.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{m_\pi^2 g^2}{6\pi^2} + \frac{g^2}{24\pi^2} k^2 \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{k^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{k^2}} \times \\ &\quad \times \operatorname{arcoth} \left(\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{k^2}} \right) + C_w k^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ist.

Dabei stellt C_w den unbestimmten endlichen Anteil der ρ -Wellenfunktionsrenormierung dar.

Diese Gleichung gilt zunächst nur für den raumartigen Bereich, also für $k^2 < 0$. Wegen der die Forderung der Kausalität erfüllenden analytischen Eigenschaften der Feynmanpropagatoren wissen wir, daß Π in der oberen offenen Halbebene der komplexen Variablen $s = k^2$ eine analytische Funktion ist. Auf der negativen reellen Achse ist $\Pi(s)$ reell und besitzt den Wert (2.8). Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip ist die Funktion also in der ganzen komplexen Ebene mit Ausnahme von Teilen der reellen Achse analytisch, und es gilt $\Pi(s^*) = \Pi^*(s)$. Das bedeutet, daß der Imaginärteil der Funktion einen Sprung entlang von Teilen der reellen Achse aufweist.

Wir können mit diesen Vorbereitungen die Fortsetzung der Funktion in die gesamte komplexe s -Ebene durchführen. Wir schreiben dazu den interessanten Teil der Gleichung (2.8) heraus, wobei wir die Areefunktion durch den Logarithmus ausdrücken:

$$f(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} - 1} \right) \quad \text{für } s < 0. \quad (2.9)$$

Die Betrachtung der analytischen Eigenschaften dieser Funktion ergibt die folgende Situation in der komplexen s -Ebene: Wir sind nur an Werten der Funktion für $s \in \mathbb{R}$ interessiert. Darunter

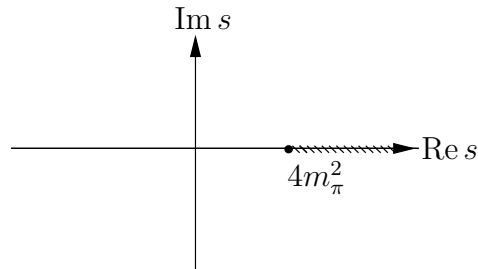


Abbildung 2.2: Analytische Struktur der ρ -Selbstenergie

verstehen wir die Werte bei Näherung an das obere Ufer des Schnittes im physikalischen Blatt der Riemannebene. Das physikalische Blatt wird dadurch definiert, daß die Selbstenergie entlang der negativen Achse reell ist. Der Schnitt in der s -Ebene ergibt sich aus der Tatsache, daß für das physikalische Blatt der Schnitt sowohl der Wurzelfunktion \sqrt{z} als auch des Logarithmus entlang der negativen reellen Achse zu wählen ist (das entspricht der Standardwahl des Hauptwertes

in der Funktionentheorie). Daher liegt der Schnitt der durch (2.9) gegebenen Funktion auf der reellen Achse bei $s > 4m_\pi^2$ (Schwelle für Pion-Paarerzeugung). Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß dies eine allgemeine analytische Eigenschaft von zweiteilchenreduziblen Graphen ist. Beginnen wir mit der Fortsetzung in den Bereich $0 < s < 4m_\pi^2$. Wir müssen die durch (2.9) auf der negativen s-Achse definierte Funktion durch Drehung in mathematisch negativem Sinn auf positive Werte im angegebenen Bereich fortsetzen. Allerdings ist die Drehrichtung hier noch nicht relevant, da nach den eben durchgeführten Vorüberlegungen dieser Bereich nicht auf dem Schnitt liegt, d.h. die Funktion ist dort analytisch, und die Fortsetzung ist rein reell:

$$f(s) = 2\sqrt{\frac{4m_\pi^2}{s} - 1} \operatorname{arccot} \left(\sqrt{\frac{4m_\pi^2}{s} - 1} \right) \quad \text{für } 0 < s < 4m_\pi^2. \quad (2.10)$$

Nun ist noch die Fortsetzung zu s-Werten entlang des Schnittes, und zwar auf das obere Ufer des Schnittes (physikalischer Bereich), zu bestimmen. Hierbei ist es wichtig, daß, wie in der obigen Skizze gezeigt, im Uhrzeigersinn zu drehen ist, weil wir zu Werten entlang des oberen Ufers des Schnittes fortsetzen wollen. Die Funktion ist nämlich auf der reellen Achse unstetig, d.h. die Selbstenergie erhält einen Imaginärteil. Es ergibt sich bei dieser Drehung, daß die Wurzel positiv reell bleibt, aber der Logarithmus einen Imaginärteil zur Selbstenergie beiträgt, d.h. das ρ -Meson ist instabil, denn es ist $m_\rho^2 > 4m_\pi^2$. Die analytische Fortsetzung zu $s > 4m_\pi^2$ ergibt:

$$f(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \left[2 \operatorname{artanh} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}}} \right) - i\pi \right] \quad \text{für } s > 4m_\pi^2. \quad (2.11)$$

Damit erhält man als Resultat für die Einschleifennäherung der ρ -Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Pi(s) = & \frac{m_\pi^2 g^2}{6\pi^2} + \frac{g^2}{24\pi^2} (s - 4m_\pi^2) \sqrt{\left| 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right|} \times \\ & \times \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{arcoth} \left(\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \right) & \text{für } s < 0 \\ \operatorname{arccot} \left(\sqrt{\frac{4m_\pi^2}{s} - 1} \right) & \text{für } 0 \leq s \leq 4m_\pi^2 \\ \operatorname{artanh} \left(\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \right) - \frac{i\pi}{2} & \text{für } s > 4m_\pi^2 \end{array} \right\} + C_w s. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jetzt müssen wir den verbleibenden endlichen Anteil des Counterterms, also die Renormierungskonstante C_{ren} , festlegen.

Wir bemerken zunächst, daß die Wahl des Renormierungspunktes willkürlich ist, und für verschiedene Betrachtungen jeweils geeignete Renormierungspunkte gewählt werden können (vgl. [BL86]). Wir wählen hier die physikalische Renormierung, die die Massen und Kopplungskonstanten als die physikalischen Konstanten an einem bestimmten Punkt der Energieskala, dem Renormierungspunkt, interpretiert. Dabei sind die in der ursprünglichen Lagrangedichte auftretenden Konstanten endlich, und die Renormierungsprozedur verlangt das Hinzufügen von unendlichen Counterterms zur Lagrangedichte, so daß die Konstanten endlich bleiben, und am Renormierungspunkt mit den Messungen übereinstimmen. Wir wollen jetzt diese Renormierungsbedingungen festlegen:

Dazu bemerken wir zunächst, daß sich in unserem Fall die Dysongleichung für das ρ -Meson aufsummieren läßt. Wegen der Transversalität der Selbstenergie ist nämlich der ρ -Mesonenpropagator in Feynmanzeichnung durch

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{\delta^{ab}}{k^2 - m^2 - \Pi(k)} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{\delta^{ab}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.13)$$

gegeben. Zur Wahl des Renormierungspunktes betrachten wir den Beitrag unserer Looprechnung zur Photonenselbstenergie. Dazu ist zu bemerken, daß jeder Beitrag zum ρ -Propagator auch ein Beitrag zum Photonpropagator ist. Man muß nämlich nur mittels $\rho\gamma$ -Vertizes an den ρ -Propagator äußere Photonlinien anfügen und erhält den entsprechenden hadronischen Beitrag zum Photonpropagator. Wir haben in Kapitel 1 gesehen, daß diese $\rho\gamma$ -Wechselwirkung dafür wichtig ist, daß das Photon masselos bleibt. Entsprechend ist in einem physikalischen Renormierungsschema die Renormierungskonstante in der ρ -Selbstenergie so zu wählen, daß dies der Fall ist.

Masselosigkeit des Photons bedeutet nämlich, daß der Photonpropagator für reale (on-shell) Photonen einen einfachen Pol mit Residuum 1 haben muß. Diese Forderung ergibt zusammen mit (2.13) unmittelbar, daß

$$\Pi(s=0) = 0; \quad \frac{d\Pi(s=0)}{ds} = 0. \quad (2.14)$$

Die erste Bedingung ist bereits durch (2.12) erfüllt. Sie wäre auch andernfalls durch unsere verbleibende Renormierungskonstante nicht zu erfüllen gewesen! Wir haben also für die zweite Bedingung zu sorgen, und das führt auf

$$C_w = -\frac{g^2}{18\pi^2}. \quad (2.15)$$

Damit haben wir den Einschleifenbeitrag vollständig renormiert.

2.2 Dispersionsrelationen und Renormierung

Eine andere Strategie der Renormierung geht von der Bestimmung des Imaginärteils der Selbstenergie Π aus. Dazu betrachten wir die allgemeine Form eines Einschleifendiagramms:

$$\text{Im}\Pi(k) = \text{Im} \int \frac{i\phi(k, l)}{(l^2 - m^2 + i0)[(l-k)^2 - m^2 + i0]} d^4l. \quad (2.16)$$

Dabei schreiben wir der Einfachheit halber für beide die Schleife bildenden Teilchenlinien die gleiche Masse. Diese Einschränkung ändert aber prinzipiell nichts an der Rechnung, und das Resultat ist leicht auf den allgemeinen Fall unterschiedlicher Massen in den Schleifenpropagatoren zu übertragen. Wir führen in (2.16) zunächst die l^0 -Integration aus, und zwar im zeitartigen Bereich $k^2 > 0$, so daß wir im Ruhesystem des Teilchens rechnen können. Wir parametrisieren also

$$k = (k_0, 0, 0, 0); \quad (l-k)^2 = (l_0 - k_0)^2 - \vec{l}^2; \quad \epsilon = \sqrt{\vec{l}^2 + m^2}. \quad (2.17)$$

Dann schreibt sich (2.16) in der Form

$$\text{Im}\Pi(k) = \text{Im} \int d^4l \frac{i\phi(k, l)}{(l_0^2 - \epsilon^2 + i0)[(l_0 - k_0)^2 - \epsilon^2 + i0]}. \quad (2.18)$$

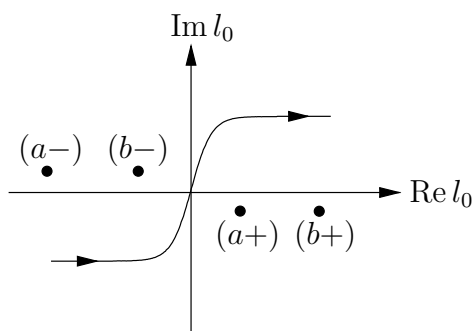


Abbildung 2.3: Lage der Pole des Integranden zu (2.18)

Sei weiter o.B.d.A. $k_0 > 0$. Abb. 2.3 zeigt die Pole des Integranden. Dabei haben wir den Integrationsweg, der im ursprünglichen Integral entlang der reellen Achse verläuft, deformiert. Dadurch ändert sich wegen des Residuensatzes der Wert des Integrals nicht, solange die Pole die eingezeichnete Lage besitzen. Dies zeigt, daß in diesem Fall das Integral stetig von k_0 abhängt, also insbesondere der Imaginärteil keinen Sprung entlang der reellen Achse aufweist. Die Lage der Pole ist im einzelnen:

$$l_0 = k_0 \pm \epsilon \mp i0 \ (b_{\pm}); \quad l_0 = \pm \epsilon \mp i0 \ (a_{\pm}). \quad (2.19)$$

Wenn die beiden Pole $(b-)$ und $(a+)$ zusammenfallen, ist die Verlegung des Integrationsweges in der oben angegebenen Weise nicht mehr möglich, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Der Integrationsweg ist dann zwischen den beiden Polen festgeklemmt. Diese Situation tritt genau dann ein, wenn es reelle Werte für l_0 gibt, so daß $k_0 - \epsilon = \epsilon$ ist, und das ist nur dann möglich, wenn $k_0^2 = t > 4m^2$ ist. Verlegt man den Integrationsweg trotzdem von der reellen Achse weg, muß dies durch einen kleinen im mathematisch negativen Sinne zu durchlaufenden Kreis wieder kompensiert werden (s. Abb. 2.4). In diesem Fall weist die Funktion einen Sprung auf. Wir haben

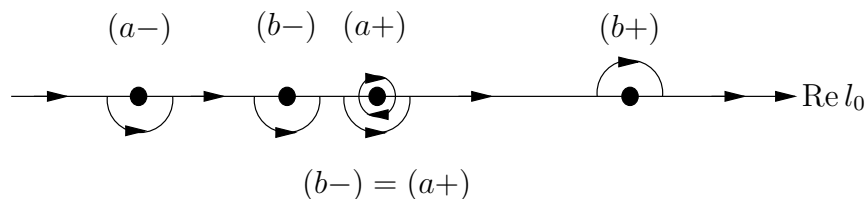


Abbildung 2.4: Verlegung des Integrationsweges

bereits im vorigen Abschnitt gesehen, daß dieser Sprung rein imaginär ist. Hier ergibt sich diese Tatsache daraus, daß für $0 < s < 4m^2$ das Integral entlang der reellen Achse reell ist. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip ergibt dann $\Pi(s^*) = \Pi(s)^*$, d.h. der Sprung der Selbstenergie entlang des Schnittes entspricht dem Doppelten des Imaginärteils:

$$\Pi(s + i0) - \Pi(s - i0) = 2i\text{Im}\Pi(s + i0). \quad (2.20)$$

Wir schreiben im folgenden zur Abkürzung $\Pi(s) = \Pi(s + i0)$. Der Sprung läßt sich also durch die Integration entlang des Kreises um den Pol $(a+) = (b-)$ berechnen. Nach dem Residuensatz ist dieses Integral das mit $(-2\pi i)$ (das Vorzeichen rührt daher, daß der Kreis im Uhrzeigersinn

durchlaufen wird) multiplizierte Residuum des Integranden an dieser Polstelle. Diese Rechenvorschrift läßt sich aber dadurch ausdrücken, daß man in (2.18) die Ersetzung

$$\frac{1}{l_0^2 - \epsilon^2} \rightarrow -2\pi i \delta(l_0^2 - \epsilon^2); \quad l_0 > 0 \quad (2.21)$$

vornimmt, d.h. man erhält

$$2i\text{Im}\Pi(s) = \int_{l_0 > 0} \int d^3\vec{l} (-2i\pi) \delta(l_0^2 - \epsilon^2) i\phi(k; l) \times \quad (2.22)$$

$$\times \left[\frac{1}{(k_0 - l_0)^2 - \epsilon^2 + i0} - \frac{1}{(k_0 - l_0)^2 - \epsilon^2 - i0} \right].$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x^2 - \epsilon^2 \pm i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x^2 - \epsilon^2} \mp i\pi \delta(x^2 - \epsilon^2). \quad (2.23)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{P} den Cauchyschen Hauptwert. Dies läßt sich in einer der eben durchgeführten Betrachtung sehr ähnlichen Weise mit Hilfe des Residuensatzes nachweisen. Damit erhalten wir

$$2i\text{Im}\Pi(s) = \int_{l_0 > 0} \int d^3\vec{l} (-2\pi i) \delta(l_0^2 - \epsilon^2) (-2\pi i) \delta[(l_0 - k_0)^2 - \epsilon^2] i\phi(l; k). \quad (2.24)$$

Beachtet man (2.17), erkennt man, daß der Imaginärteil eines Einschleifendiagramms sich dadurch berechnen läßt, daß man jeden Feynmanpropagator $(p^2 - m^2)^{-1}$ durch $(-2\pi i) \delta(p^2 - m^2)$ ersetzt. Damit ist der Integrationsbereich des Integrals wegen der δ -Distributionen effektiv nur die Schnittmenge zweier Massenschalen im Impulsraum, also endlich, und es treten folglich bei der Berechnung des Imaginärteils keine UV-Divergenzen auf.

Wir wenden zur Illustration diese Methode auf das schon im vorigen Abschnitt behandelte Einschleifenintegral an. Die Transveralität der Selbstenergie (2.1) ergibt:

$$\text{Im}\Pi(s) = -\frac{1}{3} \text{Im}\Pi_\mu^\mu = \frac{g^2}{12\pi^2} \int_{l_0 > 0} (2l - k)^2 \delta(l^2 - m_\pi^2) \delta[(l - k)^2 - m_\pi^2] d^4l. \quad (2.25)$$

Wir parametrisieren dies wieder durch (2.17). Die Umrechnung des vierdimensionalen Volumenelements ergibt

$$d^4l = dl^0 d^3\vec{l} = dl^0 |\vec{l}| \epsilon d\epsilon d\Omega_{\vec{l}}. \quad (2.26)$$

Weiter ist, weil wir nur über den Halbraum $l_0 > 0$ integrieren:

$$\delta(l^2 - m_\pi^2) = \delta(l_0^2 - \epsilon^2) = \frac{1}{2\epsilon} \delta(l_0 - \epsilon). \quad (2.27)$$

Nutzen wir diese δ -Distribution aus, erhalten wir für die zweite

$$\delta[(l - k)^2 - m_\pi^2] = \delta(2\epsilon k_0 - k_0^2) = \frac{1}{2k_0} \delta\left(\epsilon - \frac{k_0}{2}\right). \quad (2.28)$$

Setzen wir (2.26-2.28) in (2.25) ein, erhalten wir schließlich:

$$\text{Im}\Pi(s) = \frac{g^2}{48\pi} (4m_\pi^2 - s) \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \Theta(s - 4m_\pi^2). \quad (2.29)$$

in Übereinstimmung mit dem unter Verwendung der dimensional Regularisierung renormierten Ergebnis (2.12).

Zur Berechnung der vollständigen Selbstenergiefunktion bedienen wir uns der Dispersionsrelationen, die folgendermaßen hergeleitet werden können. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die im Unendlichen verschwindet und entlang eines Teils der positiven reellen Achse einen Schnitt besitzt. Links dieses Schnittes sei f auf der reellen Achse reell, d.h. f besitzt genau die Eigenschaften, die wir soeben für die Selbstenergie hergeleitet haben. Es sei aber noch einmal betont, daß wir zunächst annehmen, daß f außer dem auf der positiven reellen Achse gelegenen Verzweigungspunkt keine Singularitäten besitzt. Betrachten wir nun den folgenden Integrationsweg. Der Radius des großen Kreises wird dabei ins Unendliche verlegt. Der kleine Halbkreis um den

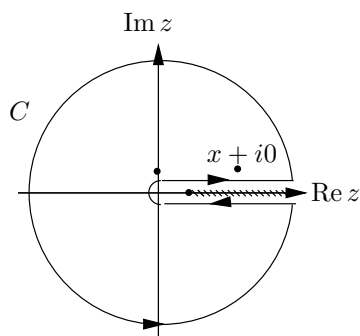


Abbildung 2.5: Integrationsweg zur Herleitung der Dispersionsrelation

Ursprung soll beliebig klein gedacht werden. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - (x + i0)} dz = 2\pi i f(x + i0). \quad (2.30)$$

Jetzt beachten wir, daß wegen des Verschwindens von f im Unendlichen der große Kreis nichts zum Integral beiträgt. Das gleiche gilt für den kleinen Kreis, solange $x \neq 0$. Weiter berücksichtigen wir noch, daß wegen des Schwarzschen Spiegelungsprinzips $f(z^*) = f(z)^*$ ist. Damit schreibt sich (2.30):

$$f(x + i0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} f(z)}{z - x} dz. \quad (2.31)$$

Das ist die Dispersionsrelation.

Betrachten wir nun (2.29), sehen wir, daß auf die Funktion Π all die postulierten Eigenschaften zutreffen, die wir zur Herleitung von (2.31) benutzt haben außer, daß $\Pi(s)$ für $s \rightarrow \infty$ nicht verschwindet, d.h. unsere Dispersionsrelation ist nicht unmittelbar anwendbar. Dies war auch nicht anders zu erwarten, weil das ursprüngliche Einschleifenintegral UV-divergent ist. Andererseits ist aber der unendlich ferne Punkt der s -Ebene keine wesentliche Singularität, und wir können $\Pi(s)/s^2$ betrachten. Diese Funktion verschwindet im Unendlichen, besitzt aber an der Stelle $s = 0$ einen Pol zweiter Ordnung.

I.a. betrachten wir in den Fällen, in denen $f(z)$ im Unendlichen nicht verschwindet, die Singularität dort aber nicht wesentlich ist, $f(z)/z^n$. Diese Funktion verschwindet für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Man weist leicht mittels vollständiger Induktion nach, daß

$$\frac{1}{z^n(z - x)} = \frac{1}{x^n(z - x)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x^k z^{n-k+1}} \quad (2.32)$$

ist. Da die Funktion f in $z = 0$ analytisch ist, läßt sie sich nach dem Weierstraßschen Satz in eine Taylorreihe um $z = 0$ entwickeln. Dies zusammen mit (2.32) in das Integral (2.30) eingesetzt ergibt in derselben Weise wie oben (2.31):

$$f(x + i0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{x^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}f(z)}{z^n(z-x)} dz. \quad (2.33)$$

Dabei bezeichnet $f^{(k)}$ die k -te Ableitung von f . Man nennt (2.33) Dispersionsformel mit n Subtraktionen. Es ist weiter klar, daß man den Subtraktionspunkt (hier $z = 0$) beliebig auf der reellen Achse wählen kann, solange eine Umgebung dieses Punktes existiert, die keinen Punkt auf dem Verzweigungsschnitt enthält. Man benötigt allerdings zur Berechnung der Funktion ihre ersten $(n - 1)$ Ableitungen am Subtraktionspunkt, d.h. der Subtraktionspunkt entspricht dem Renormierungspunkt. Dies zeigt auch, daß dieser nicht jenseits des Verzweigungspunktes (also im physikalischen Bereich für Streuung) liegen darf. Deshalb war es nicht möglich, die Renormierungsbedingungen bei der ρ -Masse zu wählen, denn sie liegt jenseits des Verzweigungsschnittes. Physikalisch entspricht dies der Tatsache, daß das ρ -Meson in unserer Theorie kein stabiles Teilchen ist, sondern in Pionen zerfällt, also eine Resonanz darstellt.

Wir können in unserem Fall (2.33) direkt anwenden, wählen also den Renormierungspunkt wie im vorigen Abschnitt bei $s = 0$. Die Renormierungsbedingungen sind durch (2.14) gegeben. Damit erhalten wir

$$\Pi(s) = \frac{g^2 s^2}{48\pi^2} I(s) \text{ mit } I(s) = \int_{4m_\pi^2}^\infty \frac{(4m_\pi^2 - s') \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s'}}}{s'^2(s' - s)} ds'. \quad (2.34)$$

Dieses Integral läßt sich elementar auswerten und führt wieder auf das schon oben erzielte Ergebnis (2.12).

2.3 Pionenstreudaten

Die eben berechnete Selbstenergie des ρ -Mesons kann zur Bestimmung der Kopplungskonstante und Massen an Pionenstreudaten angepaßt werden. Dabei bietet sich die Streuphase im $J = 1$, $T = 1$ -Kanal an, weil dieser im betrachteten Energiebereich vom ρ -Meson dominiert wird.

Beim Fit der oben berechneten Selbstenergie an Daten müssen wir noch zwei wichtige empirische Fakten berücksichtigen: Zum ersten beinhaltet unser Modell nur die drei ρ -Mesonen. Wir wissen aber, daß das ρ -Meson mit dem ω -Meson mischt. Dies werden wir weiter unten direkt am Vergleich des Modells mit π -Formfaktoren erkennen.

2.3.1 Streuphase im $J = 1$, $T = 1$ -Kanal

Die beste Bestimmung der Parameter g und m_ρ ist für Daten zu erwarten, die die Wirkung des ρ -Mesons möglichst unbeeinflußt von anderen Resonanzen widerspiegeln. Dazu bietet sich die Partialwellenanalyse an.

Dazu bestimmt man zunächst die T -Matrix, indem man das Diagramm für die elastische Streuung $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ mit dem ρ als "intermediärem" Vektormeson berechnet. Dabei wird für den ρ -Propagator die nach der Dysongleichung mit der oben berechneten Selbstenergie bestimmte Näherung eingesetzt. Die äußeren Beinchen des Diagramms sind nach der LSZ-Reduktionsformel zu amputieren und durch die asymptotisch freien in- und out- π -Zustände zu ersetzen. Die rein

algebraische Rechnung ergibt für den Isospin $I = 1$ -Kanal (festgelegt durch den Prozeß mit den geladenen π):

$$T^{I=1} = -2g^2 \frac{(q^2 - 4m_\pi^2) \cos \theta}{q^2 - m_\rho^2 - \Pi(q^2)}. \quad (2.35)$$

Dabei ist q^2 die Schwerpunktsenergie der π -Mesonen und θ der Streuwinkel. Die Zerlegung nach Drehimpulseigenzuständen ist durch die Partialwellenzerlegung

$$T^I = 32\pi \sum_{l=0}^{\infty} t_l^I(q^2)(2l+1)P_l(\cos \theta) \quad (2.36)$$

gegeben, wobei P_l das Legendrepolynom l -ter Ordnung bezeichnet. Die übrigen Faktoren sind Normierungsfaktoren. Die Projektion auf den $I = 1, l = 1$ -Kanal erfolgt aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Legendrepolynome durch

$$t_1^1 = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos \theta T^1(q^2). \quad (2.37)$$

Hierin (2.35) eingesetzt und das Integral ausgerechnet, ergibt

$$t_1^1 = \frac{g^2}{48\pi} \frac{q^2 - 4m_\pi^2}{q^2 - m_\rho^2 - \Pi(q^2)} := \sqrt{\frac{q^2}{q^2 - 4m_\pi^2}} \exp(i\delta_1^1) \sin \delta_1^1, \quad (2.38)$$

wobei δ_1^1 die Streuphase in dem betrachteten Isospin-Spin-Kanal ist. Der Vergleich dieser Definition der Streuphase mit dem Partialwellenmatrixelement ergibt schließlich

$$\delta_1^1 = \arccos \left[-\frac{q^2 - m_\rho^2 - \text{Re}\Pi(q^2)}{\sqrt{[q^2 - m_\rho^2 - \text{Re}\Pi(q^2)]^2 + \text{Im}\Pi(q^2)}} \right]. \quad (2.39)$$

Der χ^2 -Fit ergibt im Vergleich mit den Daten [FP77] die Bestwerte $g = 5.69$, $m_\rho = 769.8\text{MeV}$, wobei $m_\pi = 140\text{MeV}$ gesetzt wurde. Die ρ -Breite ergibt sich dadurch zu

$$\Gamma = -\text{Im}\Pi(m_\rho)/m_\rho = 133.5\text{MeV}. \quad (2.40)$$

Es läßt sich damit auch die Gültigkeit der Störungsrechnung in dem betrachteten Energie-

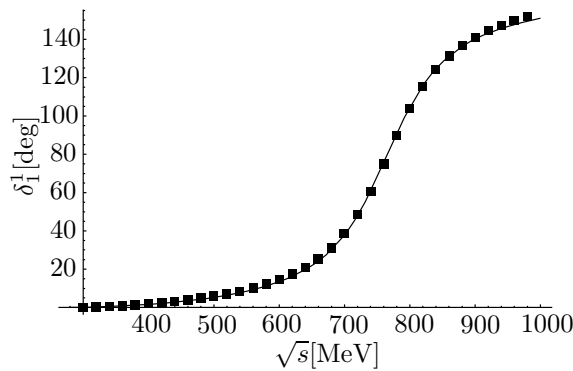


Abbildung 2.6: Fit an die Streuphase δ_1^1

bereich ablesen. Wir folgen dabei [Kli95]. Entwicklung des inversen transversalen Anteils des ρ -Propagators um die Stelle m_ρ ergibt:

$$G_\rho^{-1} = q^2 - [m_{0\rho}^2 + \text{Re}\Pi(m_\rho^2)] - (q^2 - m_\rho^2)\text{Re}\Pi'(m_\rho^2) - i\text{Im}\Pi(q^2) + \dots \quad (2.41)$$

Dabei bedeutet $m_{0\rho}$ die ‘‘nackte’’ ρ -Masse, und die Forderung, daß bei der ‘‘physikalischen’’ Masse m_ρ der inverse Propagator rein imaginär sein muß (weil das ρ -Meson eine Resonanz ist), ergibt sich für die nackte Masse:

$$m_{0\rho}^2 + \text{Re}\Pi(m_\rho^2) = m_\rho^2. \quad (2.42)$$

Einsetzen der obigen Fitparameter ergibt, daß die Renormierung der Masse ein Effekt um die 1% der ρ -Masse bewirkt, so daß die Störungsrechnung in erster Ordnung in diesem Sinne nur kleine Korrekturen liefert und damit in sich konsistent ist.

2.3.2 Elektromagnetischer Formfaktor des Pions

Der elektromagnetische Formfaktor des Pions ist definiert als das Verhältnis aus dem ‘‘tatsächlichen’’ $\pi\gamma$ -Vertex und einem Baumgraphenvertex, für den das Pion als punktförmig angenommen wird.

Dies läßt durch den folgenden physikalischen Streuprozeß beschreiben: $\pi^+ + \pi^- \rightarrow e^+ + e^-$, wobei die rein elektromagnetische Wechselwirkung der Elektronen nur auf Baumgraphenniveau berücksichtigt wird. Der Formfaktor ist dann diagrammatisch durch Abb. 2.7 gegeben. Dazu ist zu bemerken, daß die äußeren Beinchen hier im Sinne von S -Matrixelementen zu verstehen, also dieselben zu amputieren und durch die Amplituden der entsprechenden Wellenfunktionen zu ersetzen sind. In diese Definition setzen wir nun für die ρ -Mesonenlinie den oben berechneten

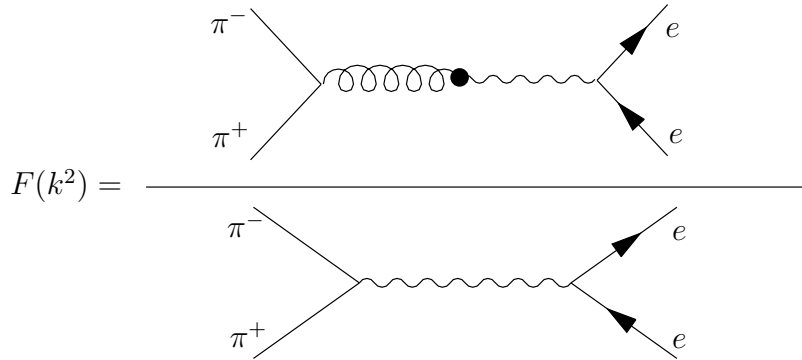


Abbildung 2.7: Diagrammatische Darstellung des Formfaktors

Propagator mit der in Einschleifennäherung berechneten ρ -Selbstenergie ein, und erhalten:

$$eF(k^2) = gf_{\rho\gamma}D_\rho(k^2) = em_\rho^2D_\rho(k^2). \quad (2.43)$$

Physikalisch meßbar ist nur das Betragsquadrat dieser Amplitude, also

$$|F(k^2)|^2 = \frac{m_\rho^4}{[k^2 - m_\rho^2 - \text{Re}\Pi_\rho(k^2)]^2 + [\text{Im}\Pi_\rho(k^2)]^2}. \quad (2.44)$$

Der Fit der Daten aus [A⁺84] und [B⁺85] ergibt die Bestwerte $m_\rho = 764.057\text{MeV}$ und $g = 5.35$.

Eine Auftragung der Streuphase mit diesen Werten für g und m_ρ zeigt, daß auch dieser Satz von Parametern die Daten recht gut repräsentiert. Dies spiegelt die in ([B⁺96]) dokumentierten Schwierigkeiten bei der Bestimmung der ρ -Masse wieder.

Wir betrachten nun die Mischung von ρ - und ω -Meson. Der wichtigste Hinweis ist, daß das ρ -Meson mit einem Verzweigungsverhältnis von $< 1.2 \cdot 10^{-6}$ in drei Pionen zerfallen kann. Dieser Prozeß wäre in dem Fall, daß das ρ -Meson ein reiner Isospin-1-Zustand wäre, wegen der Erhaltung der G -Parität für starke Prozesse verboten.

Wir können die Beimischung des ω -Mesons schematisch wie folgt darstellen. Es sei $R = (\rho, \omega)^t = \hat{C}(\rho_I, \omega_I)^t$, wobei ρ bzw. ω die Masseneigenzustände und ρ_I bzw. ω_I die Isospineigenzustände zu $I = 1$ und $I = 0$ darstellen. Diese sind miteinander über die orthogonale Matrix \hat{C} verknüpft. Diese können wir wiederum als infinitesimale Drehung parametrisieren:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

In der Massendarstellung hat die Selbstenergie (hier unter Einbeziehung der Masse) die Diagonalform $\tilde{\Pi} = \text{diag}(m_\rho^2 - \Pi_\rho, m_\omega^2 - \Pi_\omega)$. In der Isospineigenbasis gilt

$$\tilde{\Pi}_I = \hat{C}^t \tilde{\Pi} \hat{C}, \quad (2.46)$$

und bis zu Größen in erster Ordnung in ϵ ergibt der Propagator in der Isospindarstellung zu

$$\hat{D}_I(k^2) = (k^2 \hat{1} - \tilde{\Pi}_I)^{-1} = \frac{1}{(k^2 - \tilde{\Pi}_\rho)(k^2 - \tilde{\Pi}_\omega)} \begin{pmatrix} k^2 - \tilde{\Pi}_\omega & \epsilon(\tilde{\Pi}_\rho - \tilde{\Pi}_\omega) \\ -\epsilon(\tilde{\Pi}_\rho - \tilde{\Pi}_\omega) & k^2 - \tilde{\Pi}_\rho \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Der Formfaktor ist durch das Übergangsmatrixelement in zwei Pionen gegeben, d.h. durch die Projektion auf den $I = 1$ -Zustand. Die Kopplung ist weiterhin durch unsere Lagrangedichte gegeben, nur daß der ρ -Propagator durch den soeben hergeleiteten Propagator in der Isospinbasis zu ersetzen ist.

$$F = (g, 0) \hat{D}_I(k^2) \begin{pmatrix} \epsilon/f_{\gamma I=1} \\ \epsilon/f_{\gamma I=0} \end{pmatrix} = F_0 \left(1 + \epsilon \frac{\tilde{\Pi}_{I\omega}^2 - \tilde{\Pi}_{I\rho}^2 + \Pi_\rho - i\Gamma_\omega \tilde{\Pi}_{I\omega}}{k^2 - \tilde{\Pi}_{I\omega}^2 + i\Gamma_\omega \tilde{\Pi}_{I\omega}} \right). \quad (2.48)$$

Dabei wurde der Propagator des ω -Mesons durch eine Breit-Wigner-Parametrisierung realisiert, und F_0 ist der oben berechnete Formfaktor (2.43).

Der Fit dieser Parametrisierung des Formfaktors an die Daten aus [B⁺85] und [A⁺84] ergibt unter Fixierung der oben gefitteten Werte für das ρ -Meson die ‘‘nackten’’ Parameter für die ω -Mesonen:

$$\epsilon = -2.9 \cdot 10^{-3}, m_\omega = 776.6 \text{ MeV}, G_\omega = 4.9 \text{ MeV}. \quad (2.49)$$

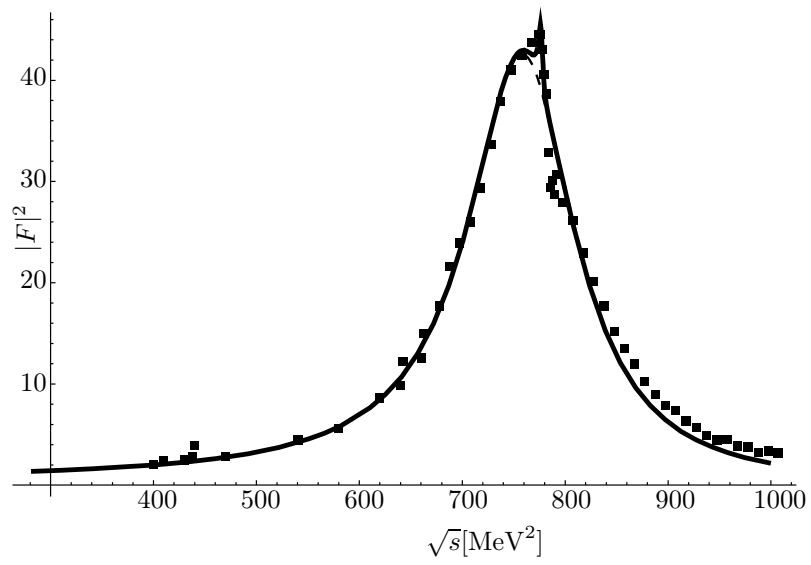


Abbildung 2.8: Fit von (2.48) an die Daten von [B⁺85] und [A⁺84]

Kapitel 3

Selbstkonsistente Näherungen

3.1 Funktionale der Quantenfeldtheorie

Wir haben bereits in Kapitel 1 ausgiebig von den erzeugenden Funktionalen verschiedener Klassen von n -Punktfunktionen Gebrauch gemacht. Im folgenden wollen wir in Erweiterung der üblichen Methoden, die Funktionale in Abhängigkeit von lokalen äußeren Quellen benutzen, auch Funktionale betrachten, die von bilokalen äußeren Quellen abhängen. Im nächsten Abschnitt werden wir mit Hilfe dieses Formalismus' Schleifenentwicklungen der Selbstenergie betrachten, die zu selbstkonsistenten Näherungsmethoden führen.

Wir untersuchen dazu in diesem Abschnitt formale exakte erzeugende Funktionale, deren Dysonentwicklung benutzt wird, um diese Näherungsmethoden zu beschreiben. Die dabei verwendeten formalen Pfadintegralmethoden gehen auf [CJT74, Jac74] zurück.

Das darauf beruhende Konzept zum Auffinden selbstkonsistenter Näherungsverfahren, das auf anderem Wege zuerst in [LW60] hergeleitet wurde, hat nämlich die wichtige Eigenschaft, daß es die Bestimmung selbstkonsistenter Summationstechniken für die Selbstenergie gestattet, die die Erhaltungssätze, die aus der Symmetrie der benutzten Näherung der effektiven Wirkung folgen, in dem Sinne respektieren, daß die Erwartungswerte der Noetherströme divergenzfrei sind. Diese Eigenschaft wurde in [BK61] bewiesen. Der Zusammenhang mit der Formulierung durch erzeugende Funktionale geht auf [Bay62] zurück.

Wir untersuchen zunächst, unter welchen Voraussetzungen die Symmetrien der klassischen Wirkung auch Symmetrien der dazugehörigen effektiven Wirkung sind. Dies ist das Noethertheorem für die Quantenfeldtheorie.

Als ersten Schritt wiederholen wir kurz die Eigenschaften der in den vorigen Kapiteln benutzten Funktionale der Quantenfeldtheorie. Der Einfachheit halber betrachten wir eine Theorie mit nur einem reellen Feldfreiheitsgrad ϕ . Die entwickelten Methoden lassen sich aber ohne weitere Änderung auf allgemeinere Feldtheorien anwenden. Die klassische Wirkung dieses Feldes sei mit $S[\phi]$ bezeichnet. Wir wollen zunächst in diesem Abschnitt \hbar in den Pfadintegralen stehen lassen. Dann ist das erzeugende Funktional für n -Punktfunktionen durch

$$Z[J] = N \int D \frac{\phi}{\sqrt{\hbar}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S[\phi] + i \langle J_1 \phi_1 \rangle_1) \right\} \quad (3.1)$$

gegeben. Dabei ist N ein i.a. unendlicher Normierungsfaktor, der nicht von der lokalen äußeren Quelle J und \hbar abhängt und so gewählt ist, daß $Z[0] = 1$ ist. Das Pfadintegral ist in der üblichen

mit Hilfe der $i\epsilon$ -Vorschrift regularisierten Weise zu verstehen. Wir haben weiter die Abkürzung

$$\langle f_1 \rangle_1 = \int d^4x_1 f(x_1) \quad (3.2)$$

für Integrale über den Minkowskiraum eingeführt. Schließlich definieren wir noch das erzeugende Funktional $W[J] = -i\hbar \ln\{Z[J]\}$ für zusammenhängende n -Punktfunktionen.

Im folgenden betrachten wir Entwicklungen der n -Punktfunktionen nach Ordnungen von \hbar , die sich formal durch die Anwendung der Methode der stationären Phase auf Pfadintegrale herleiten läßt. Dazu betrachten wir die Feldkonfiguration φ_0 , die stationärer Punkt der klassischen Wirkung ist:

$$\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta \varphi_0} = -J. \quad (3.3)$$

Dies ist die Euler-Lagrange-Gleichung eines klassischen Feldes unter Einwirkung der äußeren Quelle J . Durch die $i\epsilon$ -Vorschrift, die wir hier der Übersichtlichkeit halber nicht explizit eingeführt haben, wird diese Gleichung eindeutig durch eine Greensche Funktion gelöst, die die Randbedingungen des Feynmanpropagators erfüllt, also Zustände mit negativen Energien avanciert und solche mit positiven Energien retardiert propagiert.

Entwickeln wir nun S um diese klassische Lösung, erhalten wir

$$S[\varphi_0 + \phi] = S[\varphi_0] - \langle J_1 \phi_1 \rangle_1 + \frac{1}{2!} \left\langle \frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta \varphi_{01} \delta \varphi_{02}} \phi_1 \phi_2 \right\rangle_{12} + S_I[\varphi_0 + \phi]. \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnet S_I den Wechselwirkungsanteil der klassischen Theorie mit äußerer Quelle J , also Terme in mindestens dritter Ordnung der Felder ϕ . Die physikalische Bedeutung der Felder ϕ , über die im Pfadintegral integriert wird, ist die von Quantenfluktuationen um die klassische Lösung φ_0 der Feldgleichungen.

Setzen wir nun die Entwicklung (3.4) in das obige Pfadintegral ein, finden wir wegen $D(\phi + \varphi_0) = D\phi$ (Translationsinvarianz des Pfadintegralmaßes) folgende Umformulierung des erzeugenden Funktionals

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S[\varphi_0] + i \langle \varphi_{01} J_1 \rangle_1) \right\} [\text{Det}(-i\mathcal{D}^{-1})]^{-1/2} Z_2[J], \quad (3.5)$$

wobei wir den inversen klassischen Propagator (Baumgraphenpropagator) des unter der Einwirkung der äußeren Quelle J stehenden Feldes ϕ durch

$$\mathcal{D}_{12}^{-1} = \frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta \varphi_{01} \delta \varphi_{02}} \quad (3.6)$$

und dessen Determinante durch das Pfadintegral

$$[\text{Det}(-i\mathcal{D}^{-1})]^{-1/2} = \int D \frac{\phi}{\sqrt{\hbar}} \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \langle \mathcal{D}_{12}^{-1} \phi_1 \phi_2 \rangle_{12} \right] \quad (3.7)$$

definiert haben. Wir wollen jetzt zeigen, daß $W_2 = -i\hbar \ln Z_2$ von der Ordnung \hbar^2 ist. Das folgt aber schon aus der Definition dieses Funktionals durch

$$Z_2[J] = \frac{\int D \frac{\phi}{\sqrt{\hbar}} \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \langle \mathcal{D}_{12}^{-1} \phi_1 \phi_2 \rangle_{12} + \frac{i}{\hbar} S_I(\phi + \varphi_0) \right\}}{\int D \frac{\phi}{\sqrt{\hbar}} \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \langle \mathcal{D}_{12}^{-1} \phi_1 \phi_2 \rangle_{12} \right\}}. \quad (3.8)$$

Die Entwicklung von $\exp\{S_I(\phi + \varphi_0)\}$ um $\phi = 0$ beginnt nämlich gemäß der obigen Definition mit Termen von mindestens dritter Ordnung in den Feldern. Die Dyson-Wickreihe für $Z_2[\phi]$ führt in der bekannten Weise zu Feynmanregeln mit dem Propagator \mathcal{D}_{12} und Vertizes, die durch die Funktionalableitungen der klassischen Wirkung an der Stelle φ_0 bestimmt sind. Die Pfadintegrale der Form

$$\int D \frac{\phi}{\sqrt{\hbar}} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \langle \mathcal{D}_{12}^{-1} \phi_1 \phi_2 \rangle \right\} \quad (3.9)$$

sind von der Ordnung $O(\hbar^{n/2})$ für gerade n und verschwinden für ungerade n . Das bedeutet, daß Z_2 mit Termen der Ordnung $O[\hbar^0]$ beginnt, und folglich $\ln[Z_2]$ mit Termen der Ordnung $O[\hbar]$, also insgesamt tatsächlich W_2 von der Ordnung $O[\hbar^2]$ ist.

Für die ursprüngliche Theorie, die wir eigentlich betrachten wollen, also für $J = 0$, gilt

$$\mathcal{D}_{12}^{-1} = \frac{\delta S[0]}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} = (-\square_1 - m^2 + i\epsilon) \delta^{(4)}(1-2) = D_{12}^{-1}. \quad (3.10)$$

Damit ist aber in diesem Falle \mathcal{D}_{12} der freie Feynmanpropagator D_{12} , dessen Fouriertransformierte bzgl. $x_1 - x_2$ die bekannte Gestalt $D(p) = 1/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$ besitzt.

Wir stellen noch kurz den Bezug zur bekannten störungstheoretischen Berechnung von Z und W zu der eben durchgeführten Sattelpunktsnäherung des Pfadintegrals her. Z ist diagrammatisch ausgedrückt die Summe aller geschlossenen Diagramme, seien diese zusammenhängend oder nicht. Denken wir uns nun einen Term mit n zusammenhängenden Teildiagrammen, die jeweils V_j ($j = 1 \dots n$) Vertizes enthalten. Dies entspricht in der Dyson-Wick-Entwicklung einem Diagramm ($V = \sum_j V_j$)-ter Ordnung. Von der Entwicklung der Exponentialfunktion haben wir also einen Faktor $1/V!$ in diesem Summanden. Andererseits kommt jedes der Diagramme $V!/n!$ -mal vor, weil man jeweils alle Vertizes untereinander vertauschen kann (Faktor $V!$), andererseits aber alle Diagramme, die sich nur durch die Permutation der n zusammengesetzten Teile voneinander unterscheiden, nur je einmal in der Entwicklung von Z vorkommen. Nun sei iW/\hbar die Summe aller zusammenhängenden geschlossenen Diagramme, wobei Diagramme, die sich untereinander nur durch die Permutation von Vertizes unterscheiden, nur einmal auftreten. Dann gilt offenbar wegen der soeben durchgeführten Überlegung

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iW[J]/\hbar)^n = \exp[iW[J]/\hbar], \quad (3.11)$$

was mit der obigen Definition von W übereinstimmt. Damit ist also W die Summe aller zusammenhängenden geschlossenen Diagramme.

Jetzt soll noch gezeigt werden, daß die \hbar -Ordnung eines Graphen (nicht zu verwechseln mit der Ordnung der Dysonreihe, die die Anzahl von Wechselwirkungen, also die Anzahl der Vertizes des entsprechenden Diagramms, angibt!) für amputierte n -Punkt-Funktionen mit der Zahl der geschlossenen Schleifen übereinstimmt. Dazu bemerken wir, daß jede innere Linie eines Diagramms einem Propagator $i\hbar\mathcal{D}$ entspricht und jeder Vertex einen Faktor $1/\hbar$ beiträgt. Die Ordnung in \hbar ist also $I - V$, wobei I die Zahl der inneren Linien und V die Zahl der Vertizes ist.

Jetzt denken wir uns eine translationsinvariante Theorie (z.B. die ursprüngliche Theorie bei verschwindendem J) und die Graphen im Impulsraum berechnet. Dann ist an jedem der Vertizes Impulserhaltung zu beachten, d.h. es gibt unter Berücksichtigung der Forderung der Impulserhaltung des gesamten Diagramms ($V - 1$) Nebenbedingungen für die inneren Impulse, die in den Propagatoren auftreten, die durch innere Linien repräsentiert werden. Insgesamt ist also gemäß

den Feynmanregeln über $I - V + 1 = L$ unabhängige Impulse zu integrieren, das ist aber die Zahl der im Diagramm auftretenden Schleifen. Die Entwicklung der S -Matrix nach Potenzen von \hbar beginnt also mit der Ordnung \hbar^{-1} (Baumgraphennäherung), und jede Schleife erhöht die \hbar -Ordnung um eins. Dies gilt offensichtlich auch für nicht translationsinvariante Theorien, weil es sich um eine rein kombinatorische Eigenschaft von Diagrammen handelt.

Die analoge Anwendung der Sattelpunktsentwicklung des Pfadintegrals in der nichtrelativistischen Quantenmechanik (in Anwendung auf die sog. "erste Quantisierung") stellt eine elegante Formulierung der WKB-Methode dar. Dies zeigt, daß die Schleifenentwicklung der Quantenfeldtheorie einer Entwicklung der Theorie um eine klassische Näherung entspricht. Die niedrigste Ordnung, d.h. bei alleiniger Berücksichtigung von Diagrammen ohne Schleifen ("Baumgraphennäherung"), ergibt dabei die Voraussagen der klassischen Feldtheorie, vernachlässigt also Quantenfluktuationen des Feldes völlig.

Mit diesen Vorüberlegungen können wir das nächste wichtige Funktional untersuchen, nämlich die *effektive Wirkung*. Diese ist als funktionale Legendretransformation des Funktionals W definiert:

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \langle J_1 \varphi_1 \rangle_1 \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \frac{\delta W[J]}{\delta J_1}. \quad (3.12)$$

Wir zeigen jetzt, daß die Baumgraphennäherung der Theorie mit Γ als Wirkung der exakten ursprünglichen Theorie mit äußerer Quelle J entspricht. Faßt man also Γ als klassische Wirkung des Feldes φ auf, erhält man die exakte Quantenfeldtheorie der ursprünglichen Wirkung S . Ein Blick auf (3.5) zeigt nämlich, daß in 0-ter Näherung der Sattelpunktsentwicklung für die Theorie mit Γ als Wirkung gilt:

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} W_{\Gamma}^{(0)} \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Gamma[\varphi] + i \langle J_1 \varphi_1 \rangle_1 \right\}, \quad (3.13)$$

wobei φ_J durch die Forderung stationärer Wirkung, also

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \phi_1} = -J_1 \quad (3.14)$$

bestimmt ist. Betrachten wir nun wiederum die Definition (3.12) für die effektive Wirkung, so finden wir:

$$W_{\Gamma}^{(0)}[J] = \Gamma[\varphi] + \langle \varphi_1 J_1 \rangle_1 = W[J]. \quad (3.15)$$

Unsere obigen Betrachtungen zeigen nämlich, daß W_{Γ} die Summe aller zusammenhängenden geschlossenen Diagramme der Theorie mit der Wirkung Γ und somit die niedrigste Ordnung der Sattelpunktsentwicklung des Pfadintegrals erzeugendes Funktional der zusammenhängenden geschlossenen Baumgraphendiagramme dieser Theorie, und dies wiederum stimmt mit der exakten ursprünglichen Theorie überein. Die Vertizes sind bzgl. der Theorie mit Wirkung Γ von Baumgraphenniveau.

Betrachtet man dies vom Standpunkt der ursprünglichen Theorie aus, sind sie die Summen aller einteilchenirreduziblen amputierten Diagramme, also der *exakten Vertizes* mit äußeren Beinchen, die die klassischen Felder φ repräsentieren. Wäre nämlich ein solcher mit φ -Feldern überschobener Vertex nicht einteilchenirreduzibel, enthielte er eine einzelne innere Linie und dies würde einem Baumgraphen mit kleineren Untervertexgraphen entsprechen. Dieses Diagramm kommt aber schon explizit in der Summe vor. Damit ist gezeigt, daß Γ im Sinne der ursprünglichen Theorie mit äußerer Quelle J die Summe aller einteilchenirreduziblen zusammenhängenden Diagramme,

für die äußere Beinchen φ -Felder repräsentieren und damit erzeugendes Funktional der exakten einteilchenirreduziblen amputierten n -Punktfunktionen (kurz Vertexfunktionen) der Theorie mit der Wirkung S ist.

Insbesondere ist

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} = - \left(\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \right)^{-1}, \quad (3.16)$$

und das rechnet man auch mit Hilfe von (3.12) direkt nach.

Jetzt wenden wir uns den erzeugenden Funktionalen mit bilokalen Quellen zu, die zusätzlich zu den lokalen Quellen eingeführt werden. Es wird sich herausstellen, daß mit ihrer Hilfe weitere Untermengen von Diagrammen definiert werden können, die im nächsten Abschnitt wichtig werden, wenn wir selbstkonsistente Näherungsverfahren entwickeln.

Zunächst definieren wir die Feldtheorie mit einer lokalen und einer bilokalen äußeren Quelle durch ein erzeugendes Funktional für unzusammenhängende n -Punktfunktionen

$$Z[J, K] = \int D\phi \exp \left\{ iS[\phi] + i \langle J_1 \phi_1 \rangle_1 + \frac{i}{2} \langle K_{12} \phi_1 \phi_2 \rangle_{12} \right\}, \quad (3.17)$$

wobei wir wieder zu $\hbar = 1$ übergegangen sind. Aus der Definition (3.17) folgt nun sofort:

$$\frac{\delta^2 Z[J, K]}{\delta J_1 \delta J_2} = 2i \frac{\delta Z[J, K]}{\delta K_{12}}. \quad (3.18)$$

Die Beziehung zu zusammenhängenden Graphen ergibt sich nun unmittelbar aus der Definition $Z = \exp(iW)$:

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta K_{12}} = \frac{1}{2} (\varphi_1 \varphi_2 + iG_{12}), \quad (3.19)$$

wobei $G_{12} = -\delta W[J, K]/(\delta J_1 \delta J_2)$ der zusammenhängende exakte Propagator der ursprünglichen Theorie mit einer lokalen Quelle J und einer bilokalen Quelle K ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch vollständige Induktion auch die oben mit einem rein diagrammatischen Argument gewonnene Einteilchenirreduzibilität von Γ bzw. der von Γ erzeugten Vertexfunktion.

Jetzt bilden wir die Legendretransformierte nicht nur bzgl. der lokalen Quelle J (dann erhielten wir wieder die Summe aller einteilchenirreduziblen Diagramme der ursprünglichen Theorie mit äußeren lokalen und bilokalen Quellen), sondern auch bzgl. der bilokalen Quelle K :

$$\Gamma[\varphi, G] = W[J, K] - \langle \varphi_1 J_1 \rangle_1 - \frac{1}{2} \langle (\varphi_1 \varphi_2 + iG_{12}) K_{12} \rangle_{12}, \quad (3.20)$$

wobei φ und G durch

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta J_1} = \varphi_1 \quad \text{und} \quad \frac{\delta W[J, K]}{\delta K_{12}} = \frac{1}{2} (\varphi_1 \varphi_2 + iG_{12}) \quad (3.21)$$

definiert sind. Es ergibt sich aus diesen Definitionen, daß umgekehrt

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta \varphi_1} = -J_1 - \langle K_{12} \varphi_2 \rangle_2 \quad \text{und} \quad \frac{\delta \Gamma[\varphi, G]}{\delta G_{12}} = -\frac{i}{2} K_{12} \quad (3.22)$$

ist. Jetzt definieren wir das entscheidende Funktional Γ_2 vermöge des Ansatzes

$$\Gamma[\varphi, G] = S[\varphi] + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (DG^{-1}) + \frac{i}{2} \langle \mathcal{D}_{12}^{-1} (G_{12} - \mathcal{D}_{12}) \rangle_{12} + \Gamma_2[\varphi, G]. \quad (3.23)$$

Hierin bezeichnet D den klassischen freien kausalen Propagator (also im Vakuumfall den Feynmanpropagator), und \mathcal{D} ist als Funktional von φ durch die quadratischen Terme in der klassischen Wirkung $S[\varphi]$ bestimmt, d.h.

$$\mathcal{D}_{12} = \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} \quad (3.24)$$

definiert.

Im folgenden zeigen wir, daß Γ_2 den *zweiteilchenirreduziblen* Anteil der effektiven Wirkung mit wenigstens zwei Schleifen darstellt. Dabei repräsentiert jede Linie den exakten Propagator G .

Durch Ableiten von (3.23) nach φ bzw. G erhalten wir

$$-J - \langle K_{x_2}\varphi_2 \rangle_2 = \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta\varphi} = \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} + \frac{i}{2} \left\langle \frac{\delta\mathcal{D}_{12}^{-1}}{\delta\varphi} G_{12} \right\rangle_{12} + \frac{\delta\Gamma_2}{\delta\varphi} \quad (3.25)$$

$$-\frac{i}{2}K_{12} = \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G_{12}} = -\frac{i}{2}G_{12}^{-1} + \frac{i}{2}\mathcal{D}_{12}^{-1} + \frac{\delta\Gamma_2[\varphi, G]}{\delta G_{12}}. \quad (3.26)$$

Wir interessieren uns nun für die Theorie mit verschwindenden äußeren Quellen J und K . Nach (3.22) bedeutet dies die Stationarität der effektiven Wirkung Γ bzgl. φ und G :

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta\varphi} = 0, \quad \frac{\delta\Gamma[\varphi, G]}{\delta G} = 0. \quad (3.27)$$

Diese stellen die Bewegungsgleichungen für die dynamischen Größen zur Beschreibung des Systems, nämlich das klassische Feld φ und den exakten Propagator G , dar.

Die erste Gleichung ist in der Tat eine Feldgleichung für das klassische Feld φ . Diese besitzt die Form der Klein-Gordon-Gleichung mit einem Quellstrom, der sowohl von der klassischen Wechselwirkung als auch von den Quantenfluktuationen herrührt. Dabei ist zu beachten, daß \mathcal{D} ein Funktional von φ ist:

$$(-\square - m^2)\varphi + \underbrace{\frac{\delta S_I}{\delta\varphi} + \frac{i}{2} \left\langle \frac{\delta\mathcal{D}_{12}^{-1}}{\delta\varphi} G_{12} \right\rangle_{12}}_{-j} + \frac{\delta\Gamma_2}{\delta\varphi} = 0. \quad (3.28)$$

Die Stationaritätsbedingung bzgl. G ist gemäß (3.26) äquivalent zur Dysongleichung, die die Greenfunktion G mit Hilfe der Selbstenergie Σ ausdrückt. Daraus ergibt sich die Selbstenergie als Funktionalableitung von Γ_2 zu

$$-i\Sigma_{12} := -i(\mathcal{D}_{12}^{-1} - G_{12}^{-1}) = 2 \frac{\delta(i\Gamma_2)}{\delta(iG_{21})}. \quad (3.29)$$

Wir wissen nun, daß die Selbstenergie diagrammatisch resummierbar ist. Unter diagrammatischer Resummierbarkeit verstehen wir dabei, daß jedes störungstheoretische Unterdiagramm in einem Gesamtdiagramm für sich aufsummiert und das Resultat in das Gesamtdiagramm eingesetzt und entsprechend den Diagrammregeln zum Gesamtergebnis integriert werden kann. Diese Eigenschaft rührt daher, daß die kombinatorischen Zählerfaktoren für Diagramme mit äußeren Punkten unabhängig von der Ordnung der Störungstheorie, also der Anzahl der Vertizes V in dem Unterdiagramm sind.

Insgesamt zeigt sich, daß die Summe aller zur Selbstenergie beitragenden Diagramme der Störungstheorie letztlich durch die Summe aller Diagramme mit exakten Propagatorlinien, die keinerlei Selbstenergieeinschübe enthalten, dargestellt werden kann. Diese so gewonnene Klasse von

Diagrammen bezeichnet man als *angezogene Skelettdiagramme*. Sie sind einteilchenirreduzibel und in den Unterdiagrammen, in denen durch Zerschneiden von Linien die beiden äußeren Punkte nicht getrennt werden, sogar zweiteilchenirreduzibel. Letzteres bedeutet nämlich, daß in diesen Diagrammen keine Selbstenergieeinschübe mehr vorkommen.

Diese wichtigen diagrammatischen Eigenschaften sind von unseren Funktionalmethoden her verständlich. Ist nämlich G der Propagator, der bei gegebenem klassischen Feld φ das Funktional $\Gamma[\varphi, G]$ bzgl. G stationär macht, verschwindet gemäß 3.22 die bilokale Quelle K . Für dieses G stimmt also $\Gamma[\varphi, G]$ mit der effektiven Wirkung $\Gamma[\varphi]$ überein. Von diesem Funktional haben wir aber oben gezeigt, daß es erzeugendes Funktional der bzgl. exakter Propagatoren einteilchenirreduziblen Diagramme ist, woraus die Einteilchenirreduzibilität von Σ folgt. Genau dies ist aber Ausdruck der soeben beschriebenen diagrammatischen Resummierbarkeit.

Nun bedeutet die Funktionalableitung von $i\Gamma_2$ nach iG , daß jedes zu $i\Gamma$ beitragende Diagramm durch Öffnen einer Propagatorlinie die Klasse aller zur Selbstenergie $-i\Sigma$ beitragenden Graphen erzeugt. Dabei entstehen naturgemäß in jedem Diagramm zwei amputierte äußere Punkte.

Wegen der Einteilchenirreduzibilität der Selbstenergie zeigt dies, daß Γ_2 *zweiteilchenirreduzibel* sein muß. Wäre nämlich Γ_2 nicht zweiteilchenirreduzibel, gäbe es wenigstens ein Diagramm, das durch Öffnen zweier G -Linien in zwei Teile zerfällt. Das Öffnen einer dieser Linien ergäbe also ein einteilchenreduzibles Diagramm, was im Widerspruch zu den Eigenschaften der Selbstenergie stünde. Außerdem wissen wir, daß der inverse Propagator der Theorie in Baumgraphennäherung gerade der klassische Propagator $\mathcal{D}[\varphi]$ ist, also jedes Selbstenergiediagramm wenigstens eine Schleife enthält. Dieses entsteht aber durch Öffnen einer vollen Linie in einem Diagramm von Γ_2 , so daß Graphen, die zu Γ_2 beitragen, wenigstens zwei Schleifen beinhalten.

Damit ist aber Γ_2 als die Summe aller geschlossenen zweiteilchenirreduziblen Diagramme mit wenigstens zwei Schleifen identifiziert. Die Vertizes sind durch $S_I(\varphi, \phi)$ gegeben und Linien bedeuten exakte Propagatoren. Diese Regeln lassen sich wie folgt kompakt formulieren

$$\Gamma_2[\varphi, G] = \langle T \exp[S_I(\varphi, \phi)] \rangle_{2T\text{-irr.}, (T\phi_1\phi_2)=G}. \quad (3.30)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß Γ_2 im Unterschied zur Selbstenergie *nicht* diagrammatisch resummiert ist. Anders als bei Diagrammen mit äußeren Punkten ergibt sich nämlich aus rein kombinatorischen Gründen für einen Graphen mit V Vertizes ein globaler Faktor $1/V$, d.h. der Symmetriefaktor ist von der Anzahl der Vertizes abhängig. Formal erkennt man dies auch daran, daß die Selbstenergie $G^{-1} - \mathcal{D}^{-1}$ ist und sich Γ_2 als Funktionalintegral bzgl. G daraus ergibt.

3.1.1 Ein einfaches Beispiel: ϕ^4 -Theorie

Um die obigen abstrakten Betrachtungen etwas verständlicher zu machen, behandeln wir ein einfaches Beispiel, die ϕ^4 -Theorie. Dabei ist ϕ ein reelles skalares Feld, und die Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (3.31)$$

Nach (3.24) ergibt sich der inverse klassische Propagator in diesem Fall zu

$$\mathcal{D}_{12}^{-1} = \left(-\square_1 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi_1^2 \right) \delta^{(4)}(x_1 - x_2) = D_{12}^{-1} - \frac{\lambda}{2}\varphi_1^2 \delta^{(4)}(x_1 - x_2). \quad (3.32)$$

In die Definitionsgleichung (3.23) für Γ_2 eingesetzt ergibt dies als Bewegungsgleichung

$$-\square\varphi - m^2\varphi - \frac{\lambda}{3!}\varphi^3 - \frac{i}{2}\varphi(x)G(x, x) + \frac{\delta\Gamma_2}{\delta\varphi_1} = 0. \quad (3.33)$$

Von der Operatorformulierung der Quantenfeldtheorie her wissen wir, daß die Greenfunktion mit zwei gleichen Raum-Zeit-Argumenten als Erwartungswert des normalgeordneten Feldoperatorprodukts, also durch den Grenzwert $G(x^+, x)$ zu nehmen ist. Dabei bedeutet x^+ den Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} t + \epsilon$.

Jetzt können wir die Diagrammregeln für die Theorie aufstellen. Sie sind denen der Vakuumtheorie sehr ähnlich, jedoch durch Regeln für die Behandlung des klassischen Feldes zu ergänzen. Die diagrammatischen Elemente sind also exakte Propagatoren (dargestellt durch eine dicke Linie, deren Enden mit Raum-Zeit-Punkten zu identifizieren sind), sowie Vertizes mit vier Linien, deren Kreuzungspunkt einen Raum-Zeit-Punkt bedeutet. Die klassischen Felder φ werden durch eine "Nadel" repräsentiert, deren Endpunkt das Raum-Zeitargument des Feldes bezeichnet. Im folgenden versehen wir innere Punkte eines Graphen, über die zu integrieren ist, mit einem dünnen Punkt und äußere Punkte, die Raum-Zeit-Argumente des Resultats darstellen und über die nicht zu integrieren ist, mit einem dicken Punkt. Amputierte Linien werden dünn gezeichnet. Jeder Vertex steht für den Faktor $-i\lambda/4!$. Jedes Beinchen eines Vertex wird entweder durch eine dicke Linie mit einem anderen Beinchen verbunden oder durch eine Nadel ersetzt. Jede dicke Linie steht für einen exakten Propagator iG , der zwei Raum-Zeitpunkte verbindet, und jede Nadel bedeutet die Multiplikation des Ausdrucks mit dem klassischen Feld φ an dem Raum-Zeit-Punkt, in dem die Nadel steckt. Das gesamte Diagramm impliziert auch den kombinatorischen Faktor, der durch die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt ist, ein gegebenes Diagramm aus den soeben eingeführten Elementen aufzubauen. Dieser Symmetriefaktor zählt also die Kontraktionen, die zum gleichen allein durch die Topologie des entsprechenden Diagramms bestimmten analytischen Ausdruck führen.

Aus diesen allgemeinen Abzählregeln ergibt sich auch, daß geschlossene Diagramme ohne äußere Punkte, wie oben schon erwähnt, gegenüber den Diagrammen mit äußeren Punkten einen Extrafaktor $1/V$ enthalten, wobei V die Zahl der Vertizes bezeichnet. Somit ergibt sich in niedrigster Näherung für Γ_2 : Diese Diagramme erfüllen in der Tat die oben allgemein aufgestellten

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_2 = & \left[\text{Diagramm 1} \right] + \left[\text{Diagramm 2} \right] + \\
 & + \left[\text{Diagramm 3} \right] + \dots \quad \text{mit } \begin{array}{c} \otimes \\ | \\ x \end{array} = \varphi(x)
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.1: Näherung von Γ_2 der ϕ^4 -Theorie bis zur Ordnung λ^2 . Die Zählerfaktoren der Diagramme sind explizit angegeben.

Regeln: Sie sind zweiteilchenirreduzibel und besitzen mindestens zwei Schleifen.

Gemäß den oben angegebenen Regeln entsprechen diese Diagramme dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_2 &= \frac{-i\lambda}{8} \int d^4x [iG(x^+, x)]^2 + \frac{(-i\lambda)^2}{2 \cdot 3!} \int d^4x d^4y \varphi(x) [iG(x, y)]^3 \varphi(y) + \\
 &+ \frac{(-i\lambda)^2}{2 \cdot 4!} \int d^4x d^4y [iG(x, y)]^4.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Setzen wir jetzt

$$-\square\varphi - m^2\varphi = j, \tag{3.35}$$

wobei j der gesamte Quellstrom des Felderwartungswertes φ ist, erhalten wir in dieser Näherung vermöge (3.33): Unter Anwendung der Graphenregeln ergibt dies

Abbildung 3.2: Beiträge zum Quellstrom für den Felderwartungswert der ϕ^4 -Theorie bis zur Ordnung λ^2 . Die Symmetriefaktoren der Diagramme sind angegeben. Das erste Diagramm rührt dabei von dem klassischen φ^4 -Potential her, was schon daraus ersichtlich ist, daß es sich um ein Diagramm ohne Schleifen (Baumgraphen) handelt. Das zweite Einschleifendiagramm ergibt sich aus der Ableitung von \mathcal{D}^-G . Dieses Diagramm ist als Einschleifendiagramm nämlich nicht in Γ_2 enthalten. Das dritte Diagramm rührt von der Ableitung von Γ_2 nach φ her. Diagrammatisch bedeutet dies das Entfernen einer Nadel. Das entsprechende Diagramm von Γ_2 enthält zwei Nadeln, wodurch sich der zusätzliche Faktor $1/V = 1/2$ wieder heraushebt.

$$-ij(x) = -i\frac{\lambda}{3!}\varphi^3(x) + \frac{-i\lambda}{2!}iG(x^+, x) + \frac{(-i\lambda)^2}{3!} \int d^4y [iG(x, y)]^3 \varphi(y). \tag{3.36}$$

Dieses Resultat ergibt sich auch durch Ableiten von (3.34) nach φ und Berücksichtigung der Symmetrie von G unter Vertauschung der Argumente.

Durch Ableiten von $i\Gamma_2$ nach iG , d.h. Öffnen jeder dicken Linie in Abb. 3.1, erhalten wir die entsprechende Näherung zur Selbstenergie, s. Abb. 3.3. In Formeln übersetzt bedeutet dies:

$$-i\Sigma(x, y) = \frac{-i\lambda}{2}iG(x^+, x)\delta^{(4)}(x - y) + \frac{(-i\lambda)^2}{3!}[iG(x, y)]^3 + \frac{1}{2}\varphi(x)\varphi(y)[iG(x, y)]^2. \tag{3.37}$$

Dabei ist allerdings zu beachten, daß dies nicht die Selbstenergie bzgl. des freien Propagators D sondern bzgl. des klassischen Propagators \mathcal{D} ist. Bzgl. des freien Propagators wäre noch ein Term $1/2\varphi(x_1)\delta^{(4)}(x_1 - x_2)$ zu ergänzen. Der klassische Propagator hat gegenüber dem freien den Vorteil, daß wir für Γ_2 auch bei nichtverschwindendem Erwartungswert des Feldes φ die einfache Regel erhalten, daß Γ_2 die Summe aller geschlossenen zweiteilchenirreduziblen Diagramme mit wenigstens zwei Schleifen ist, was eine systematische \hbar -Entwicklung ermöglicht.

Dieses Verfahren ist allerdings nur in einfachen Fällen praktisch durchführbar, z.B. wenn das klassische Feld konstant ist. Andernfalls läßt sich nämlich der klassische Propagator nicht angeben. Man kann aber die Wechselwirkung der Quantenfelder mit dem klassischen Feld auch den

$$-i\Sigma_{12} = \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} + \text{Diagramm 3} + \dots$$

Abbildung 3.3: Selbstenergiebeiträge der ϕ^4 -Theorie bis zur Ordnung λ^2 . Die Symmetriefaktoren der Diagramme sind angegeben. Diese Diagramme ergeben sich aus Abb. 3.1 durch Entfernen je einer Linie.

Wechselwirkungstermen der Lagrangedichte zuordnen und diese Glieder mit in die Störungsentwicklung aufnehmen. Dann ist das erzeugende Funktional für die Selbstenergie nicht mehr mit Γ_2 identisch. Es wird durch ein Funktional Φ ersetzt, das sich als Summe aller zweiteilchenirreduziblen Diagramme ergibt. Dieses Verfahren ist in [IKV99] ausgeführt und zu dem hier gezeigten äquivalent.

3.2 Die Erhaltungssätze

3.2.1 Das Noethertheorem für klassische Feldtheorien

Wir betrachten zunächst das Noethertheorem für klassische Feldtheorien. Dies ist keine so große Einschränkung, weil im Zusammenhang mit Quantenfeldtheorien die klassische Näherung, also die klassische Feldtheorie selbst, Baumgraphennäherung bedeutet. Dies erkennt man daran, daß dies die Näherung ist, die man in niedrigster Ordnung der Sattelpunktentwicklung des Pfadintegrals erhält. Wir haben oben gesehen, daß die klassische Näherung der effektiven Wirkung (also deren Baumgraphennäherung) der exakten Quantenfeldtheorie der ursprünglichen Theorie entspricht, so daß wir die im folgenden für den klassischen Fall erhaltenen Resultate sofort übertragen können.

Wir haben unsere klassische Feldtheorie allgemein durch ein Wirkungsfunktional $S[\phi]$ charakterisiert. Die physikalischen Felder ergeben sich durch die Stationaritätsbedingung

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0, \quad (3.38)$$

die Feldgleichungen bedeuten. Das Wirkungsfunktional selbst ist stets durch das vierdimensionale Volumenintegral über eine Lagrangedichte, die nur von den Feldern und deren Gradienten abhängt, definiert. Es gilt also

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (3.39)$$

Von den Feldern verlangen wir nur, daß sie hinreichend schnell im Unendlichen verschwinden, so daß das Wirkungsfunktional wohldefiniert ist.

Durch partielle Integration rechnet man leicht nach, daß die Stationaritätsbedingung (3.38) äquivalent zur Forderung der Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (3.40)$$

ist.

Jetzt betrachten wir eine ziemlich allgemeine Klasse von Symmetrietransformationen, die sich durch die Invarianz der Wirkung unter der Operation einer Liegruppe beschreiben lassen. Die Liegruppe darf globale und lokale Eichtransformationen sowie Raum-Zeit-Transformationen umfassen. Die einzige Beschränkung der Allgemeinheit soll darin liegen, daß die Raum-Zeit-Transformationen als unabhängig von den Feldern angesehen werden. Dies ist für die in den vorangegangenen Kapiteln betrachteten Feldtheorien, die auf der speziell relativistischen Raum-Zeit-Struktur aufbauen, sicher der Fall.

Die Wirkung einer infinitesimalen Transformation läßt sich also durch

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (3.41)$$

beschreiben. $\delta\phi(x)$ enthält dabei sowohl die Wirkung von lokalen oder globalen Eichsymmetrien als auch die Wirkung von Lorentztransformationen, falls die Felder nicht skalar sind. Wir müssen nun die Variation der Wirkung der in dieser Symmetriegruppe enthaltenen Transformationen bestimmen:

$$\delta S[\phi] = \int d^4x' \mathcal{L}(\phi', \partial'_{\mu}\phi') - \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi). \quad (3.42)$$

Dazu müssen wir zunächst im ersten Integral auf die ursprünglichen Raum-Zeit-Variablen umrechnen. Die Jacobideterminante ist bis auf Glieder höherer Ordnung in δx :

$$\det \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = \det (\delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}\delta x^{\mu}) = 1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu}. \quad (3.43)$$

Dies wird sofort klar, wenn man sich die Determinante durch die Summe über Permutationen von Matrixelementen ausgerechnet denkt. Dann trägt in erster Ordnung in δx^{μ} nur das Produkt der Diagonalmatrixelemente zur Determinante bei. Alle übrigen Produkte in der Summe enthalten mindestens zwei Faktoren δx .

Ebenso ist zu beachten, daß Variation und Differentiation nach Raum-Zeit-Variablen nicht vertauschen:

$$\delta(\partial_{\mu}\phi) = \partial'_{\mu}\phi'(x') - \partial_{\mu}\phi = \partial_{\nu}(\phi + \delta\phi) \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)^{-1} - \partial_{\mu}\phi = \partial_{\mu}(\delta\phi) - (\partial_{\mu}\delta x^{\nu})\partial_{\nu}\phi. \quad (3.44)$$

Setzen wir nun (3.43) und (3.44) in (3.42) ein, finden wir nach partiellen Integrationen:

$$\delta S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi + \partial_{\mu} \left((\partial_{\nu}\phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \right) \delta x^{\nu} \right] = 0. \quad (3.45)$$

Daß die Variation der Wirkung verschwindet, und zwar für alle im Unendlichen hinreichend schnell verschwindenden Felder und nicht nur für Lösungen der Feldgleichungen, ist gerade die Aussage, daß es sich um eine Symmetrietransformation handelt. Dieses identische Verschwinden für alle Felder kann aber nur dadurch gegeben sein, daß der Integrand eine Viererdivergenz ist.

Durch Ausführung der Ableitung im zweiten zu δx^{ν} proportionalen Summanden läßt sich dieser in die Form

$$- \int d^4x \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} (\partial_{\nu}\phi) \delta x^{\nu} \quad (3.46)$$

bringen. Nun können wir die infinitesimale Wirkung der Liegruppe auf die Felder und Raum-Zeit-Variablen in der Form

$$\delta\phi(x) = \tau_a(x, \phi) \delta\eta^a, \quad \delta x^{\mu} = -T_a^{\mu}(x) \delta\eta^a \quad (3.47)$$

schreiben, wobei die τ bzw. T Basen der Liealgebra in den Darstellungen auf den Feldern bzw. den Raum-Zeitvariablen und die $\delta\eta$ von x und ϕ unabhängige reelle Parameter sind. Dann läßt sich infolge des identischen Verschwindens des Vierervolumenintegrals (3.45) schließen, daß der Integrand eine Viererdivergenz sein muß:

$$\left[\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \tau_a + \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} (\partial_\nu\phi) T_a^\nu \right] \delta\eta^a = \partial_\mu j_a^\mu \delta\eta^a, \quad (3.48)$$

und für die Lösungen der Feldgleichungen, die die Stationaritätsbedingung (3.38) erfüllen, ergibt sich wegen der willkürlichen Wählbarkeit der η^a :

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0. \quad (3.49)$$

Das ist die Aussage des *Noether-Theorems*:

Zu jedem Generator einer n -dimensionalen Symmetriegruppe der Wirkung existiert ein divergenzfreier Strom. Diese Ströme werden als die zu der Symmetriegruppe gehörigen Noetherströme bezeichnet.

Um nun einen expliziten Ausdruck für den Strom zu gewinnen, müssen wir nur (3.45) mit Hilfe der Lagrangedichte ausdrücken. Unter Benutzung von (3.44) finden wir:

$$\delta\eta^a \partial_\mu j_a^\mu = \partial_\mu \left[\left(\partial_\nu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] + \delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (3.50)$$

Dies zeigt, daß eine Symmetrie der Wirkung vorliegt, wenn

$$\exists \Omega_a^\mu(\phi, x) : \delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu = \partial_\mu \Omega_a^\mu \delta\eta^a. \quad (3.51)$$

Die Noetherströme sind dann durch

$$\delta\eta^a j_a^\mu = \left(\partial_\nu\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi + \Omega_a^\mu \delta\eta^a \quad (3.52)$$

gegeben.

Daß das Noethertheorem die lokale Formulierung eines Erhaltungssatzes ist, zeigt sich durch Integration über ein beliebiges Gebiet des Minkowskiraums, dessen Rand durch zwei raumartige Hyperflächen begrenzt wird. Eine Hyperfläche heißt dabei raumartig, wenn ihr Flächennormalenvektor zeitartig ist. Bezeichnen wir dieses Gebiet mit V , so folgt aus (3.49) durch Anwenden des Gaußschen Satzes:

$$\int_{\partial V} j_a^\mu dS_\mu = 0. \quad (3.53)$$

Da eine Schar zeitartiger Hyperflächen, die durch $f(x) = \tau = \text{const}$ (wobei f ein beliebiges Skalarfeld mit überall zeitartigem Gradienten ist) ein kovariantes Zeitmaß τ festlegt, und die beiden raumartigen Hyperflächen, aus denen sich ∂V zusammensetzt, durch $S_1 : f(x) = \tau_1$ bzw. $S_2 : f(x) = \tau_2$ beschrieben werden können, ist

$$Q_a(\tau_1) = \int_{S_1} j_a^\mu dS_\mu = \int_{S_2} j_a^\mu dS_\mu = Q_a(\tau_2), \quad (3.54)$$

und das bedeutet, daß das Integral über die raumartige Hyperfläche eine zeitlich konstante kovariante Größe ist. Insbesondere kann man $f(x) = x^0 = t$ wählen, so daß

$$Q_a(t) = \int d^3\vec{x} j_a(x) \quad (3.55)$$

ist. Die Q_a heißen die zu der Symmetriegruppe gehörigen *Noetherladungen* (vgl. hierzu [Lin96]). Wir betrachten jetzt speziell Raum-Zeit-Translationen. Die dazugehörigen Noetherladungen dieser Transformationen definieren Gesamtenergie und -impuls.

Es gilt

$$\delta\phi(x) = 0, \delta x = \delta a = \text{const} \Rightarrow \tau_a(x, \phi) = 0, T_a^\mu(x) = -\delta_a^\mu, \delta\eta^a = \delta a^a. \quad (3.56)$$

Damit findet man für die erhaltenen Ströme nach (3.48) mit $\Omega^\mu \cong 0$:

$$\Theta^\mu{}_a = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \partial_a \phi - \delta_a^\mu \mathcal{L}. \quad (3.57)$$

Dies ist der kanonische Energie-Impulstensor. Dieser besitzt für sich genommen noch keine weitere physikalische Bedeutung. Dies trifft erst auf die dazugehörigen Noetherladungen, die in diesem Fall Gesamtenergie und -impuls der Felder bedeuten, zu:

$$P_\nu(t) = \int d^3 \vec{x} \Theta^0{}_\nu. \quad (3.58)$$

Diese sind eindeutig als Erzeugende der Symmetrietransformation definiert. Die dazugehörigen Noetherströme können um beliebige Viererdivergenzen abgeändert werden, ohne daß sich die Ladungen verändern. Mit den j_a sind also auch

$$j'^\mu{}_a = j_a^\mu + \partial_\nu k_a^{\nu\mu} \quad (3.59)$$

äquivalente Noetherströme. Verlangt man zusätzlich, daß auch die Divergenz des undefinierten Stromes $j'^\mu{}_a$ verschwindet, muß man nur $k_a^{\mu\nu}$ antisymmetrisch in μ und ν wählen, und das ist keine wesentliche Beschränkung für die Umdefinition der Noetherströme.

Speziell im Zusammenhang mit dem Energie-Impulstensor treten Probleme der physikalischen Interpretation auf. So ist schon im Fall der klassischen Elektrodynamik der kanonische Energie-Impulstensor nicht eichinvariant. In diesem Fall läßt sich der Energie-Impulstensor eindeutig durch die Wahl geeigneter $k_a^{\mu\nu}$ in einen im physikalischen Gehalt äquivalenten eichinvarianten Energie-Impuls-Tensor umschreiben (vgl. [IZ80]). Erst dadurch erhalten wir die aus der klassischen Elektrodynamik bekannten Ausdrücke für Energie- und Impulsdichte (Poyntingvektor).

Die räumlichen Komponenten des Energie-Impulstensors haben die physikalische Bedeutung eines Spannungstensors, wie man durch Ableiten des Gesamtimpulses (3.57) nach der Zeit und Ausnutzen der Divergenzfreiheit des Energie-Impulstensors sieht. Im Falle der Elektrodynamik ist dies der Maxwellsche Spannungstensor.

Wir bemerken noch, daß im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie der Energie-Impulstensor als Quelle des Gravitationsfeldes in den Einsteinschen Feldgleichungen $G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$ eine unmittelbare physikalische Bedeutung erlangt. Dabei ist $T^{\mu\nu}$ der "physikalische" symmetrische Energie-Impulstensor. Seine Gestalt folgt aus der Variation der Wirkung der Felder bzgl. einer infinitesimalen Transformation der pseudoriemannschen Metrik der allgemeinrelativistischen Raum-Zeit. Formal ist dieses Verfahren auch in der speziell-relativistischen Feldtheorie anwendbar, und bietet so die Möglichkeit, in physikalisch eindeutiger Weise den Energie-Impulstensor zu definieren. Dieser unterscheidet sich von dem oben betrachteten kanonischen Energie-Impulstensor nur durch eine Viererdivergenz, und dies ist in unserem Kontext irrelevant, so daß wir im folgenden mit dem kanonischen Energie-Impulstensor rechnen können.

Der Vollständigkeit halber wenden wir das Noethertheorem noch auf Lorentztransformationen an. Eine infinitesimale Lorentztransformation wirkt wie folgt auf die Felder und die Raum-Zeit-Koordinaten:

$$\delta\phi(x) = \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\phi(x), \quad \delta x_\mu = \delta\omega_{\mu\nu}x^\nu, \quad (3.60)$$

wobei $\hat{\sigma}^{\mu\nu} = -\hat{\sigma}^{\nu\mu}$ die sechs dem Transformationscharakter der Felder ϕ entsprechenden Basiselemente der $sl[2, \mathbb{C}]$ und $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$ die sechs unabhängigen Parameter der Lorentztransformation bezeichnen. Wegen $\partial_\mu\delta x^\mu = 0$ reduziert sich die Forderung nach Lorentzinvarianz gemäß (3.51 darauf, daß die Lagrangedichte (aufgefaßt als Funktion von x^μ) ein Skalarfeld ist. Dann ist wie bei den Translationen $\Omega^\mu \cong 0$ zu setzen, und es ergeben sich die sechs Noetherströme:

$$J^{\rho,\mu\nu} = x^\mu\Theta^{\rho\nu} - x^\nu\Theta^{\rho\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\phi. \quad (3.61)$$

Dabei ist zu beachten, daß $J^{\rho,\mu\nu}$ antisymmetrisch in μ und ν sein muß, weil die $\delta\omega^{\mu\nu}$ antisymmetrisch in diesen Indizes sind, d.h. μ und ν numerieren die sechs Noetherströme durch. Die sechs Noetherladungen sind also durch

$$J^{\mu\nu} = \int_{\partial V} dS_\rho J^{\rho,\mu\nu} \quad (3.62)$$

gegeben (V hat dieselbe Bedeutung wie in (3.53)). Die drei rein räumlichen Komponenten folgen aus der Invarianz der Wirkung unter Drehungen und sind folglich Drehimpulskomponenten. Ein Blick auf (3.61) zeigt unter Berücksichtigung der Bedeutung des Energie-Impuls-Tensors $\Theta^{\rho\nu}$, daß sich der Drehimpulstensor aus einem Bahn- und einem Spinanteil zusammensetzt. Die Erhaltung der drei zeit-räumlichen Komponenten von $J^{\mu\nu}$ folgt aus der Invarianz unter "Boosttransformationen", so daß dieser Erhaltungssatz den Schwerpunktsatz ausdrückt.

3.2.2 Symmetrien der effektiven Wirkung

Wir betrachten nun die effektive Wirkung der Quantenfeldtheorie. Wie wir oben gezeigt haben, entspricht die Baumgraphennäherung einer Quantenfeldtheorie der klassischen Feldtheorie, und die Baumgraphennäherung der Quantenfeldtheorie der effektiven Wirkung ist nichts anderes als die exakte Quantenfeldtheorie der klassischen Wirkung ausgedrückt durch exakte Propagatoren und exakte Vertexfunktionen.

Um also Erhaltungssätze für die *exakte* Quantenfeldtheorie herzuleiten, kann man das Noethertheorem anwenden, wenn man Symmetrien der effektiven Wirkung kennt, weil die Baumgraphennäherung der effektiven Wirkung der exakten Quantenfeldtheorie von S entspricht. Notwendig dafür ist weiter nur, daß sich die effektive Wirkung als Viererintegral einer effektiven Lagrangedichte, die eine Funktion der Felder und deren Ableitungen ist, ausdrücken läßt. Dies ist aber zumindest störungstheoretisch der Fall.

Wir wollen nun die Beziehung der Symmetrien der effektiven zu denen der klassischen Wirkung herleiten. Dazu postulieren wir, daß das Pfadintegralmaß unter den Symmetrietransformationen invariant ist. Das ist in der Praxis meistens der Fall. Einen wichtigen Ausnahmefall stellen Anomalien dar, die durch ein unter der anomal gebrochenen Symmetrietransformation nicht invariantes Pfadintegralmaß verursacht sein können [Wei96].

Im Falle von unitären bzw. orthogonalen Transformationen der Felder und beliebigen Feldtranslationen trifft diese Annahme zu und folglich auch für Poincaré-Transformationen. Unter dieser Bedingung können wir direkt die bei der Herleitung der Slavnov-Taylor-Identitäten in Kapitel

1 durchgeführten Überlegungen benutzen, um aus der Invarianz der klassischen Wirkung unter den oben betrachteten infinitesimalen Transformationen entsprechende Symmetriebedingungen der effektiven Wirkung zu folgern:

$$\int D\phi i\delta \langle J_1\phi_1 \rangle_1 \exp \{iS[\phi] + i \langle J_1\phi_1 \rangle_1\} = 0. \quad (3.63)$$

Jetzt nutzen wir aus, daß die äußere Quelle J keine besonderen Eigenschaften besitzen muß, weil sie lediglich eine Hilfsgröße darstellt und nicht von den Feldern ϕ abhängt. Folglich können wir ihr beliebige Transformationseigenschaften unter Raum-Zeit-Transformationen auferlegen. Hier ist es bequem, sie wie eine Minkowski-Dichte zu behandeln, d.h. daß $d^4xJ(x)$ ein Tensor und folglich $d^4xJ(x)\phi(x)$ ein Skalarfeld ist. Das Integral selbst ist also ein Skalar. Damit gilt

$$\delta \langle J_1\phi_1 \rangle = \int d^4x' J'(x')\phi'(x') - \int d^4x J(x)\phi(x) = \int d^4x J(x) [\delta\phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi], \quad (3.64)$$

wobei wir (3.41) angewandt haben. Setzt man dies in (3.63) ein, bedeutet dies in Operator-schreibweise geschrieben:

$$\int d^4x J(x) \langle 0 | T [\delta\phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)] | 0 \rangle_J = 0. \quad (3.65)$$

Jetzt erinnern wir uns des Zusammenhangs (3.14) zwischen der äußeren Quelle und der effektiven Wirkung, so daß (3.65) zu

$$\int d^4x \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} \langle 0 | T [\delta\phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x)] | 0 \rangle_J = 0 \quad (3.66)$$

wird. Setzen wir hierin (3.47) ein, sehen wir, daß dies zwar eine Symmetrieforderung der für das Noethertheorem gewünschten Form ist, aber es muß sich nicht um die ursprüngliche Symmetrie handeln. Dazu muß vielmehr noch die Eigenschaft

$$\langle 0 | \tau_a[x, \phi(x)] | 0 \rangle_J = \tau_a[x, \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J], \quad (3.67)$$

erfüllt sein, und das ist i.a. nicht der Fall. Diese Bedingung trifft aber für den wichtigen Spezialfall zu, daß $\tau_a \propto \phi$ ist oder überhaupt nicht von ϕ abhängt. Letzteres ist voraussetzungsgemäß für den zweiten Term $\propto \delta x$ der Fall.

Die Linearität der infinitesimalen Transformationen bzgl. der Felder ist bei den üblicherweise auftretenden globalen Eichsymmetrien und auch bei der Poincaré-Symmetrie der Fall (weil die Felder Skalare bzgl. Translationen und Tensoren bzw. Spinoren bzgl. Lorentztransformationen sind).

Die Forderung (3.67) ist aber sicher nicht bei den lokalen Eichsymmetrien erfüllt, weil die BRST-Invarianz nicht linear in den Feldern ist. Das ist auch der tiefere Grund dafür, daß die n -Punktfunktionen nicht eichinvariant sind. Jedoch sind, wie wir in Kapitel 1 erläutert haben, die S-Matrix und daraus berechnete physikalisch relevante Größen wie Wirkungsquerschnitte sehr wohl eichinvariant. Diese Aussage gilt aufgrund des Beweises von van t'Hooft und Veltman über die Renormierbarkeit der Eichfeldtheorien auch in jeder Loopordnung Störungstheorie, nicht mehr aber für Resummationsschemata, die Teilmengen von Graphen beliebig hoher Loopordnung aufsummieren (s.u.).

Da wir weiter aus der Störungsentwicklung wissen, daß sich die effektive Wirkung als die Summe aller einteilchenirreduziblen geschlossenen Feynmandiagramme berechnen läßt, wissen wir, daß

sie ein Funktional der Felder und deren ersten Ableitungen ist. Daraus können wir wieder wie im Falle der klassischen Wirkung auf die Gültigkeit des Noethertheorems und somit auf die Erfüllung der Erhaltungssätze schließen. Vorausgesetzt (3.67) ist erfüllt, sind die quantenfeldtheoretischen Erwartungswerte der den Symmetrietransformationen zugeordneten klassischen Erhaltungsgrößen ebenfalls zeitlich konstant. Die physikalischen Aussagen folgen nämlich für verschwindende äußere Quelle, und vom Standpunkt der effektiven Wirkung aus betrachtet bedeutet dies wegen (3.14) deren Stationarität.

3.3 Die selbstkonsistenten Näherungen für das π - ρ -System

Wir wenden jetzt unsere Erkenntnisse, die wir oben mit Hilfe der bilokalen Quelle gewonnen haben, auf das $\pi\rho$ -System an. (3.26) besagt zusammen mit (3.29), daß sich die exakte Selbstenergie aus $2i\Gamma_2[\phi, G]$ durch Ableiten nach iG ergibt, und (3.26) ist nichts anderes als die Dysongleichung. Da die Ableitung nach iG diagrammatisch die Öffnung in jedem zu Γ_2 beitragenden geschlossenen Diagramm bedeutet, und der Faktor 2 lediglich kombinatorischen Ursprungs ist, unterscheiden sich die Feynmanregeln zur Berechnung der Selbstenergie von denen für die Störungsrechnung nur dadurch, daß Linien iG , also den exakten Propagator und nicht den Feynmanpropagator iD , repräsentieren.

Nähert man jetzt $i\Gamma_2[\phi, G]$ dadurch, daß man die Summe an irgendeiner Stelle abbricht, ergibt (3.26) zusammen mit den Feynmanregeln eine selbstkonsistente Gleichung für $-i\Sigma$, weil in dieser Betrachtung G einem im Rahmen der Näherung exakten Propagator entspricht.

Es ändert sich nun durch den Abbruch der Reihe für Γ_2 nach einer bestimmten Schleifenordnung nichts an der Invarianz der Wirkung unter Raum-Zeit-Translationen, weil jedes Feynmandiagramm für sich aufgrund des Noethertheorems Energie- und Impulserhaltung an jedem störungstheoretischen Vertex und für das gesamte Diagramm erfüllt. Dasselbe folgt für intrinsische Symmetrien, die sich durch lineare Transformationen der Felder ausdrücken. Daraus folgt sofort durch Anwendung des Noethertheorems, daß auch die so definierte Näherung der Theorie die Erhaltungssätze für die quantenfeldtheoretisch gemittelten Erhaltungsgrößen repektiert ([Bay62]).

Wir wenden dieses Verfahren nun auf das $\pi\rho$ -System an. Die niedrigste Näherung ohne die Berücksichtigung von ρ -Selbstwechselwirkungen und ρ -Higgs-Wechselwirkungen ist durch das Diagramm gegeben. Dabei bedeuten die dicken Linien die exakten Propagatoren der Theorie,



Abbildung 3.4: Näherung für Γ_2

die aus dieser Näherung von Γ_2 folgt. Es ist klar, daß wir jetzt die Theorie mit verschwindenden äußeren lokalen und bilokalen Quellen betrachten, also diejenige, für die die genäherte effektive Wirkung stationär ist. Aus (3.26) und (3.29) folgen dann die Dysongleichungen

$$G_\pi^{ab} = D_\pi^{ab} + G_{0\pi}^{ac} \Sigma_\pi^{cd} G_\pi^{db} \quad \text{und} \quad G_\rho^{a\mu, b\nu} = D_\rho^{a\mu, b\nu} + D_\rho^{a\mu, c\alpha} \Pi_{\alpha\beta}^{cd} G_\rho^{d\beta, b\nu}, \quad (3.68)$$

wobei D_π und D_ρ die freien und G_π und G_ρ die bzgl. der genäherten Theorie exakten Propagatoren bedeuten. Die Selbstenergien entstehen durch Ableiten von Γ_2 nach G_π bzw. G_ρ , und das bedeutet graphisch die Öffnung der jeweiligen Linie in den geschlossenen Diagrammen. D.h. die

selbstkonsistenten Gleichungen werden durch die Feynmanregeln für die Einschleifendiagramme mit “angezogenen” inneren Propagatorlinien bestimmt, d.h. nach Ausmultiplizieren der $SU[2]$ -Generatoren:

$$\begin{aligned}\Sigma_\pi^{ab} &= -2ig^2\delta^{ab} \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^4} (2p^\mu + l^\mu)(2p^\nu + l^\nu) G_{\rho\mu\nu}(l) G_\pi(l+p) + \text{CT}, \\ \Pi_\rho^{a\mu,b\nu} &= ig^2\delta^{ab} \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^4} (2l^\mu + p^\mu)(2l^\nu + p^\nu) G_\pi(l) G_\pi(l+p) + \text{CT}.\end{aligned}\quad (3.69)$$

Das “+CT” deutet die Counterterme in der Lagrangedichte an, die zur Renormierung benötigt werden und in unserem Falle Beiträge zur Wellenfunktions- und Massenrenormierung liefert.

Wir wollen nun die durch (3.68-3.69) gegebenen selbstkonsistenten Gleichungen lösen. Aus Gründen der Lorentzinvarianz ist klar, daß die ρ -Selbstenergie nur Terme $\propto g_{\alpha\beta}$ und $\propto p_\alpha p_\beta$ enthalten kann. Dies schreiben wir in der Form

$$\Pi_{\rho,\alpha\beta}(p) = -\Pi_{1\rho}(p^2)\Theta_{\alpha\beta}(p) - \Pi_{2\rho}(p^2)p_\alpha p_\beta, \quad (3.70)$$

wobei wir den Projektionsoperator auf die transversalen Impulsfreiheitsgrade

$$\Theta_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \quad (3.71)$$

eingeführt haben. $\Pi_{1\rho}$ und $\Pi_{2\rho}$ sind skalare Funktionen, die aus den selbstkonsistenten Gleichungen bestimmt werden müssen. Es ist klar, daß eine solche Zerlegung auch für den ρ -Propagator gelten muß:

$$G_{\rho,\alpha\beta}(p) = -g_{\alpha\beta}G_{1\rho}(p^2) - p_\alpha p_\beta G_{2\rho}(p^2). \quad (3.72)$$

Setzt man die Ansätze (3.71-3.72) in die selbstkonsistenten Gleichungen (3.68-3.69) ein, erkennt man, daß durch die Wahl $G_{2\rho} = 0$ und $\Pi_{2\rho} = -\Pi_{1\rho}$ die Dysongleichung für $G_{2\rho}$ identisch erfüllt wird und dies mit der Dysongleichung für G_1 konsistent ist. Es ist auch klar, daß der longitudinale Teil der Selbstenergie des ρ -Mesons willkürlich wählbar ist, weil er nicht zur S-Matrix beiträgt. Das ersieht man schon daraus, daß das asymptotisch freie ρ -Feld mit Impulsen auf der Massenschale transversal ist und nach der LSZ-Reduktionsformel die amputierte Greenfunktion, also die Selbstenergie, mit diesen asymptotisch freien Feldern zu kontrahieren ist.

Das gleiche gilt für den in Kapitel 1 betrachteten elektromagnetischen Strom des Pions. Diese Betrachtungen zeigen explizit, daß zwar die Ward-Takahashi-Identitäten durch die selbstkonsistente Näherung verletzt werden, weil die BRST-Transformationen nichtlinear auf den Feldern operieren, aber aufgrund der globalen Stromerhaltung dies für die S-Matrix irrelevant ist.

Die verbleibenden Gleichungen ergeben sich nun durch Einsetzen des verbliebenen Ansatzes $G_{\rho,\alpha\beta} = -G_{1\rho}g_{\alpha\beta}$ in (3.68-3.69):

$$\begin{aligned}\Pi_{\rho 1}(p^2) &= \frac{ig^2}{2\omega - 1} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} G_\pi(l^2) G_\pi[(l+p)^2] (p+2l)^2 + \text{CT}, \\ G_{1\rho}(p^2) &= \frac{1}{p^2 - m_\rho^2 - \Pi_{\rho 1}(p^2)}, \\ \Sigma_\pi(p^2) &= 2ig^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} G_{\rho 1}(l^2) G_\pi[(l+p)^2] (2p+l)^2 + \text{CT}, \\ G_\pi(p^2) &= \frac{1}{p^2 - m_\pi^2 - \Sigma_\pi}.\end{aligned}\quad (3.73)$$

Einfaches Abzählen der Potenzen in den Schleifenintegralen zeigt, daß diese für $\omega \rightarrow 2$ quadratisch divergieren. Diese Divergenzen müssen sich durch Wellenfunktions- und Massenrenormierung beseitigen lassen, weil es sich um eine renormierbare Theorie handelt. Denken wir uns die durch (3.73) definierte selbstkonsistente Näherung durch eine Störungsreihe ausgedrückt vor, sehen wir, daß wir in allen Ordnungen die Counterterm-Beiträge berücksichtigen müssen. Dies gelingt nun durch Ausnutzen der Dispersionsrelationen aus Kapitel 2.

Dazu bemerken wir, daß diese auch auf Greenfunktionen anwendbar sind, wobei aber der Pol mit Residuum 1 bei der Masse des Teilchens zu berücksichtigen ist. Da wir im folgenden ein physikalisches Renormierungsschema verwenden, folgt daraus der Ansatz:

$$G_{1\rho}(s) = D_\rho(s) + \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2} dz \frac{A_\rho(z)}{z-s}, \quad G_\pi(s) = D_\pi(s) + \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2} dz \frac{A_\pi(z)}{z-s}, \quad (3.74)$$

wobei wir die kleinere der beiden Schwellen angegeben haben. Der korrekte Integrationsbereich ergibt sich aus den in den Funktionen $A_\rho = \text{Im}(G_{\rho 1} - D_\rho)$ und $A_\pi = \text{Im}(G_\pi - D_\rho)$ enthaltenen Θ -Funktionen.

Es ist dabei zu beachten, daß sich im Falle des Pions der Beitrag von der Baumgraphengreenfunktion gegen den der selbstkonsistenten Greenfunktion weghebt, weil nach unserem Renormierungsschema beide Funktionen einen Pol bei $s = m_\pi$ mit Residuum 1 besitzen. Wie wir im Zusammenhang mit den Dispersionsrelationen in Kapitel 2 gesehen haben, sind diese Pole nämlich im Sinne verallgemeinerter Funktionen wie folgt zu interpretieren:

$$\frac{1}{s - m^2 + i\epsilon} = P \frac{1}{s - m^2} - i\pi\delta(s - m^2). \quad (3.75)$$

Im Fall des ρ -Mesons liegt aber die "Masse" auf dem Schnitt, weil das ρ -Meson instabil gegenüber dem Zerfall in zwei Pionen ist. Entsprechend fehlt der selbstkonsistent berechneten Greenfunktion der Pol bei $s = m_\rho$, so daß wir insgesamt

$$A_\pi(s) = \text{Im}G_\pi(s), \quad A_\rho(s) = \text{Im}G_\rho(s) + \pi\delta(s - m_\rho^2) \quad (3.76)$$

erhalten.

Setzen wir dies in (3.73) ein, ergibt sich ein nach der Renormierung endliches System von nicht-linearen Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho 1}(p^2) &= \Pi_{\rho 0}(p^2) - \frac{2}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^\infty dz K_\rho(p^2, z, m_\pi^2) A_\pi(z_1) + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^\infty dz_1 \int_{4m_\pi^2}^\infty dz_2 K_\rho(p^2, z_1, z_2) A_\pi(z_1) A_\pi(z_2), \\ \Sigma_\pi(p^2) &= -\frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^\infty dz_1 K_\pi(p^2, z_1, m_\pi^2) A_\rho(z_1) + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^\infty dz_1 \int_{4m_\pi^2}^\infty dz_2 K_\pi(p^2, z_1, z_2) A_\rho(z_1) A_\pi(z_2). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Es ist hierbei wichtig zu bemerken, daß der störungstheoretisch berechnete Anteil der Pionen-selbstenergie sich vollständig aus den Gleichungen herausgehoben hat. Dies ist physikalisch daraus verständlich, daß das ρ -Meson als Resonanz eine endliche Breite besitzt und seine Näherung als "Teilchen mit der Masse m_ρ " auf Baumgraphenniveau in der selbstkonsistenten Näherung durch eine Resonanz ersetzt wird.

Die Integralkerne in (3.77) berechnen sich wie die perturbativen Selbstenergie-Diagramme, die durch Öffnen einer ρ - bzw. π -Linie von (3.4) entstehen, wobei jedoch die Propagatoren Massen tragen, die durch $m_1^2 = z_1$ bzw. $m_2^2 = z_2$ gegeben sind. $\Pi_{\rho 0}$ und $\Sigma_{\pi 0}$ sind die perturbativ berechneten Selbstenergien von ρ - bzw. π -Meson:

$$\begin{aligned} K_\rho(p^2, z_1, z_2) &= -\frac{4ig^2}{2\omega - 1} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left(l^2 - \frac{(pl)^2}{p^2} \right) \frac{1}{(l^2 - z_1)[(l+p)^2 - z_2]} + CT, \\ K_\pi(p^2, z_1, z_2) &= 2ig^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2p+l)^2}{(l^2 - z_1)[(l+p)^2 - z_2]} + CT. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Dabei sind die endlichen Teile der Counterterme so zu bestimmen, daß die physikalischen Renormierungsbedingungen

$$K_\rho(0, z_1, z_2) = \frac{\partial}{\partial p^2} K(0, z_1, z_2) = 0 \quad \text{und} \quad K_\pi(m_\pi^2, z_1, z_2) = \frac{\partial}{\partial p^2} K(m_\pi^2, z_1, z_2) = 0 \quad (3.79)$$

erfüllt sind. Dies läßt sich mit den in Kapitel 2 am Beispiel der ρ -Selbstenergie ausführlich beschriebenen Methoden ausführen. Die entstehenden Ausdrücke sind unübersichtlich und sollen daher nicht explizit angegeben werden.

Die Verzweigungspunkte der Kerne liegen bei $(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2})^2$. Ein Blick auf die Gleichungen (3.77) zeigt dann, daß der Schnitt für das ρ -Meson bei $(2m_\pi)^2$ wie für die perturbative Selbstenergie beginnt (Schwelle für Zerfall in zwei Pionen), für das π -Meson beginnt der Schnitt bei $(3m_\pi)^2$. Dies ist aufgrund des Selbstenergieeinschubs in die ρ -Mesonenlinie auch diagrammatisch verständlich.

Die numerische Auswertung ergibt, daß sich die Selbstenergie des ρ -Mesons gegenüber dem störungstheoretischen Einschleifenresultat kaum ändert, was wiederum zeigt, daß die störungstheoretische Beschreibung bereits eine gute Näherung darstellt. Die Selbstenergie weist für $s \geq (2m_\pi)^2$ einen Schnitt auf. Dies entspricht der physikalischen Schwelle des Zerfalls in zwei Pionen. In der Umgebung der Schwelle verhält sich der Imaginärteil wie $(s - 4m_\pi^2)^{3/2}$, während er für große Impulse linear in s ist, wie es vom Weinbergtheorem her auch zu erwarten ist. Die Selbstenergie des π -Mesons ändert sich im on-shell-Bereich aufgrund des verwendeten physikalischen Renormierungsschemas nur unwesentlich, da in diesem Schema m_π die physikalische Masse bedeutet. Im Gegensatz zum ρ -Meson bleibt das Pion ein stabiles Teilchen, d.h. die Schwelle liegt im unphysikalischen Bereich. Die Haupteffekte der selbstkonsistenten Rechnung im Vergleich zum perturbativen Einschleifenresultat läßt sich dahingehend zusammenfassen, daß sich die Schwelle von $s = (m_\rho + m_\pi)^2$ im perturbativen Falle zu $s = (3m_\pi)^2$ für die selbstkonsistente Näherung verschiebt. Das ist perturbativ durch den niedrigsten in der Näherung berücksichtigten Zweischleifengraphen verständlich: Der ρ -Propagator dieses Diagramms enthält eine Pionenschleife der in Kap. 2 durchgerechneten Art (Abb. 2.1). Durch die endliche Breite des ρ -Mesons wird das Verhalten der Selbstenergie in der Umgebung des Schnitts glatter als im störungstheoretischen Fall. Das asymptotische Verhalten des Imaginärteils ist, wie vom Weinbergtheorem zu erwarten auch im Falle des Pions zu linear in s . Diese Diskussion zeigt auch, daß die Störungsrechnung in unserem Falle nicht wegen der Kleinheit der Kopplungskonstante bereits eine gute Näherung darstellt, sondern dies durch die Skalenverhältnisse erklärbar ist: Die Pionenmasse ist wesentlich kleiner als die ρ -Masse. Da die Breite des ρ -Mesons ebenfalls relativ klein ist und der Hauptbeitrag der Pionen von der Umgebung der Pionenmasse herrührt, ist der Effekt der Pionen auf die ρ -Selbstenergie durch die perturbative Einschleifennäherung im wesentlichen bereits erfaßt.

Es ist zu erwarten, daß dies bei endlichen Temperaturen und Dichten nicht mehr der Fall ist. Zum einen gehen nämlich in die Theorie mit Temperatur und chemischen Potentialen neue Skalen

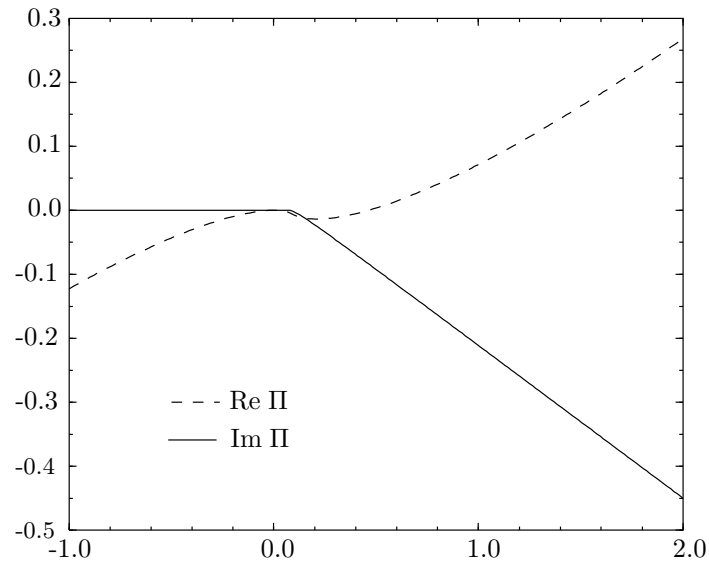


Abbildung 3.5: Real- und Imaginärteil der störungstheoretisch und selbstkonsistent berechneten Selbstenergie des ρ -Mesons im Vakuum (die beiden Resultate stimmen im Rahmen der Zeichengenauigkeit überein)

ein, zum anderen sind aufgrund der Ankopplung an das Wärmebad die Spektralverteilungen der Mesonen breiter als im Vakuumfalle (Stoßverbreiterung). Das bedeutet, daß für die ρ -Mesonen eine wesentlich stärkere Modifikation durch die Pionen zu erwarten ist als im Vakuum.

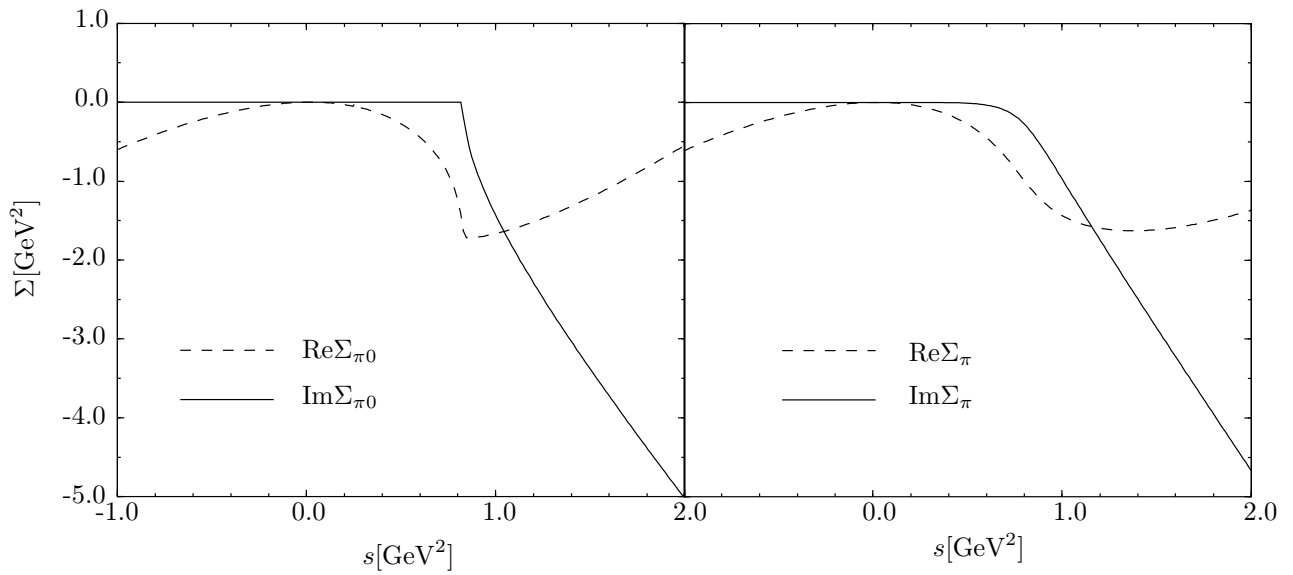


Abbildung 3.6: Real- und Imaginärteil der perturbativ (links) und selbstkonsistent (rechts) berechneten Selbstenergie des π -Mesons im Vakuum

Kapitel 4

Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen

Die Anwendung quantenfeldtheoretischer Methoden auf quantenstatistische Fragestellungen liegt nahe, weil es sich bei der Quantenfeldtheorie um eine Beschreibung von Vielteilchensystemen handelt.

Im folgenden wollen wir den sog. Real-Time-Formalismus beschreiben, der auf Schwinger [Sch61], Kadanoff und Baym [KB61] sowie auf Keldysh [Kel64] zurückgeht. Dieser Formalismus hat den Vorteil, daß er die Beschreibung dynamischer Eigenschaften von Systemen im Nichtgleichgewicht gestattet.

Es stellt sich dabei für Systeme bei endlicher Temperatur heraus, daß der wesentliche Unterschied zur Vakuum-Quantenfeldtheorie ($T = 0$) darin besteht, daß es keine asymptotisch freien Zustände mehr gibt. Insbesondere erhalten alle Einteilchenzustände eine Breite. Dies rührt von der Streuung der Teilchen an den das Wärmebad bildenden Teilchen her ("Collision Broadening").

Im folgenden soll der Real-Time-Formalismus für eine relativistische Quantenfeldtheorie dargestellt werden. Dabei werden wir uns im Rahmen dieser Arbeit auf den Fall des thermodynamischen Gleichgewichts beschränken.

Für den Gleichgewichtsfall existiert neben dem Real-Time-Formalismus der öfter angewandte Matsubara-Formalismus [Mat55]. Der Matsubaraformalismus ist auf die Berechnung rein thermodynamischer Größen (wie z.B. Druck, Energiedichte, Zustandsgleichungen) beschränkt. Die Behandlung dynamischer Prozesse wie z.B. Bremsstrahlung oder Produktionsraten bei Stoßvorgängen im Rahmen des Matsubaraformalismus verlangt nämlich die analytische Fortsetzung von den diskreten ("imaginären") Matsubarafrequenzen zu reellen Energien. Dies ist insbesondere in dem Fall problematisch, wenn die Ergebnisse nur in numerischer Form vorliegen.

Der Fall des allgemeinen Nichtgleichgewichts wird meist im Sinne von Transporttheorien approximiert. Für eine Darstellung dieser Theorie für den nichtrelativistischen Fall s. [KB61]. Auch für diesen Zweck erweist sich der Real-Time-Formalismus als äußerst zweckmäßig, weil er eine direkte Berücksichtigung der Dynamik der Teilchen und damit eine konsistente Herleitung der Transportgleichungen mit Hilfe der Technik der Wignertransformation und Gradientenentwicklung gestattet [IKV99].

In dem Fall, daß das Nichtgleichgewicht dadurch formuliert werden kann, daß man als statistischen Operator zur Anfangszeit die Exponentialfunktion eines Einteilchenoperators benutzen kann, gilt das Wicktheorem und damit die Feynmanregeln in der üblichen Form. Die Annahme

eines solchen statistischen Operators entspricht der Vernachlässigung aller Anfangskorrelationen in dem Vielteilchensystem. Dies ist die ursprüngliche Schwinger-Keldysh-Theorie, für die die Zeitkontur rein reell und geschlossen ist. Eine geschlossene Darstellung für die nichtrelativistische Quantentheorie findet man in [Dan84]. Diese Technik läßt sich jedoch auch auf Nichtgleichgewichtssysteme mit beliebigem Anfangszustand anwenden, vgl. [Fau95].

4.1 Operatorformalismus

Wir beginnen unsere Beschreibung der Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen mit dem Operatorformalismus, weil dieser die Herleitung einiger grundlegender Eigenschaften der n -Punkt-Funktionen gestattet, die wir für die Pfadintegralformulierung benötigen. Wir folgen weitgehend der Darstellung in [LW87].

Das Ziel einer Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen und Dichten für Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht ist zunächst die Berechnung thermodynamischer Zustandsgrößen, d.h. Mittelwerten physikalischer Observabler bzgl. eines statistischen Operators, den man am überzeugendsten durch informationstheoretische Konzepte ([Hob87], [Fel95]) herleiten kann, wonach als statistischer Operator zu einer bestimmten willkürlich vorzugebenden Anfangszeit derjenige zu wählen ist, der bei Kenntnis einiger kollektiver Größen (z.B. Gesamtenergie oder Gesamtladung des Systems) das maximale Maß für die fehlende Information, d.h. die maximale Entropie, besitzt.

Wir arbeiten zunächst im Heisenbergbild, dessen Operatoren wir ohne Index schreiben wollen. Der statistische Operator muß im Heisenbergbild zeitunabhängig sein und lautet für einen explizit zeitunabhängigen, d.h. im Heisenbergbild zeitlich konstanten, Hamiltonoperator und beliebige damit verträgliche voneinander unabhängige erhaltene Ladungen Q_a :

$$\rho = \exp \left[-\Phi - \sum_a \alpha_a \mathbf{Q}_a - \beta \mathbf{H} \right] \quad \text{mit} \quad \Phi = \ln \text{Tr} \left\{ \exp \left[- \sum_a \alpha_a \mathbf{Q}_a - \beta \mathbf{H} \right] \right\}. \quad (4.1)$$

Es sei nochmals betont, daß infolge der Axiomatik der Quantentheorie ρ zeitlich konstant sein muß, d.h. für das Gleichgewicht müssen alle im statistischen Operator auftretenden Größen explizit zeitunabhängig und vertauschbar mit dem Hamiltonoperator sein, d.h. es muß sich um Erhaltungsgrößen handeln. Insbesondere dürfen im Falle der relativistischen Quantenfeldtheorie die \mathbf{Q}_a keine Teilchenzahloperatoren sein, weil die Teilchenzahlen nicht erhalten sind.

Die Parameter α_a und β sind Lagrangeparameter, die bei der Bestimmung des Statistischen Operators aus dem Prinzip von der maximalen Entropie eingeführt werden und dienen der Fixierung der Erwartungswerte der Ladungen und der Energie bzw. deren Dichten:

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{1}{V} \langle \mathbf{Q}_a \rangle = \text{Tr} \{ \rho \mathbf{Q}_a \} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_a} \\ E &= \frac{1}{V} \langle \mathbf{H} \rangle = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definieren wir weiter die intensive Größe

$$P = \frac{\Phi}{\beta V}, \quad (4.3)$$

folgt mit (4.2)

$$d(\beta P) = - \sum_a N_a d\alpha_a - E d\beta. \quad (4.4)$$

4.1 · Operatorformalismus

Setzt man $\beta = 1/T$ und $\alpha_a = -\beta\mu_a$ folgt unter Verwendung der informationstheoretischen Definition der Entropie

$$SV = -\langle \ln \rho \rangle = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (4.5)$$

mit Hilfe der Gleichungen (4.2)-(4.5)

$$S = \beta P + \beta E + \sum_a \alpha_a N_a. \quad (4.6)$$

Daraus ergibt sich wiederum unter nochmaliger Verwendung von (4.4)

$$dP = SdT + \sum_a N_a d\mu_a. \quad (4.7)$$

Damit ist klar, daß die somit definierten Größen die thermodynamische Bedeutung besitzen, die durch die Wahl der Symbole schon angedeutet ist: T ist die Temperatur, P der Druck, S die Entropie und die μ_a die thermodynamischen Potentiale des Systems.

Die Berechnung all dieser thermodynamischen Größen erfordert die Bestimmung der großkanonischen Zustandssumme Φ , also im wesentlichen eine Spurbildung über den exakten Dichteoperator ρ . Wollen wir dies im Rahmen der Störungsrechnung näherungsweise ausrechnen, müssen wir eine der Dyson-Wickentwicklung analoge Reihenentwicklung vornehmen. Dabei treten zeitgeordnete Produkte von Feldoperatoren auf.

Für das folgende erweist es sich aber als bequem, die Zeitordnung zu einer Konturordnung zu erweitern, weil man den Dichteoperator des Gleichgewichtes als Entwicklung nach imaginären Zeiten auffassen kann. Wir führen also die Zeit formal als komplexe Größe ein und definieren durch $\mathcal{C} : z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ einen Weg in dieser komplexen Zeitebene. Wir werden im Laufe unserer Betrachtungen noch genauere Bedingungen an diesen Weg stellen, die die Aufstellung praktikabler Feynmanregeln ermöglichen.

Als erstes definieren wir die beiden wichtigsten Distributionen entlang der Kontur, nämlich die Heavisidesche Sprungfunktion und die Diracsche δ -Distribution:

$$\Theta_{\mathcal{C}}(t - t') = \Theta(\tau - \tau'); \quad \delta_{\mathcal{C}}(t - t') = \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^{-1} \delta(\tau - \tau'). \quad (4.8)$$

Mit diesen Definitionen gilt für eine beliebige auf $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3$ definierte Funktion J

$$\frac{\delta J(x')}{\delta J(x)} = \delta_{\mathcal{C}}(t - t') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') := \delta_{\mathcal{C}}^{(4)}(x - x'). \quad (4.9)$$

Jetzt betrachten wir der Einfachheit halber wieder eine Theorie mit nur einem Skalarfeld. Dann ist der statistische Operator $\rho = \exp(-\beta\mathbf{H})/\text{Tr}\{\exp(-\beta\mathbf{H})\}$, weil in einer solchen Theorie keine erhaltenen Ladungen existieren. Der allgemeinere Fall des großkanonischen Ensembles läßt sich analog behandeln. Dabei sind die Terme mit den Ladungen der "freien" Hamiltontichte hinzuzufügen. Dies ist auch im rein technischen Sinne deshalb kein Problem, weil die Ladungoperatoren bilineare Funktionale der Felder sind, so daß deren Beiträge problemlos in die freien Propagatoren eingearbeitet werden können.

Analog zur Vakuumfeldtheorie, wobei wir im folgenden unter Vakuumfeldtheorie den Fall verschwindender Dichte und Temperatur verstehen, wollen wir n -Punktfunktionen

$$G_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle T_{\mathcal{C}} \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (4.10)$$

berechnen, wobei die Nullkomponenten der x_i Zeitpunkte auf der Kontur bezeichnen und $T_{\mathcal{C}}$ der Konturordnungsoperator ist, der die Feldoperatoren innerhalb eines Produkts von rechts links nach in der Reihenfolge wachsender Konturparameter τ anordnet, also in der Konturordnung und ansonsten ein linearer Operator auf der durch die Feldoperatoren erzeugten Operatoralgebra ist. Jetzt schreiben wir ein erzeugendes Funktional für diese n -Punktfunktionen auf. Dieses ist offenbar durch

$$Z[J] = Z[0] \left\langle T_{\mathcal{C}} \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} d^4x J(x) \phi(x) \right] \right\rangle \quad \text{mit } Z[0] = \exp[-\Phi] = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H}) \quad (4.11)$$

definiert, und die Greenfunktionen ergeben sich durch Funktionalableitung

$$G_{\mathcal{C}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2) \cdots i\delta J(x_n)} \quad (4.12)$$

aus diesem erzeugenden Funktional. $Z[0]$ wurde explizit eingeführt um Anschluß an die Konvention des weiter unten einzuführenden Pfadintegralformalismus zu gewinnen. Wir kürzen im folgenden Integrale über $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3$ wie in Kapitel 3 mit

$$\langle F_1 \rangle_1 = \int_{\mathcal{C}} d^4x_1 F(x_1) \quad (4.13)$$

ab.

Betrachten wir nun Zweipunktfunktionen, die gemäß der Definition (4.10) durch

$$G_{\mathcal{C}12} = \Theta_{\mathcal{C}}(t_1 - t_2) C_{12}^> + \Theta_{\mathcal{C}}(t_2 - t_1) C_{12}^< \quad (4.14)$$

gegeben sind, wobei die Korrelationsfunktionen als

$$C_{12}^> = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle = C_{21}^< \quad (4.15)$$

definiert werden. Sowohl die Greenfunktion als auch die Korrelationsfunktionen sind wegen der Translationsinvarianz in Raum und Zeit im hier behandelten Gleichgewichtsfall Funktionen der Differenz ihrer Raum-Zeit-Argumente. Die Korrelationsfunktionen sind die Zweipunkt-Wightmanfunktionen. Da in ihnen die Feldoperatoren eine feste Ordnung haben, sind diese Funktionen analytische Funktionen der komplexen Zeitargumente. Dies erkennt man durch die Darstellung der Funktionen mit Hilfe eines vollständigen Satzes von Energieeigenzuständen:

$$C_{12}^> = \exp(-\Phi) \sum_{m,n} |\langle n | \phi(0) | m \rangle|^2 \exp[-iE_n(t_1 - t_2)] \exp[iE_m(t_1 - t_2 + i\beta)], \quad (4.16)$$

wobei wir die Dynamik des Heisenbergbildes

$$\phi(t) = \exp[i\mathbf{H}t] \phi(0) \exp[-i\mathbf{H}t] \quad (4.17)$$

und den Statistischen Operator

$$\rho = \exp(-\Phi) \exp[-\beta \mathbf{H}] \quad \text{mit } \Phi = \ln \text{Tr} \exp[-\beta \mathbf{H}] \quad (4.18)$$

benutzt haben.

Nehmen wir jetzt an, daß der Hamiltonoperator von unten beschränkt, also o.b.d.A. positiv definit, ist und daß der Konvergenzbereich der Reihe durch die Exponentialfunktionen bestimmt wird, so ist die Wightman-Funktion $C_{12}^>$ in dem Streifen

$$-\beta < \text{Im}(t_1 - t_2) < 0 \quad (4.19)$$

analytisch. Entsprechende Betrachtungen bzgl. der Korrelationsfunktion $C_{12}^<$ zeigen, daß diese im Streifen

$$0 < \text{Im}(t_1 - t_2) < \beta \quad (4.20)$$

eine analytische Funktion ist. Es läßt zeigen, daß diese Überlegungen für allgemeine Wightmanfunktionen gültig bleiben.

Für die genaue mathematische Formulierung dieser Betrachtungen für den Fall der Vakuumfeldtheorie sei auf [SW64], die klassische Quelle zur axiomatischen Feldtheorie, verwiesen. Hierzu sei nur folgendes bemerkt: Die Wightmanfunktionen sind als Funktionen komplexer Zeitargumente in den angegebenen Streifen analytisch. Folglich besitzen sie nach allgemeinen Sätzen der Funktionentheorie eine analytische Fortsetzung. Auf den Rändern der Streifen können allerdings Singularitäten (Pole, Verzweigungspunkte, wesentliche Singularitäten) liegen. Im Vakuumfall werden die Wightmanfunktionen entlang der reellen Achse definiert. In diesem Falle sind sie, wie in [SW64] ausführlich dargestellt, als temperierte Distributionen aufzufassen. Dies ist auch für die entlang der Kontur definierten Greenfunktionen der Fall. Diese sind als Distributionen bzgl. der Parametrisierung der Kontur aufzufassen, analog wie bei der Definition der Konturthetafunktion und der Konturdeltafunktion (4.8).

Als nächstes leiten wir die Kubo-Martin-Schwingerrelation (KMS-Bedingung) für die Zweiteilchengreenfunktion her. Diese folgt sofort aus der Zeitentwicklung (4.17) der Feldoperatoren und der zyklischen Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur:

$$C_{12}^> = \exp(-\Phi) \text{Tr}\{\phi(t_2)\phi(t_1 + i\beta)\} = C^<(t_1 + i\beta, t_2). \quad (4.21)$$

Wie oben bereits erwähnt, sind die Wightman-Funktionen Funktionen der Differenz ihrer Argumente. Zusammen mit (4.15) folgt daraus, daß sie periodische Funktionen bzgl. der Zeit mit der Periode $i\beta$ sind. Daraus ergibt sich auch unmittelbar die analytische Fortsetzung von den Streifen in die ganze komplexe Ebene. Singularitäten dieser analytischen Funktionen liegen auf den Rändern der Streifen.

Der erste Schritt zur Berechnung der Dysonreihe ist wie in der Vakuumfeldtheorie der Übergang zu Operatoren im Wechselwirkungsbild, das dadurch definiert ist, daß die Zeitentwicklung der Feldoperatoren vom wechselwirkungsfreien und die der Zustände bzw. statistischen Operatoren vom Wechselwirkungs-Hamiltonoperator erzeugt wird. Es gilt also

$$|n, t\rangle_I = T_c \exp\left[-i \int_{t_0}^t \mathbf{V}_I(t_1) dt_1\right] |n, t_0\rangle_I = \mathbf{U}_I(t, t_0) |n, t_0\rangle_I, \quad (4.22)$$

wobei $|n, t\rangle_I$ ein beliebiger Zustand im Wechselwirkungsbild ist. Der statistische Operator entwickelt sich wie $|n, t\rangle \langle n, t|$, also gemäß

$$\rho_I(t) = \mathbf{U}_I(t, t_0) \rho_I(t_0) \mathbf{U}_I^\dagger(t, t_0). \quad (4.23)$$

Da sich die Feldoperatoren nach dem freien Hamiltonoperator zeitlich entwickeln, lassen sie sich durch Lösen der freien Feldgleichungen berechnen, also nach Erzeugern und Vernichtern freier

Energie-Eigenmoden entwickeln. Für eine beliebige im Wechselwirkungsbild definierte Observable ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\langle O(t) \rangle = \text{Tr} \left\{ \rho_I(t) \mathbf{O}_I(t) \right\} = \text{Tr} \left\{ \rho_I(t_0) \mathbf{U}_I^\dagger(t, t_0) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{U}_I(t, t_0) \right\}. \quad (4.24)$$

Die verallgemeinerte Dysonreihe gewinnt man nun dadurch, daß man für den Zeitentwicklungsoperator dessen Definition (4.23) einsetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_I^\dagger(t, t_0) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{U}_I(t, t_0) &= \\ &= T_a \left\{ \exp \left[+i \int_{t_0}^t \mathbf{V}_I(t_1) dt_1 \right] \right\} \mathbf{O}_I(t) T_c \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t \mathbf{V}_I(t_1) dt_1 \right] \right\} = \\ &= T_{\mathcal{C}_K} \left\{ \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}_K} \mathbf{V}_I(t_1) dt_1 \right] \mathbf{O}_I(t) \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei T_c die chronologische, T_a die antichronologische Zeitordnung der Operatoren von rechts nach links und $T_{\mathcal{C}_K}$ die Zeitordnung entlang der in Abb. 4.1 definierten rein reellen Schwinger-Keldysh-Kontur bedeuten. Wegen der Zusammensetzungsregel $\mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{U}(t, t_1) \mathbf{U}(t_1, t_0)$ des

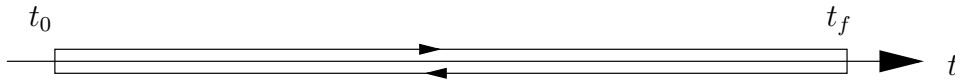


Abbildung 4.1: Schwinger-Keldyshkontur

Zeitentwicklungsoperators, die man sofort aus seiner Definition nachweisen kann, können wir $t_0 \rightarrow -\infty$ und $t_f \rightarrow \infty$ wählen und gelangen so zu entlang der gesamten reellen Achse definierten n -Punktfunktionen. Es lassen sich jetzt auch ganz analog Feynmanregeln herleiten, die sich i.a. nicht mehr nach dem Wicktheorem in seiner von der Vakuumfeldtheorie her gewohnten Form auswerten lassen. Vielmehr ist $\rho_I(t_0)$ der volle statistische Operator zur Zeit t_0 , d.h. es sind i.a. alle Anfangskorrelationen zu berücksichtigen. Eine genauere Betrachtung ([Dan84]) zeigt, daß sich genau dann die gewohnten Feynmanregeln ergeben, wenn der statistische Operator zur Anfangszeit die Form $\rho_I(t_0) = \exp[-\mathbf{A}]$ besitzt, wobei \mathbf{A} ein Einteilchenoperator ist. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, wie man durch eine Erweiterung der Schwinger-Keldyshkontur im Falle der Gleichgewichtsfeldtheorie zu praktikablen Feynmanregeln gelangt.

4.2 Das Pfadintegral für die Gleichgewichtsthermodynamik

Die Pfadintegralformulierung der Quantenfeldtheorie für das thermodynamische Gleichgewicht gewinnt man in enger Anlehnung an das Vorgehen im Vakuumfall. Als erstes führen wir verallgemeinerte Eigenvektoren der Feldoperatoren (im Heisenbergbild!) ein:

$$\phi(x) |\varphi(\vec{x}), t\rangle = \varphi(\vec{x}) |\varphi(\vec{x}), t\rangle. \quad (4.26)$$

Aus der Zeitentwicklung der Feldoperatoren (4.17) folgt die Zeitentwicklung der Eigenzustände:

$$|\varphi(\vec{x}), t\rangle = \exp[i\mathbf{H}t] |\varphi(\vec{x}), t\rangle, \quad (4.27)$$

wobei benutzt wurde, daß \mathbf{H} explizit zeitunabhängig und folglich im Heisenbergbild überhaupt zeitlich konstant ist. Wir können nun unter der Annahme, daß diese Zustände einen vollständigen

Satz verallgemeinerter Eigenvektoren bilden, das erzeugende Funktional (4.11) in der Form

$$Z[J] = \int d\varphi \left\langle \varphi, t_i \left| \exp[-\beta\mathbf{H}] T_{\mathcal{C}} \left\{ \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} J(x)\phi(x) \right] \right\} \right| \varphi, t_i \right\rangle \quad (4.28)$$

schreiben. Die Wirkung des Operators $\exp[-\beta\mathbf{H}]$ läßt sich nun gemäß (4.27) als Entwicklung nach imaginären Zeiten interpretieren:

$$\langle \varphi, t_i | \exp[-\beta\mathbf{H}] = \langle \varphi, t_i - i\beta |. \quad (4.29)$$

Damit folgt aus (4.28) sofort

$$Z[J] = \int d\varphi \left\langle \varphi, t_i - i\beta \left| T_{\mathcal{C}} \left\{ \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} J(x)\phi(x) \right] \right\} \right| \varphi, t_i \right\rangle. \quad (4.30)$$

Nun läßt sich durch das bekannte Verfahren der Gitterung von Raum und Zeit (entlang der komplexen Zeitkontur \mathcal{C}), Anwendung der Trotterschen Produktformel und Übergang zum Kontinuumsliches, vgl. [Kleinert], die Pfadintegraldarstellung für die Übergangsamplitude in der Form

$$\langle \varphi', t' | T_{\mathcal{C}} F[\phi] | \varphi'', t'' \rangle = N' \int D\phi D\pi F[\phi] \exp \left[\int_{t''}^{t'} \int d^3\vec{x} \left(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(x) \right) \right] \quad (4.31)$$

schreiben. Dabei verstehen wir unter $F[\phi]$ ein Funktional des Feldes ϕ , während π der zum Feld ϕ gehörige kanonisch konjugierte Impuls ist. Das Pfadintegral ist dabei über alle Felder mit den Randbedingungen

$$\phi(t', \vec{x}) = \varphi'(\vec{x}); \quad \phi(t'', \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (4.32)$$

zu erstrecken. Die Zeitkontur \mathcal{C} verläuft dabei in dem oben im Operatorformalismus ermittelten Analytizitätsstreifen der konturgeordneten n -Punktfunktionen der komplexen Zeitebene mit monoton fallendem Imaginärteil von $t_i \in \mathbb{R}$ nach $t_i - i\beta$. Mit diesen Einschränkungen ist aber die Zeitkontur nach dem Satz von Cauchy beliebig, d.h. sie kann physikalisch zweckmäßig gewählt werden. Wir werden im folgenden sehen, daß die Wahl des direkten Weges von t_i parallel zur imaginären Achse nach $t_i - i\beta$ besonders für die Berechnung rein thermodynamischer Eigenschaften geeignet ist. Diese Zeitkontur führt zu den Matsubara-Feynmanregeln der Gleichgewichtsthermodynamik (vgl. [Kap89]).

Eine Zeitkontur, die im wesentlichen der Schwinger-Keldyshkontur entspricht, also auf der reellen Achse von der Anfangszeit t_i zu einer beliebigen Endzeit t_f (die größer ist als alle Zeiten in Argumenten von zu berechnenden n -Punktfunktionen ist), wieder zurück zu t_i und senkrecht nach unten nach $t_i - i\beta$, gestattet hingegen die direkte Berechnung von n -Punktfunktionen bei reellen Zeiten, ist also besonders für die Behandlung von dynamischen Prozessen in einem Medium, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, geeignet. Diese Kontur wird auch bequeme Feynmanregeln zur Berechnung von n -Punktfunktionen im Impulsraum ergeben.

Es sei betont, daß der Grenzübergang $t_i \rightarrow -\infty$ und $t_f \rightarrow \infty$ erst *nach* der Berechnung des Konturintegrals im erzeugenden Funktional ausgeführt werden kann, um so auf der ganzen reellen Zeitachse definierte n -Punktfunktionen zu erhalten, weil es sonst ja auch nicht einzusehen ist, wie man den vertikalen Teil der Kontur berücksichtigen soll.

Für das erzeugende Funktional gewinnen wir daraus in Anwendung auf (4.30):

$$Z[J] = N' \int d\varphi \int D\phi D\pi \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} d^4x \left(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(x) + J(x)\phi(x) \right) \right], \quad (4.33)$$

wobei wir diesmal das Pfadintegral über alle Felder mit der periodischen Randbedingung

$$\phi(t_i - i\beta, \vec{x}) = \phi(t_i, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad (4.34)$$

zu nehmen haben. Die Integration über alle diese Felder besagt aber, daß wir dies gleich als einzelnes Pfadintegral schreiben können, in dem über alle Felder mit periodischen Randbedingungen integriert wird:

$$Z[J] = N' \int_{\text{per.}} D\phi D\pi \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} d^4x \left(\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(x) + J(x)\phi(x) \right) \right], \quad (4.35)$$

wobei “per.” unter dem Pfadintegralzeichen andeuten soll, daß diesmal ohne Einschränkung über *alle* Felder mit periodischen Randbedingungen zu integrieren ist:

$$\phi(t_i - i\beta, \vec{x}) = \phi(t_i, \vec{x}). \quad (4.36)$$

Die Integration über die kanonischen Impulse Π ist keinerlei Einschränkungen unterworfen.

Mit (4.35) haben wir eine Form für das erzeugende Funktional gefunden, die formal genauso aussieht wie im Vakuumfalle. Es ist aber im folgenden unbedingt zu beachten, daß sich die Unterschiede nicht allein darauf beschränken, daß über eine Zeitkontur integriert wird, sondern auch jegliche Bezugnahme auf asymptotische Randbedingungen fehlt. Diese sind in der Vakuumfeldtheorie durch das asymptotische Verschwinden der Felder im zeitlich Unendlichen realisiert. Es sei betont, daß im Gegensatz zu Behauptungen, die sich immer wieder in der Literatur finden, *keinerlei asymptotische Randbedingungen im Pfadintegral zulässig* sind. Die einzige Randbedingung, die für eine ausreichende Definition des Pfadintegrals benötigt wird, ist durch (4.36) gegeben und entspricht der *KMS*-Bedingung für die Erwartungswerte von Feldoperatoren, die wir im Operatorformalismus am Beispiel der Zweiteilchenkorrelationsfunktionen gewonnen haben. Damit fällt auch die $i\epsilon$ -Vorschrift, die in den gewohnten Pfadintegralen im Vakuumfalle stets impliziert werden, weg. Diese Vorschriften sind hier, wie wir bei der Berechnung des erzeugenden Funktionals für freie Felder sehen werden, auch gar nicht notwendig.

Unter Beachtung dieser “Vorsichtsmaßnahmen” können wir jetzt das Pfadintegral formal wie gewohnt umformen. Als erstes führen wir unter der Annahme, daß die Lagrangedichte und damit die Hamiltondichte keine Ableitungskopplungen enthält, das Impulsintegral aus. Dies ist auch im Falle von Eichtheorien mit geeigneten Eichfixierungen möglich (deshalb konnten wir in Kapitel 1 gleich mit der naiven Pfadintegralmethode quantisieren!) (vgl. [Wei96, Kap89]). Weil in beiden Fällen das Impulsintegral vom Gaußschen Typ bzw. sich durch die Einführung von Hilfsfeldern in ein solches umformen läßt, folgt:

$$Z[J] = N \int D\phi \exp \left[i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right]. \quad (4.37)$$

Auch der nächste Schritt ist von der Vakuumfeldtheorie her wohlbekannt. Durch Faktorisieren der Exponentialfunktion unter dem Pfadintegral findet man nämlich

$$Z[J] = \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J], \quad (4.38)$$

wobei $Z_0[J]$ das durch das Pfadintegral (4.37) mit der wechselwirkungsfreien Lagrangedichte \mathcal{L}_0 definierte erzeugende Funktional ist.

Wir bemerken noch, daß der indefinite Normierungsfaktor N von β , nicht aber von J abhängt. Das bedeutet, daß das Pfadintegral in der soeben hergeleiteten Form zwar für die Berechnung von zusammenhängenden n -Punktfunktionen, nicht aber ohne genauere Überlegungen zur Berechnung von $Z[0] = \exp(-\Phi)$, also der thermodynamischen Zustandssumme geeignet ist. Es zeigt sich, daß auch dann der Normierungsfaktor nicht zu den physikalisch relevanten Größen beiträgt (vgl. [Ber74]).

4.2.1 Das erzeugende Funktional für freie Teilchen

Für die Herleitung der Feynmanregeln müssen wir zunächst das erzeugende Funktional für die Theorie freier Bosonen bestimmen. Betrachten wir zunächst kurz die physikalische Situation: Die stärkste Forderung, die wir stellen, ist die nach dem thermischen Gleichgewicht. Ein System im thermischen Gleichgewicht enthält keinerlei Information über seinen Anfangs- oder Endzustand, so daß für eine nicht explizit zeitabhängige Lagrangedichte Translationsinvarianz bzgl. der Zeit besteht. Dasselbe gilt für den Raum. Es ist daher wünschenswert, die Feynmanregeln im Impulsraum zu formulieren. Dies ist aber nicht ganz einfach, weil wir nicht wie im Vakuumfall ohne Bedenken fouriertransformieren können, weil die Zeitkontur mindestens ein Stück parallel zur imaginären Achse aufweist.

Auf der anderen Seite haben wir aber die das thermische Gleichgewicht charakterisierende KMS-Bedingung, die nichts anderes als die zeitliche Periodizität der Greenfunktion mit der Periode $i\beta$ bedeutet. Wir wählen jetzt die Kontur so einfach wie möglich, wobei sich aber reelle Zeiten (am besten wäre die ganze reelle Achse) auf der Kontur befinden sollen. Dadurch legen wir uns auf die in (4.2) gezeigte modifizierte Schwinger-Keldyshkontur fest. Wir können zunächst noch

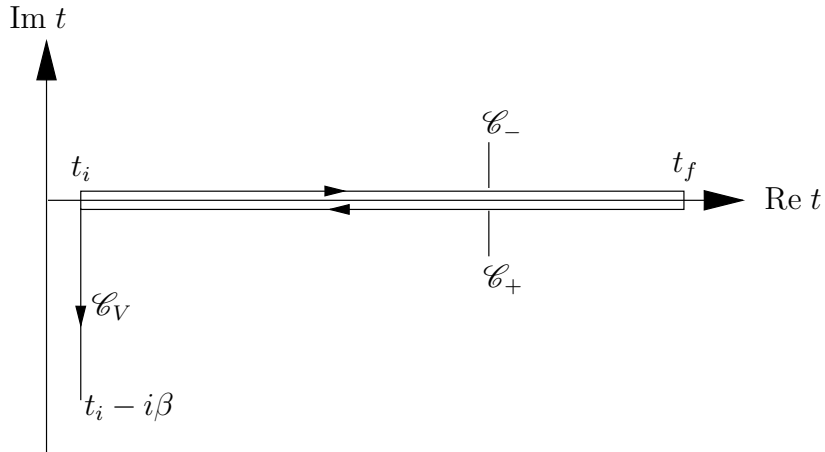


Abbildung 4.2: Modifizierte Schwinger-Keldyshkontur

formal so rechnen wie in der Vakuum- $T = 0$ -Quantenfeldtheorie, d.h. wir setzen

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (4.39)$$

in (4.37) ein

$$Z_0[J] = N \int D\phi \exp \left[i \int_{\mathcal{C}} d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi) \right] \quad (4.40)$$

und entwickeln um den stationären Punkt ϕ_0 des Konturwirkungsfunktionals, der durch die Euler-Lagrangegleichung

$$-(\square + m^2)\phi_0 = -J \quad (4.41)$$

bestimmt ist. Damit ergibt sich ϕ_0 aus J mit Hilfe einer entlang der Zeitkontur definierten Greenfunktion:

$$-(\square_1 + m^2)G_{0\mathcal{C}}(x_1, x_2) = \delta_{\mathcal{C}}^{(4)}(x_1 - x_2). \quad (4.42)$$

Dabei ist die rechts stehende δ -Distribution längs der Kontur gemäß (4.8) definiert. Es sei nochmals betont, daß diese Definition nicht mehr als die Definition der δ -Distribution für reelle Funktionen bedeutet, da diese zwingend die Parametrisierung der Kontur mit einem reellen Parameter τ voraussetzt!

Nehmen wir jetzt an, wir hätten $G_{0\mathcal{C}}$ gefunden, können wir wie in der Vakuumtheorie vorgehen und die freie Wirkung wie folgt umformen:

$$S_{0\mathcal{C}}[\phi' + \phi_0, J] = S_{0\mathcal{C}}[\phi', J = 0] - \frac{1}{2} \langle J_1 G_{0\mathcal{C}12} J_2 \rangle_{12}. \quad (4.43)$$

Dabei wurde mehrmals von partiellen Integrationen längs der Kontur Gebrauch gemacht. Die Randterme verschwinden jeweils, weil für die Felder unter dem Pfadintegral die periodischen Randbedingungen zu gelten haben. Insgesamt ergibt sich also für das erzeugende Funktional

$$Z[J] = Z[0] \exp \left[-\frac{i}{2} \langle J_1 G_{0\mathcal{C}12} J_2 \rangle_{12} \right]. \quad (4.44)$$

Jetzt müssen wir die freie Greenfunktion (wenigstens in einer der Impulsdarstellung der Vakuum- $T = 0$ -Feldtheorie analogen Weise) berechnen. Die Diskussion im Operatorformalismus hat gezeigt, daß die Greenfunktion wenigstens im offenen Streifen $-\beta < \text{Im}(t - t') < 0$ der komplexen Zeitebene analytisch sein sollte. Deshalb beginnen wir mit der Berechnung der Konturgreenfunktion entlang des zur imaginären Achse parallelen Stücks der Zeitkontur. Dieses parametrisieren wir mit Hilfe von

$$\mathcal{C}_V : z[\tau] = t_i - i\tau; \quad \tau \in (0, \beta) \Rightarrow \delta_{\mathcal{C}_V}(t - t') = i\delta(\tau - \tau'). \quad (4.45)$$

Das bedeutet, daß sich die Bestimmungsgleichung (4.42) für die Greenfunktion bei Einschränkung der Zeiten auf \mathcal{C}_V in der Form

$$(\partial_\tau^2 + \Delta)G_{0\mathcal{C}_V}(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') = \square_E G_{0\mathcal{C}_V}(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') = i\delta(\tau - \tau')\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.46)$$

schreibt. Diese Gleichung ist schon unter Berücksichtigung der Translationsinvarianz der Greenfunktion angeschrieben. Sie wird eindeutig durch die Bedingung festgelegt, daß sie bzgl. τ periodisch mit der Periode β sein muß. Die richtige Fouriertransformation dieser Funktion ist also bzgl. der Zeit eine Fourierreihe und bzgl. der räumlichen Argumente eine Fouriertransformation:

$$G_{0\mathcal{C}_V}(\tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') = \Delta_0(x_E) = \frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \Delta_0(i\omega_n, \vec{p}) \exp[-i\omega_n(\tau - \tau') + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')]. \quad (4.47)$$

Die Umkehrung dieser Fouriertransformation ist dabei durch

$$\Delta_0(i\omega_n, \vec{p}) = \int_0^\beta d\tau \int d^3 \vec{x} \exp[i\omega_n \tau - i\vec{p}\vec{x}] \Delta_0(x_E) \quad (4.48)$$

gegeben. Dabei durchlaufen die ω_n die Matsubarafrequenzen für Bosonen:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \text{ mit } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.49)$$

Da die Fouriertransformierte der δ -Distribution 1 ist, folgt sofort die Lösung der Gleichung (4.47) im Fourierbereich:

$$\Delta_0(i\omega_n, \vec{p}) = -\frac{i}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2}. \quad (4.50)$$

Die durch (4.50) und (4.47) definierte Funktion ist nun analytisch nach \mathcal{C}_\pm fortzusetzen. Wir werden weiter unten nachweisen, daß wir für die allgemeine Störungsentwicklung von n -Punktfunktionen mit reellen äußeren Zeitpunkten lediglich die Fouriertransformierten derjenigen freien Greenfunktionen benötigen, die entstehen, wenn man ihre beiden Zeitargumente jeweils auf einen der beiden reellen Äste der Schwinger-Keldyshkontur legt. Insgesamt benötigen wir also die vier Greenfunktionen $G_{jk}(x_1, x_2)$ mit $j, k = +, -$. Dabei bezeichnen die Indizes i, k , auf welchem Ast der reellen Schwinger-Keldyshkontur jeweils die Zeitkomponenten von x_1 und x_2 liegen. Man gelangt so zu der Matrixdarstellung des Schwinger-Keldysh-Formalismus'.

Diese analytische Fortsetzung ist alles andere als trivial. Wegen der Analytizität der Fouriertransformierten auf dem vertikalen Teil, können wir hoffen, mit dem Ansatz

$$\Delta_0(z, \vec{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{\rho_0(p_0, \vec{p})}{p_0 - z} \quad (4.51)$$

erfolgreich zu sein. Dabei nennt man ρ_0 die freie Spektralfunktion. Δ_0 ist bis jetzt nur für komplexe $z = i\omega_n$ definiert. Wir hoffen, durch diese *Spektraldarstellung* die analytische Fortsetzung der Korrelationsfunktionen bewerkstelligen zu können und damit auch die Greenfunktion in der Matrixdarstellung zu gewinnen. Dazu bemerken wir, daß auf dem vertikalen Teil der Kontur wegen der Monotonie des Imaginärteils derselben stets $\Delta = \Delta^{+-}$ ist.

Durch Vergleich mit dem Resultat (4.50) gelangt man durch Anwenden des Residuensatzes schnell zu dem Resultat

$$\rho_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon \operatorname{sign} p_0} - \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon \operatorname{sign} p_0}. \quad (4.52)$$

Dabei bedeutet ϵ wie in der Vakuumfeldtheorie einen kleinen positiven Regulator, der erst *am Schluß der Rechnung* im Limes $\rightarrow 0$ zu betrachten ist. Ansonsten ist nur zu beachten, daß ρ_0 für $p_0 \rightarrow \infty$ verschwindet, so daß die Integrationskontur bzgl. p_0 in dem Dispersionsintegral (4.51) sowohl in der oberen als auch der unteren Halbebene (je nach Vorzeichen des Imaginärteils von z !) geschlossen werden darf.

Im Sinne des Residuensatzes ist diese $i\epsilon$ -Vorschrift nichts anderes als die Regularisierung einer δ -Distribution:

$$\rho_0(p) = 2\pi \operatorname{sign} p_0 \delta_\epsilon(p^2 - m^2). \quad (4.53)$$

Es bleibt nun noch die analytische Fortsetzung zu Zeiten auf den reellen Zweigen der Kontur (Abb. 4.2). Von der Vakuumfeldtheorie her erwarten wir, daß sich für reelle Zeiten der Propagator in Form einer Fouriertransformation darstellen läßt:

$$D_0^{jk}(p) = \int d^4x \exp(ipx) D_0^{jk}(x) \Leftrightarrow D_0^{jk}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(-ipx) D^{jk}(p). \quad (4.54)$$

Durch Fouriertransformation der KMS-Bedingung (4.21) ergibt sich im Fourierbereich

$$D_0^{+-}(p) = \exp(\beta p_0) D_0^{-+}(p), \quad (4.55)$$

und auch diese Beziehung nennen wir im folgenden KMS-Bedingung.

Der Anschluß an die oben für den vertikalen Teil der Kontur gefundene Spektralfunktion ergibt sich aus

$$\Delta_0(\tau, \vec{p}) = D_0^{+-}(-i\tau; \vec{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi} \exp(-p_0\tau) \Delta_0^{+-}(p_0, \vec{p}), \quad (4.56)$$

und mit (4.48) und Ausführung der τ -Integration folgt

$$\Delta_0(i\omega_n, \vec{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{iD_0^{+-}(p_0, \vec{p})[1 - \exp(-\beta p_0)]}{p_0 - i\omega_n}, \quad (4.57)$$

so daß wir schließlich durch Vergleich mit der Dispersionsrelation (4.51)

$$iD_0^{+-}(p_0, \vec{p}) = [1 + f(p_0)]\rho(p_0, \vec{p}) \text{ mit } f(p_0) = [\exp(\beta p_0) - 1]^{-1} \quad (4.58)$$

erhalten. Die KMS-Bedingung (4.55) liefert sogleich noch

$$iD_0^{-+}(p_0, \vec{p}) = f(p_0)\rho(p_0, \vec{p}), \quad (4.59)$$

und die Definition der Konturzweipunktfunction ergibt die beiden noch fehlenden Greenfunktionen

$$iD_0^{\pm\pm}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\Theta(\mp t) + f(p_0)]\rho(p_0, \vec{p}) \exp(-ipx). \quad (4.60)$$

Sorgfältige Fouriertransformation unter Beachtung, daß die δ -Distribution, die in ρ auftritt stets regularisiert zu denken ist, ergibt nach einigen Umformungen schließlich das gewünschte Resultat

$$iD^{\pm\pm}(p_0, \vec{p}) = \frac{\mp i}{p^2 - m^2 \mp i\epsilon} + 2\pi f(|p_0|)\delta_\epsilon(p^2 - m^2). \quad (4.61)$$

Wir bemerken noch, daß sich im Grenzfall $T \rightarrow +0$, also $\beta \rightarrow \infty$ die freie Vakuumeldtheorie eines Klein-Gordonfeldes ergibt: Dann reduziert sich die modifizierte Schwinger-Keldyshkontur auf die Schwinger-Keldyshkontur (Abb. 4.1), die Zweipunktfunction wird in der Matrixdarstellung diagonal, und die Diagonalelemente sind durch Erwartungswerte kausal bzw. antikausal geordneter Feldoperatorprodukte gegeben (Feynmanpropagator und konjugiert komplexer Feynmanpropagator im Impulsraum).

4.2.2 Die Feynmanregeln

Jetzt können wir die Feynmanregeln im Impulsraum aufstellen. Im Ortsraum sind sie durch dieselben Feynmanregeln gegeben wie im Vakuumfall, nur daß stets über die Zeitkontur zu integrieren ist und freie Konturgreenfunktionen zu verwenden sind.

Es ergibt sich nur das Problem, diese Vorschrift in den Impulsraum zu übersetzen. Dabei ist aber die schon oben aufgestellte Behauptung, daß hier die vertikalen Teile der Kontur in den Impulsraumfeynmanregeln solange keine Rolle spielen, wie wenigstens ein Zeitpunkt in einer n -Punktfunction auf einem der reellen Zweige der Schwinger-Keldyshkontur liegt, entscheidend.

Der Beweis in [LW87], daß das erzeugende Funktional der Quantenfeldtheorie in einen Anteil von den vertikalen und einen von den horizontalen Teilen der Zeitkontur faktorisiert beruht auf zwei Annahmen, nämlich zum einen, daß die Greenfunktion durch die ϵ -Vorschrift regularisiert ist und daß die äußere Quelle J der Asymptotenbedingung $J(t, \vec{x}) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \pm\infty$ erfüllt. In diesem Fall sind die Bedingungen, die im Riemann-Lebesgue-Lemma gefordert werden, erfüllt.

Das Riemann-Lebesgue-Lemma sagt aus, daß die Fouriertransformation den Funktionenraum L_1 in den Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, abbildet. Die Annahme der asymptotischen Bedingung ist aber unphysikalisch, weil sie bedeutet, daß man im zeitlich Unendlichen (also in der weit zurückliegenden Vergangenheit und der weit folgenden Zukunft des Systems) ein ideales Gas annimmt. Das entspricht der Annahme asymptotisch freier Zustände im Unendlichen. Das ist aber schon aus dem einfachen physikalischen Grunde irrig, weil die Beschreibung eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht definitionsgemäß keinerlei Information über Anfangs- und Endzustand des Systems enthält. Gleichgewichtsthermodynamik bedeutet vielmehr die Existenz eines durch sehr viele mikroskopische Freiheitsgrade realisierten Wärmebades bzw. eines Wärmebades und Teilchenreservoirs, das in seiner makroskopischen Ausprägung zeitlich konstant ist. Dies wird mikroskopisch durch die KMS-Bedingung beschrieben, die im wesentlichen bedeutet, daß die Streuung in einen Zustand und aus demselben Zustand heraus in gleichen zeitlichen Raten stattfinden (detailliertes Gleichgewicht). Schon aus diesen physikalischen Überlegungen heraus erscheint die Ausführung des Grenzübergangs $t_{i/f} \rightarrow \pm\infty$ der Beschreibung eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht nicht adäquat. Nähere Ausführungen zu diesem Problems lassen sich bei [Gel96] nachlesen. Diese Arbeit zeigt auch, daß das erzeugende Funktional für allgemeinere Konturen *nicht* faktorisiert. Dies wird in [EP94] explizit bewiesen.

Es ist nun aber entscheidend für einfache Feynmanregeln, daß man die vertikalen Teile tatsächlich vernachlässigen kann. Wir werden jetzt zeigen, daß für unsere modifizierte Keldyschkontur das erzeugende Funktional für die freie Theorie, also $Z_0[J]$, faktorisiert. Wir werden sehen, daß dies im wesentlichen darauf beruht, daß der reelle Teil der Kontur geschlossen ist, also der klassischen Schwinger-Keldyshkontur entspricht. Die dieses Resultat auf allgemeinere Konturen verallgemeinernde Behauptung in [EP94] wird durch [Gel96] widerlegt und beruht wieder auf einer (wenn auch versteckten) Anwendung von asymptotischen Bedingungen.

Für unseren Beweis benötigen wir weder die Asymptotenbedingung noch die Regularisierung der δ -Funktion in der Spektraldichte. Letztere ist nur wichtig, um die Feynmanregeln korrekt anzuwenden. Insbesondere darf man nicht $n(|p_0|)\delta(p^2 - m^2)$ durch $n(\omega_{\vec{k}})\delta(p^2 - m^2)$ ersetzen. Vielmehr muß hier tatsächlich die δ -Distribution regularisiert gedacht werden, und erst nach Ausführung der Feynmanintegrale darf $\epsilon \rightarrow 0$ gesetzt werden. Wie in [Gel96] anhand eines einfachen Beispiels gezeigt wird, stellt diese Beschreibung sicher, daß in der Störungsentwicklung neben den die Dynamik widerspiegelnden Teilen der Greenfunktionen auch der statistische Operator in der jeweiligen Ordnung korrigiert wird. Dies ist auch die eigentliche mathematische Bedeutung unseres vertikalen Teils der Zeitkontur. Im ursprünglichen Schwinger-Keldyshformalismus fehlt dieser vertikale Teil. Dafür muß aber der volle statistische Operator zum Anfangszeitpunkt berücksichtigt werden, und dies erfordert i.a. die Mitnahme unendlich vieler Anfangskorrelationen (vgl. [Fau95]).

Wir wollen jetzt die Faktorisierung des Funktionals in einen Teil, der nur die Schwinger-Keldyshkontur und einen, der nur das vertikale Stück enthält, beweisen. Das ist sicher der Fall, wenn

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}_V} d^4x_1 \int_{\mathcal{C}_K} d^4x_2 J(x_1) D_{0\mathcal{C}}(x_1, x_2) J(x_2) = \\ & = \int_{\mathcal{C}_K} d^4x_1 \int_{\mathcal{C}_V} d^4x_2 J(x_1) D_{0\mathcal{C}}(x_1, x_2) J(x_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

mit $\mathcal{C}_K = \mathcal{C}_- + \mathcal{C}_+$

ist. Das ist aber sofort einzusehen, wenn hierin das Integral entlang des Teils \mathcal{C}_- der Schwinger-

Keldyshkontur auf dieselbe Funktion angewandt wird wie das Integral entlang \mathcal{C}_+ . Dann ist das Verschwinden des Integrales trivialerweise erfüllt.

Dies können wir aber dadurch zeigen, daß wir die oben im Impulsbereich berechnete freie Konturgreenfunktion in die gemischte Darstellung

$$D_{0\mathcal{C}}(t, \vec{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi} D_{0\mathcal{C}}(p_0, \vec{p}) \exp(-ip_0 t) \quad (4.63)$$

umrechnen. Wegen

$$D_{0\mathcal{C}}(t, \vec{p}) = \Theta_{\mathcal{C}}(t) D_0^{+-}(t, \vec{p}) + \Theta_{\mathcal{C}}(-t) D_0^{-+}(t, \vec{p}) \quad (4.64)$$

und der KMS-Bedingung (4.21) genügt die Fouriertransformation für D_0^{-+} :

$$iD_0^{-+}(t, \vec{p}) = \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{1 - \exp(-\omega_{\vec{p}}\beta)} [\exp(i\omega_{\vec{p}}t) + \exp(-\beta\omega_{\vec{p}}) \exp(-i\omega_{\vec{p}}t)], \quad (4.65)$$

wobei wir die nichtregularisierte δ -Distribution in (4.58) benutzt haben. Dies ist deshalb gerechtfertigt, weil wir die Greenfunktion im Moment lediglich unter dem Integral (4.62) benutzen wollen, und Distributionen sind in dieser Situation wohldefiniert. Setzen wir dieses Resultat unter Verwendung der KMS-Bedingung (4.21) in (4.64) ein, ergibt sich für die freie Konturgreenfunktion schließlich:

$$\begin{aligned} iG_{0\mathcal{C}}(t, \vec{p}) &= \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \frac{1}{1 - \exp(-\omega_{\vec{p}}\beta)} \times \\ &\times \left\{ \Theta_{\mathcal{C}}(t) \left[\exp(-\beta\omega_{\vec{p}}) \exp(i\omega_{\vec{p}}t) + \exp(-i\omega_{\vec{p}}t) \right] \right. \\ &\left. + \Theta_{\mathcal{C}}(-t) \left[\exp(i\omega_{\vec{p}}t) + \exp(-\beta\omega_{\vec{p}}) \exp(-i\omega_{\vec{p}}t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Da nun die modifizierte Schwinger-Keldyshkontur so geartet ist, daß alle Zeiten auf dem vertikalen Teil im Sinne der Konturordnung größer als jede auf den reellen Teilen gelegene Zeit ist, ist in den beiden Integralen in (4.62) die Funktion bzgl. der Integration entlang der geschlossenen Schwinger-Keldyshkontur \mathcal{C}_K analytisch und folglich das Integral trivialerweise 0. Es ist klar, daß sich daran auch nichts ändert, wenn man die δ -Distribution bei der Berechnung von $D_0^{\pm\mp}$ im regularisierten Sinne nimmt.

Es sei nochmals betont, daß wir weder asymptotische Bedingungen gestellt noch t_i bzw. t_f ins Unendliche verlagert haben.

Die Feynmanregeln ergeben sich nun durch Anwendung der Gleichung (4.38). Solange wir nur zusammenhängende n -Punktfunktionen mit reellen Zeitargumenten perturbativ berechnen wollen, fällt infolge der Faktorisierung des erzeugenden Funktionals der freien Theorie Z_0 der Beitrag vom vertikalen Teil der modifizierten Schwinger-Keldyshkontur heraus, so daß wir die Feynmanregeln im Impulsraum aus der Vakuumeldtheorie mit den folgenden Modifikationen übernehmen können:

- Jeder Beitrag zur Wechselwirkungslagrangedichte ergibt zwei Vertizes, einer für Zeiten auf \mathcal{C}_- und einer für Zeiten auf \mathcal{C}_+ . Der letztere unterscheidet sich infolge der umgekehrten Integrationsrichtung auf \mathcal{C}_+ von dem ersteren nur durch das Vorzeichen.

4.2 · Das Pfadintegral für die Gleichgewichtsthermodynamik

- Es sind sämtliche Diagramme zu einem Prozeß mit beiden Vertizes an den inneren Punkten zu verwenden. Die Feynmanregeln sind also wörtlich dieselben wie im Vakuumfall, nur daß die dem Formalismus durch die beiden reellen Äste der Schwinger-Keldyshkontur aufgeprägte Matrix- bzw. Tensorstruktur anzuwenden ist.

Zur Verdeutlichung dieser Feynmanregeln seien hier die Real-Time-Feynmanregeln für die ϕ^4 -Theorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (4.67)$$

angegeben: Wir bemerken, daß auch im Falle von Bosonen, die Propagatorlinien Pfeile tragen,

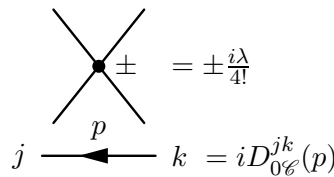


Abbildung 4.3: Real-Time-Feynmanregeln für die ϕ^4 -Theorie

damit klar ist, welches der vier Matrixelemente der Greenfunktion in dem jeweiligen Diagramm gemeint ist. Wie üblich sind die Diagramme “entgegen der Pfeilrichtung” aufzuschreiben. Bei geschlossenen Schleifen ergibt sich auf diese Weise auch automatisch die richtige Spurbildung. Ansonsten gelten bzgl. Symmetriefaktoren und Vorzeichenregeln für Fermionen dieselben Regeln wie im Falle der Vakuumfeldtheorie.

Der einzige Fall, bei dem Vorsicht geboten ist, tritt auf, wenn keine äußeren reellen Zeiten im Diagramm auftreten, also insbesondere bei der Berechnung von geschlossenen Diagrammen. Dann ist aber auch eine einfache Vorschrift dadurch gegeben, daß man das Diagramm in der gemischten Darstellung berechnet. Dabei kann man die Feynmanregeln für Real-Time-Diagramme bis auf eine letzte Konturintegration anwenden. Diese ist aber nunmehr trivial, weil aufgrund der Translationsinvarianz des Systems im thermischen Gleichgewicht dieses Einpunktdiagramm nicht zeitabhängig ist. Die letzte Konturintegration ergibt also lediglich noch einen Faktor $-i\beta$.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, daß das Vektordominanzmodell unter Anwendung des Higgs-Kibble-Formalismus einer spontan gebrochenen versteckten $SU[2]$ -Eichsymmetrie erweitert werden kann, so daß in konsistenter Weise neben den neutralen auch die geladenen ρ -Mesonen berücksichtigt werden können.

Die Renormierbarkeit der Theorie gestattet es dann, ohne Einführung einer Abschneideenergie die selbstkonsistente Näherung durchzuführen. Dies ist im Rahmen einer effektiven Theorie unumgänglich, weil diese nur in dem Sinne als renormierbar betrachtet werden kann, als die Lagrangedichte alle mit der Symmetrie verträglichen Impulskopplungen in beliebiger Ordnung enthält und beliebig viele Counterterme zur Absorption der Divergenzen zur Verfügung stehen. Dabei respektiert auch dieses Renormierungsverfahren unter bestimmten Voraussetzungen an die klassische Wirkung die Eichinvarianz (vgl. [GW96]). Jedoch führt dies in der selbstkonsistenten Näherung dazu, daß unendlich viele Vertexrenormierungen notwendig werden, um die Einführung einer endlichen Abschneideenergie zu vermeiden. Letzteres ist zwar im Sinne der effektiven Theorie konsistent, führt aber zu einem Verschwinden der Selbstenergie und damit zur Vernachlässigung von Beiträgen höherer Ordnung des Phasenraums (vgl. [RK96]), bei hohen Energien.

Die funktionalen Methoden zur Herleitung der selbstkonsistenten Gleichungen lassen sich in zwei Richtungen erweitern: Zum einen ergibt sich durch weitere Ableitungen des erzeugenden Funktionals eine Hierarchie von Bewegungsgleichungen für die n -Punktfunktionen (die erste über die Dysongleichung hinausgehende "Ordnung" in dieser Hierarchie ist die Bethe-Salpeter-Gleichung), die in Näherungen der effektiven Wirkung höherer Schleifenordnung schon allein im Zuge des vorgestellten Renormierungsverfahrens im Falle der Vakuum-Quantenfeldtheorie benötigt werden.

Zum anderen zeigen die in Kapitel 4 dargestellten Verfahren zur Behandlung von Vielteilchensystemen im Sinne der statistischen Physik, daß die in dieser Arbeit zusammengestellten funktionalen Methoden auch auf diesem Gebiet anwendbar sind. Insbesondere ist bekannt, daß die Einführung endlicher Temperaturen und Dichten nicht zu Renormierungsproblemen führen, die nicht schon im Vakuumanteil gelöst sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde gezeigt, daß für eine renormierbare Modelltheorie die Renormierung selbstkonsistenter Näherungen explizit durchgeführt werden kann. Die Kombination von Dispersionsintegralen und von der Störungstheorie her bekannten Regularisierungs- und Renormierungsverfahren führt zu einem System wohldefinierter Integralgleichungen, die sich durch

Iteration numerisch behandeln lassen. Für die betrachtete Modelltheorie für das π - ρ -System hat sich die Störungstheorie im Falle des Vakuums in dem Sinne als gute Näherung erwiesen, daß die Selbstenergie des ρ -Mesons gegenüber dem Einschleifenresultat fast ungeändert bleibt. Die Selbstenergie des π -Mesons ändert sich nur im off-shell-Verhalten merklich. Der Grund ist darin zu suchen, daß die Skalen der Theorie (gegeben durch Pionen- und Rho-Masse) relativ weit auseinanderliegen und sich daher die relevanten Bereiche der Spektralfunktionen in der selbstkonsistenten Näherung wenig beeinflussen.

Es soll in nächster Zeit das selbstkonsistente Näherungsverfahren auf den Fall endlicher Dichte und Temperatur angewandt werden. Dabei dürfen die im Vakuum nur zur Renormierung der Massen beitragenden “Tadpolediagramme” nicht mehr vernachlässigt werden, weil Erwartungswerte normalgeordneter Produkte nicht mehr verschwinden (s. [Her92]), sondern proportional zur Einteilchendichte sind (“Tadpoleregeln”). Es wird daher die Behandlung komplizierterer Divergenzen der selbstkonsistenten Näherung erforderlich, die zu Vertexkorrekturen führen (vgl. [BS84]). Die Vernachlässigung dieser Diagramme würde nämlich die Forderung der Stromerhaltung nicht mehr erfüllen.

Diese Rechnungen haben zum Ziel, die Medium- und Temperatureigenschaften des ρ -Mesons (allgemeiner von Resonanzen), genauer zu studieren. Eine interessante Anwendung, für die sich die Ausnutzung des in Kapitel 4 referierten Schwinger-Keldysch-Verfahrens anbietet, stellt die Berechnung von Dileptonen-Produktionsraten bei Schwerionenstößen dar. Die im Matrixformalismus auftretenden Selbstenergiekomponenten $\Pi^{\pm\mp}$ liefern nämlich nach Ankoppeln der Leptonen über Photonenlinien direkt die gesuchte Produktionsrate. Dabei kann auch die Rolle der Selbstkopplung der ρ -Mesonen aufgrund der Nichtkommutativität der Eichgruppe untersucht werden. Diese bewirkt störungstheoretisch eine Modifikation der ρ -Selbstenergie im Energiebereich von $2m_\rho$.

Insbesondere läßt sich das im Augenblick noch kontrovers diskutierte Verhalten der ρ -“Masse” (Brown-Rho-Scaling) bei endlicher Temperatur im Rahmen dieses Modells studieren. Mit Sicherheit ist eine Stoßverbreiterung der Resonanz zu erwarten.

Interessant ist auch das Studium des Skalenverhaltens der Masse und Kopplungskonstante mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung.

Als Fernziel von allgemeinerem Interesse steht die Frage nach einer eichinvarianten Resummationstechnik im Raum. Zumindest ist ein Studium des Verhaltens der selbstkonsistenten Näherungen bei Änderung der Eichung wichtig. Es bieten sich dazu die vorgestellten renormierbaren Eichungen, die vom Eichparameter ξ abhängen, an.

Anhang A

Dimensionale Regularisierung

Bei der Berechnung von Feynmangraphen, die Schleifenintegrationen erfordern, treten charakteristische Probleme auf, die sich darin äußern, daß die Integrale für große Impulse divergieren (UV-Divergenzen). Während die Divergenzen, die im Fall von masselosen Teilchen für kleine Impulse (IR-Divergenzen) sich nach Resummieren von Diagrammen wegheben [Wei95] (hierin besteht das Problem vielmehr darin, diese Summationen verträglich mit der Eichinvarianz der Theorie durchzuführen), ist das für die UV-Divergenzen nicht der Fall.

Dieses Problem wird in zwei Schritten gelöst. Zunächst werden die Integrale auf eine geeignete Weise in Abhängigkeit von einem Parameter in endliche Integrale überführt. Der Grenzübergang dieses Parameters zu einem bestimmten Wert entspricht dem Übergang zum physikalisch relevanten Integral. Das Resultat dieses Grenzübergangs ist aber weiterhin divergent, wenn das ursprüngliche Integral divergent war. Diese Parametrisierung der Divergenz bezeichnet man als Regularisierung.

Im zweiten Schritt werden diese so parametrisierten Divergenzen beseitigt. Dabei werden in die Lagrangedichte sog. Counterterme eingeführt, die die divergenten Ausdrücke eliminieren. Eine Theorie heißt renormierbar, wenn alle Counterterme von derselben Form sind, wie die Ausdrücke in der ursprünglichen Lagrangedichte. Dann äußert sich die Renormierung darin, daß ursprünglich bereits in der Theorie vorhandene Parameter (Massen, Kopplungskonstanten, Wellenfunktionen) durch unendliche Faktoren redefiniert werden und das Resultat Ordnung für Ordnung in der Dyson-Reihe endlich bleibt. Bzgl. der Wellenfunktionen entspricht dies der Normierung, woraus sich der Name "Renormierung" herleitet.

Die Kopplungskonstanten und Massen werden dabei an einem Punkt im Impulsraum (Renormierungspunkt) an die Meßdaten angepaßt. Die Wahl dieses Renormierungspunktes ist willkürlich und ändert an den physikalisch relevanten Aussagen nichts. Mathematisch findet diese Unabhängigkeit von der Wahl des Renormierungspunktes Ausdruck in der Renormierungsgruppengleichung, die die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten-, Massen- und Wellenfunktionen-Renormierungsfaktoren von der Wahl Renormierungspunkt beschreibt.

Die Wahl des Renormierungspunktes kann aber von praktischer Relevanz sein. So ist z.B. die Kopplungskonstante der QCD für große Impulse klein (asymptotische Freiheit), d.h. wählt man den Renormierungspunkt bei hohen Impulsen, läßt sich die QCD gut störungstheoretisch behandeln. Das Verhalten der Kopplungskonstanten bei Renormierungspunkten mit kleineren Impulsen läßt sich dann mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung bestimmen. Diese über die reine Störungstheorie hinausgehende Methode gibt eine Erklärung für das Confinement der Quarks

und Gluonen.

In diesem Anhang soll nun ein wichtiges Regularisierungsverfahren betrachtet werden, das insbesondere im Zusammenhang mit Yang-Mills-Theorien geeignet ist, weil es die Eichinvarianz i.a. nicht zerstört, die dimensionale Regularisierung, die zuerst in [HV72] beschrieben wurde.

Ausgangspunkt ist dabei die Beobachtung, daß Integrale, die in der vierdimensionalen Raum-Zeit divergent sind, als Integrale über Räume anderer Dimension als vier existieren. Grob kann man das Vorgehen dadurch charakterisieren, daß man die Integrale für diese Räume berechnet. Der Regularisierungsparameter ist dabei die Dimensionszahl der Raum-Zeit. Das Ergebnis der Integration wird formal zu beliebigen komplexen Dimensionszahlen analytisch fortgesetzt. Es ist klar, daß das Resultat für $d \rightarrow 4$ divergent ist. Dadurch wird die Bestimmung der Counterterme für die Lagrangedichte ermöglicht, so daß man nach der Renormierung den Grenzübergang $d \rightarrow 4$ durchführen kann und ein endliches Resultat für das ursprünglich divergente Diagramm erhält. Daß diese Ergebnisse unabhängig von dem gewählten Regularisierungsverfahren sind, beruht darauf, daß nicht mehr erreicht wird, als die Renormierung der Wellenfunktionen und die Anpassung der Parameter Ordnung für Ordnung der Störungsreihe.

Wir benötigen im folgenden einige mathematische Grundlagen im Zusammenhang mit Integrationen über Räume beliebiger Dimension d und der Γ -Funktion. Dabei folgen wir [Smi61].

A.1 Die Γ -Funktion

Als erstes benötigen wir bei Berechnungen von Integralen die Γ -Funktion, die schon Euler und Gauß definiert haben. Sie stellt das klassische Beispiel für die “analytische Fortsetzung” einer für natürliche Zahlen definierten Funktion, nämlich der Fakultät, zu einer holomorphen Funktion dar.

Die Eulersche Darstellung ist durch das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{z-1}dt \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Dabei ist für komplexe z

$$t^{z-1} = \exp[(z-1)\ln t], \quad (\text{A.2})$$

wobei der Logarithmus entlang der positiven reellen Achse reell definiert ist (Hauptzweig des Logarithmus). Wir zeigen im folgenden, daß das Integral bei Einschränkung von z auf vollständig in der rechten Halbebene gelegene kompakte Gebiete existiert und dort eine holomorphe Funktion definiert.

Dazu zerlegen wir das Integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \exp(-t)t^{z-1}dt + \int_1^\infty \exp(-t)t^{z-1}dt. \quad (\text{A.3})$$

Betrachten wir zunächst das zweite Integral

$$\omega(z) = \int_1^\infty \exp(-t)t^{z-1}dt : \quad (\text{A.4})$$

Für festes $t > 1$ ist der Integrand für alle $z \in \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei nun B ein kompaktes Gebiet der z -Ebene und $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Da B kompakt ist, existiert

$$x_0 = \max_{z \in B} [\text{Re}z]. \quad (\text{A.5})$$

Da weiter für $t \geq 1$ der Logarithmus nicht negativ ist, folgt

$$\forall z \in B : |\exp(-t)t^{z-1}| = |\exp[-t + (z-1)\ln t]| \leq \exp(-t)t^{x_0-1}. \quad (\text{A.6})$$

Weil das Integral

$$\int_1^\infty \exp(-t)t^{x_0-1} dt \quad (\text{A.7})$$

konvergiert, ist das nach dem Weierstraßschen Kriterium auch für (A.4) der Fall, und die Konvergenz ist sogar gleichmäßig in B.

Wir betrachten jetzt das erste Integral in (A.3):

$$\phi(z) = \int_0^1 \exp(-t)t^{z-1} dt. \quad (\text{A.8})$$

Der Betrag des Integranden ist $\exp(-t)t^{x-1}$, und für $x > 1$ existiert das Integral. Folglich ist (A.8) in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 1$ holomorph. Wir behaupten, daß dies sogar in jedem kompakten Gebiet B, das vollständig in der rechten z-Halbebene liegt, der Fall ist. Wegen der Kompaktheit von B existiert

$$x_1 = \min_{z \in B} \operatorname{Re} z, \quad (\text{A.9})$$

und es gilt $x_1 > 0$. Für $0 < t \leq 1$ ist $\ln t \leq 0$, also

$$\forall z \in B : |\exp(-t)t^{z-1}| \leq \exp(-t)t^{x_1-1}. \quad (\text{A.10})$$

Da das Integral über die zuletzt stehende Funktion konvergiert, ist wieder nach dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium (A.8) holomorph in B.

Da weiter B ein beliebiges kompaktes Gebiet in der rechten z-Halbebene sein darf, ist folglich durch (A.1) die Γ -Funktion in der ganzen rechten offenen Halbebene holomorph definiert.

Wir wollen diese Funktion nun analytisch fortsetzen. Dazu genügt die Betrachtung des Integrals (A.8), da (A.4) in der ganzen Ebene holomorph ist. Die Exponentialreihe

$$\exp(-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \quad (\text{A.11})$$

konvergiert für $t \in \mathbb{R}$ gleichmäßig. Setzt man dies in (A.8) ein, folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $z > 0$:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}. \quad (\text{A.12})$$

Da die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung in jedem Kompaktum der z-Ebene, das keine der Stellen $\{0; -1; -2; \dots\}$ enthält, gleichmäßig konvergiert, ist ϕ zu einer meromorphen Funktion mit einfachen Polen an diesen Stellen fortsetzbar. Diese Eigenschaften besitzt folglich auch die Γ -Funktion. Damit haben wir die Weierstraßsche Partialbruchentwicklung der Γ -Funktion gewonnen:

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty \exp(-t)t^{z-1} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}. \quad (\text{A.13})$$

Wir verstehen im folgenden unter Γ diese meromorphe Funktion. Wir zeigen noch einige Eigenschaften der Γ -Funktion.

(A.1) läßt sich für $n \in \mathbb{N}$ elementar ausrechnen.

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.14})$$

Durch partielle Integration von (A.1), weist man für reelle positive z unmittelbar nach, daß

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.15})$$

ist. Da Γ meromorph ist, gilt das nach dem Satz von der analytischen Fortsetzung in jedem regulären Punkt.

Weiter gilt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (\text{A.16})$$

Zum Beweis substituieren wir in (A.1) $t = u^2$ und setzen voraus, daß $z \in (0; 1)$:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty \exp(-u^2) u^{2z-1} du. \quad (\text{A.17})$$

Ersetzt man hierin z durch $1-z$, folgt nach Umbenennung der Integrationsvariablen zu v :

$$\Gamma(1-z) = 2 \int_0^\infty \exp(-v^2) v^{1-2z} dv. \quad (\text{A.18})$$

Multiplikation von (A.17) mit (A.18) ergibt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-u^2 - v^2) \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} du dv. \quad (\text{A.19})$$

Dies lesen wir nun als Integral über den ersten Quadranten der uv -Ebene und führen ebene Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 4 \int_0^\infty r dr \exp(-r^2) \int_0^{\pi/2} d\phi (\cot \phi)^{2z-1} = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\phi (\cot \phi)^{2z-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Zur Berechnung dieses Integrals substituieren wir $\phi = \operatorname{arccot}(\sqrt{x})$:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} dx. \quad (\text{A.21})$$

Die Funktion

$$f(y) = \frac{(-y)^{z-1}}{1+y} \quad (\text{A.22})$$

besitzt in $y = 0$ einen Verzweigungspunkt. Wir schneiden die y -Ebene entlang der positiven reellen Achse auf und betrachten das Blatt der für irrationale z unendlichblättrigen Riemannfläche, für das

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm 0} (-y)^{z-1} = |y|^{z-1} \exp[\mp i\pi(z-1)] \quad (\text{A.23})$$

ist. Jetzt betrachten wir den folgenden auf diesem Blatt der Riemannschen Fläche gelegenen Integrationsweg: Der Radius des großen Kreises soll dabei beliebig groß, der des kleinen beliebig

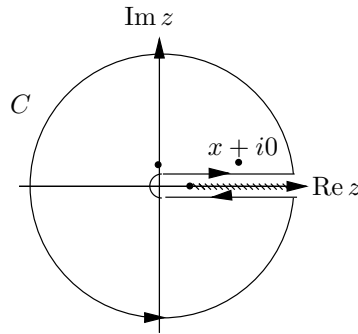


Abbildung A.1: Integrationsweg zur Berechnung von (A.21)

klein gedacht werden, so daß beide Kreise nicht zur Integration beitragen. Dann folgt

$$\int_C \frac{(-y)^{z-1}}{1+y} dy = 2i \sin(\pi z) \int_0^\infty \frac{x^{z+1}}{1+x} dx. \quad (\text{A.24})$$

Andererseits ergibt die Anwendung des Residuensatzes:

$$\int_C \frac{(-y)^{z-1}}{1+y} dy = 2\pi i \operatorname{Res}_{y=-1} \frac{(-y)^{z-1}}{1+y} = 2\pi i. \quad (\text{A.25})$$

Faßt man beide Ergebnisse zusammen, folgt mit (A.19) die Behauptung (A.16) für $z \in (0, 1)$, also wegen der Meromorphie der Γ -Funktion an jeder regulären Stelle.

Setzt man in (A.16) $z = 1/2$, folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{t} \exp(-t) dt = \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.26})$$

Weiter benötigen wir im folgenden die Eulersche Betafunktion:

$$B(p; q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (\text{A.27})$$

Substituiert man darin $t = 1 - x$, findet man

$$B(p; q) = B(q; p). \quad (\text{A.28})$$

Partielle Integration zeigt, daß

$$B(p; q+1) = \frac{q}{p} B(p+1; q). \quad (\text{A.29})$$

Betrachtet man (A.17), folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-u^2 - v^2) u^{2p-1} v^{2q-1} du dv = \\ &= 4 \int_0^\infty dr r^{2(p+q-1)} \int_0^{\pi/2} d\phi \exp(-r^2) \cos^{2p-1} \phi \sin^{2q-1} \phi, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

wobei zum Schluß ebene Polarkoordinaten eingeführt wurden.

Substitution von $t = r^2$ ergibt

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 2 \int_0^\infty \exp(-t)t^{p+q-1}dt \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \phi \sin^{2q-1} \phi d\phi = \\ &= 2\Gamma(p+q) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \phi \sin^{2q-1} \phi.\end{aligned}\tag{A.31}$$

Substituieren wir im verbleibenden Integral $x = \cos^2 \phi$, finden wir, daß es den Wert $B(p; q)/2$ besitzt. Damit haben wir

$$B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\tag{A.32}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß die Γ -Funktion die folgende auf Gauß zurückgehende Produktdarstellung besitzt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= z \exp(\gamma z) \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right) \\ \text{mit } \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right).\end{aligned}\tag{A.33}$$

γ heißt Euler-Mascheronische Konstante.

Zum Beweis benutzen wir die folgende Darstellung der Exponentialfunktion

$$\exp(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\tag{A.34}$$

und definieren die Funktionenfolge

$$P_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.\tag{A.35}$$

Eine naive Betrachtung der Definition legt nämlich nahe, daß diese Funktionenfolge punktweise gegen die Γ -Funktion konvergiert. Wir wollen zeigen, daß dies sogar im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz der Fall ist. Zunächst zeigen wir aber, daß wir dann auch schon die Behauptung bewiesen haben.

Substituieren wir in nämlich in (A.35) $t = n\tau$, finden wir

$$\begin{aligned}P_n(z) &= n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau = n^z B(z; n+1) = \\ &= n^z \frac{\Gamma(z)\Gamma(n+1)}{\Gamma(z+n+1)} = \frac{n^z \Gamma(z)n!}{(z+n)(z+n-1)\dots z\Gamma(z)}.\end{aligned}\tag{A.36}$$

Dabei haben wir die oben hergeleiteten Eigenschaften der B-Funktion sowie die Funktioneigenschaft (A.15) der Γ -Funktion benutzt. Es ergibt sich schließlich:

$$P_n(z) = \frac{n^z}{(z+n)(z+n-1)\dots z}\tag{A.37}$$

Dieses Resultat formen wir noch wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n(z)} &= \frac{\exp[z(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n)]}{\exp[z(1 + 1/2 + \cdots + 1/n)]} z \frac{z+1}{1} \cdots \frac{z+n}{n} = \\ &= z \exp[z(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n)] \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Das heißt in der Tat, daß die glm. Konvergenz der Funktionenfolge P_n gegen Γ die Gaußsche Produktdarstellung beweist.

Wegen des Prinzips von der analytischen Fortsetzung genügt es dabei, letzteres für reelle positive z zu zeigen. Durch Differenzieren nach t weist man sofort nach, daß

$$1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right) \exp t = \int_0^t \frac{v}{n} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} \exp v \, dv \quad (\text{A.39})$$

ist. Für $0 < t < n$ ist der Integrand positiv. Andererseits gilt

$$\int_0^t \frac{v}{n} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} \exp v \, dv < \int_0^n \frac{v}{n} \exp t \, dv = \frac{t^2}{2n} \exp t. \quad (\text{A.40})$$

Damit folgt

$$0 \leq \exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}. \quad (\text{A.41})$$

Nach der Integraldefinition der Γ -Funktion (A.1) gilt

$$\Gamma(z) - P_n(z) = \int_0^n \left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^\infty \exp(-t) t^{z-1} dt. \quad (\text{A.42})$$

Wir haben schon oben im Zusammenhang mit (A.1) gesehen, daß das zweite Integral für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Aus der eben hergeleiteten Ungleichung folgt für $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^n \left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \leq \\ &\leq \int_0^{n_0} \left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_{n_0}^n \exp(-t) t^{z-1} dt \leq \\ &\leq \int_0^{n_0} \frac{t^{z+1}}{2n} dt + \int_{n_0}^\infty \exp(-t) t^{z-1} dt. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des letzten Integrals können wir n_0 so groß wählen, daß

$$\int_{n_0}^\infty \exp(-t) t^{z-1} dt < \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{A.44})$$

wird. Damit haben wir für $n > n_0$ unter nochmaliger Verwendung der oben hergeleiteten Ungleichung:

$$0 \leq \int_0^n \left[\exp(-t) - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt < \int_0^{n_0} \frac{t^{z+1}}{2n} dt + \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{z+2} \frac{n_0^{z+2}}{n} + \frac{\epsilon}{2}. \quad (\text{A.45})$$

Daraus liest man unmittelbar ab, daß das Integral auf jedem kompakten positiv reellen Intervall gleichmäßig konvergent ist. Damit ist die Gaußsche Produktdarstellung für die Γ -Funktion bewiesen.

Bilden wir jetzt von dieser Produktdarstellung den Logarithmus, folgt

$$-\ln[\Gamma(z)] = \gamma z + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{z}{k} + \ln \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right]. \quad (\text{A.46})$$

Leitet man diese Gleichung gliedweise nach z ab, ergibt sich

$$\Psi_1(z) := \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z)] = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(z+k)} \quad (\text{A.47})$$

Da die Reihe auf jedem Kompaktum, das keine negative ganze Zahl enthält, gleichmäßig konvergiert, stellt sie tatsächlich die logarithmische Ableitung der Γ -Funktion dar.

Jetzt können wir die für die dimensionale Regularisierung wichtige Laurententwicklung der Γ -Funktion um die Pole bei $z \in \mathbb{Z}_0^-$ herleiten. Dabei genügt die Entwicklung bis zu Gliedern erster Ordnung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right]. \quad (\text{A.48})$$

Zum Beweis bemerken wir, daß wegen (A.47)

$$\Psi_1(1) = -\gamma - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = -\gamma \quad (\text{A.49})$$

ist. Aus der Funktionalgleichung der Γ -Funktion (A.15) folgt

$$\Psi_1(z+1) = \frac{d}{dz} \ln[\Gamma(z+1)] = \frac{1}{z} + \Psi_1(z). \quad (\text{A.50})$$

Durch vollständige Induktion beweist man damit sofort:

$$\forall n \geq 1 : \Psi_1(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (\text{A.51})$$

Jetzt betrachten wir die Taylorentwicklung der Γ -Funktion um 1:

$$\Gamma(1 + \epsilon) = 1 + \epsilon \Gamma'(1) + O(\epsilon^2) = 1 + \epsilon \Psi_1(1) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.52})$$

Dies gilt zumindest im Inneren eines Kreises vom Radius 1 um $\epsilon = 0$, weil die nächstgelegene Polstelle der Γ -Funktion bei $\epsilon = -1$ liegt. Division dieser Gleichung durch ϵ ergibt:

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon). \quad (\text{A.53})$$

Das ist (A.48) für $n = 0$. Für alle weiteren natürlichen n folgt diese Gleichung nunmehr durch vollständige Induktion: Sei die Behauptung für $n=k$ wahr. Dann folgt mit Hilfe der Funktionaleigenschaft (A.15):

$$\Gamma[-(k+1) + \epsilon] = \frac{\Gamma(-k + \epsilon)}{-(k+1) + \epsilon} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(k+1) + \frac{1}{k+1} + O(\epsilon) \right]. \quad (\text{A.54})$$

Aus (A.48) sehen wir, daß dies die Behauptung für $n=k+1$ ist.

A.2 Kugelkoordinaten in d Dimensionen

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß man aufgrund der analytischen Eigenschaften der Feynmanschen Greenfunktionen, also letztlich aus Gründen, die aus der Kausalität der physikalischen Gesetze folgen, durch Wickrotation die Loopintegrale im Euklidischen ausführen kann. Die Resultate dieser Rechnung sind dann analytisch in den ganzen Minkowskiraum fortzusetzen.

Zur Berechnung der uns interessierenden Integrale benötigen wir Kugelkoordinaten des d-dimensionalen euklidischen Raumes. Wir gelangen zum allgemeinen Ausdruck für das d-dimensionale Volumenelement in Kugelkoordinaten am einfachsten rekursiv, beginnend mit d=2. Hier sind die Kugelkoordinaten durch die Polarkoordinaten

$$\vec{x} = (r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (\text{A.55})$$

gegeben. Dabei ist der Definitionsbereich der Koordinaten $r \in \mathbb{R}^+$; $\phi \in [0, 2\pi)$.

Der d-dimensionale Radiusvektor ergibt sich dann aus dem (d-1)-dimensionalen rekursiv folgendermaßen:

$$\vec{x} = r(\vec{n}_{d-1} \sin \theta_{d-2}, \cos \theta_{d-2}). \quad (\text{A.56})$$

Dabei bezeichnet \vec{n}_{d-1} den Einheitsvektor in radialer Richtung im (d-1)-dimensionalen Raum. Der Definitionsbereich der Winkel θ_k mit $k = 1 \dots (d-2)$ ist $(0; \pi)$. Die Jacobideterminante zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten enthält einen Faktor r^{d-1} :

$$J_d = \det \frac{\partial(x_1; x_2; \dots; x_d)}{\partial(r; \phi; \theta_1; \dots; \theta_{d-2})} = r^{d-1} j_d. \quad (\text{A.57})$$

Wenden wir die Definitionsgleichung der Jacobideterminante auf (A.56) an, so finden wir durch Entwicklung nach der letzten Zeile die Rekursionsformel:

$$j_2 = 1; \quad j_d = (\sin \theta_{d-2})^{d-2} j_{d-1}, \quad (\text{A.58})$$

aus der wiederum sofort

$$j_d = \prod_{k=1}^{d-2} \sin^k \theta_k \quad (\text{A.59})$$

folgt. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die von der durch die Parametrisierung mit Kugelkoordinaten gegebenen Karte nicht überdeckten Teile des \mathbb{R}^n nur Mengen vom Maß 0, also nicht relevant für die Durchführung der Integrationen sind.

A.3 Standardintegrale für Feynmanregeln

Wir berechnen jetzt einige bei der Auswertung von Feynmangraphen auftretende Integrale in dimensionaler Regularisierung ([Ram89]). Wir betrachten zunächst:

$$I_d(q) = \int \frac{d^d p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{A.60})$$

Dieses Integral ist im d-dimensionalen Minkowskiraum geschrieben, d.h. $pq = p^0 q^0 - p^1 q^1 - \dots - q^{d-1} p^{d-1}$. Jetzt substituieren wir unter der Voraussetzung, daß das Integral für die gewählte Dimension d existiert, $p' = p + q$:

$$I_d(q) = \int \frac{d^d p'}{[(p')^2 - (m^2 + q^2)]^\alpha}. \quad (\text{A.61})$$

Wir setzen für die Rechnung im folgenden $\mu^2 = m^2 + q^2$ und nehmen an, daß diese Größe positiv sei. Dies ist ein typischerweise bei der Berechnung von Feynmangraphen auftretendes Integral. Dabei handelt es sich in diesem Falle um die α -te Potenz eines Bosonen-Feynmanpropagators. Dieser besitzt aber durch die $i\epsilon$ -Vorschrift die folgende Polstruktur in der komplexen p'_0 -Ebene: Dabei ist $\omega = \sqrt{\mu^2 + \vec{p}'^2}$. Aufgrund der $i\epsilon$ -Vorschrift liegen im Inneren des eingezeichneten Weges

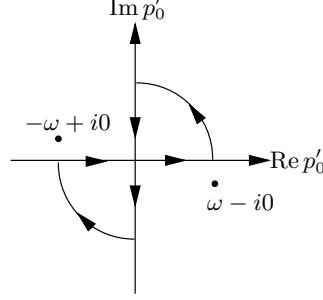


Abbildung A.2: Zur Wickrotation

in der komplexen p'_0 -Ebene keine Residuen des Integranden von (A.61). Läßt man die Radien des Viertelkreises unendlich groß werden, tragen sie nichts zum Integral bei, und Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes ergibt, daß

$$I_d(q) = \int_{-i\infty}^{i\infty} dp'^0 \int d^{d-1} \vec{p}' \frac{1}{[(p')^2 - \mu^2]^\alpha} \quad (\text{A.62})$$

ist. Führen wir jetzt $p_E^0 = -ip'^0$; $\vec{p}_E = \vec{p}'$ als Integrationsvariablen ein, wird daraus ein Integral im d-dimensionalen euklidischen Raum:

$$I_d(q) = i \int d^d p_E \frac{(-1)^\alpha}{(p_E^2 + \mu^2)^\alpha}. \quad (\text{A.63})$$

Hierbei bedeutet p_E^2 die positiv definite euklidische quadratische Form des d-dimensionalen Vektors p_E . Wir können jetzt unsere oben hergeleiteten d-dimensionalen Kugelkoordinaten einführen. Nach (A.57) und (A.59) ist nämlich:

$$I_d(q) = i \int_0^\infty dr r^{d-1} \frac{(-1)^\alpha}{(r^2 + \mu^2)^\alpha} \times \int_0^{2\pi} d\phi \int \cdots \int d\theta_1 \cdots d\theta_{d-1} \prod_{k=1}^{d-2} \sin^k \theta_k. \quad (\text{A.64})$$

Dabei ist $r = \|p_E\|$. Die Integration über die Winkel läßt sich mit Hilfe der B-Funktion ausrechnen. Wie wir beim Beweis von (A.32) gesehen haben, ist

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \quad (\text{A.65})$$

Für $p = 1/2$ folgt wegen der Symmetrie des sin um $\theta = \pi/2$:

$$\int_0^\pi \sin^{2q-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (\text{A.66})$$

und mit $k = 2q - 1$ folgt unter Verwendung von (A.26):

$$\int_0^\pi \sin^k \theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2+1)}. \quad (\text{A.67})$$

Für den Winkelanteil in (A.64) finden wir also

$$\Omega_d = 2\pi \prod_{k=1}^{d-2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma[(k+2)/2]} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (\text{A.68})$$

Dabei bedeutet Ω_d den vollen d -dimensionalen Raumwinkel, also den $(d-1)$ -dimensionalen Inhalt der Einheitskugel im d -dimensionalen Raum. Für $d = 2$ erhält man den Einheitskreisumfang 2π , für $d = 3$ den Oberflächeninhalt der Einheitskugel 4π .

Es ist nun der wesentliche Gehalt des Verfahrens der dimensional Regularisierung, die Dimension d als komplexen Parameter anzusehen. So wird z.B. die rechte Seite von (A.68) als Definition für den vollen Raumwinkel eines Raumes mit der komplexen Dimension d interpretiert.

Setzen wir nun (A.68) in (A.64) ein, erhalten wir

$$I_d(q) = \frac{2i\pi^{3/2}(-1)^\alpha}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{(r^2 + \mu^2)^\alpha} dr. \quad (\text{A.69})$$

Substituiert man in der Definition der B -Funktion (A.27)

$$\tau^2 = \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow t = \frac{1}{1 + \tau^2}; \quad \tau d\tau = -\frac{1}{2t^2} dt, \quad (\text{A.70})$$

ergibt sich

$$B(x; y) = 2 \int_0^\infty \frac{\tau^{2y-1}}{(1 + \tau^2)^{x+y}} d\tau = 2 \int_0^\infty \frac{\tau^{2x-1}}{(1 + \tau^2)^{x+y}} d\tau, \quad (\text{A.71})$$

wobei wir zum Schluß die Symmetrie der B -Funktion unter Vertauschung ihrer beiden Argumente benutzt haben. Setzen wir hierin

$$x = \frac{\beta + 1}{2}; \quad y = \alpha - \frac{\beta + 1}{2}; \quad \tau = \frac{s}{\mu}, \quad (\text{A.72})$$

folgt

$$\int_0^\infty \frac{s^\beta}{(s^2 + \mu^2)^\alpha} ds = \frac{1}{2\mu^{2\alpha - \beta - 1}} B\left(\frac{\beta + 1}{2}; \alpha - \frac{\beta + 1}{2}\right). \quad (\text{A.73})$$

Mit $\beta = d - 1$ erhalten wir damit durch Einsetzen in (A.69):

$$I_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} B\left(\frac{d}{2}; \alpha - \frac{d}{2}\right) \mu^{d-2\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}(-1)^\alpha \Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha) (\mu^2)^{\alpha - d/2}}. \quad (\text{A.74})$$

Wegen $\mu^2 = m^2 + q^2$ können wir schreiben:

$$I_d(q) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha i}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{(q^2 + m^2)^{\alpha - d/2}}. \quad (\text{A.75})$$

Dabei ist die Potenz im Nenner für $q^2 > -m^2$ reell definiert und wird in den ganzen Minkowski-raum analytisch fortgesetzt. Es erweist sich für das folgende als bequem, $d = 2\omega$ zu setzen:

$$\begin{aligned} I_{2\omega}(q) &= \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(-1)^\alpha}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}}. \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Alle übrigen Formeln, die wir zur Berechnung von Feynmangraphen benötigen, finden wir aus (A.76) durch Differenzieren und Kontrahieren. Leiten wir also (A.76) nach q^μ ab, finden wir

$$\int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_\mu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \frac{-i(-1)^\alpha}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{q_\mu}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (\text{A.77})$$

Differenzieren wir dieses Ergebnis seinerseits nach q^ν , erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} &= \frac{i}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha)} \frac{(-1)^\alpha}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}} \times \\ &\times \left[q_\mu q_\nu \Gamma(\alpha - \omega) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (q^2 + m^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Kontraktion dieses Resultats über μ und ν ergibt:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p^2}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} &= \\ &= \frac{i}{(4\pi \Gamma(\alpha))^\omega} \frac{(-1)^\alpha}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}} \times \\ &\times [q^2 \Gamma(\alpha - \omega) - \omega (q^2 + m^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Damit haben wir die im Zusammenhang mit den Rechnungen dieser Arbeit benötigten mathematischen Grundlagen zum Verfahren der dimensional Regularisierung zusammengestellt. Wir fügen noch einige Bemerkungen an.

Bei der dimensional Regularisierung ist auf die Dimension der Felder, Massen und Kopplungskonstanten zu achten. In dieser Arbeit werden stets natürliche Einheiten verwendet, in denen $\hbar = c = 1$ ist. Infolgedessen haben wir nur die Dimension Energie bzw. Länge. Die Wirkung ist dann dimensionslos und folglich die Lagrangedichte von der Dimension Energie $^{2\omega} = 1/\text{Länge}^{2\omega}$, d.h. die Dimension der Felder ist ω -abhängig. Entsprechend muß z.B. in einem Term wie $\lambda \phi^4$ in der ϕ^4 -Theorie (für $d=4$) λ durch $(\mu^2)^{2-\omega} \lambda$ ersetzt werden, damit die Kopplungskonstante für alle Dimensionen $d = 2\omega$ dimensionslos bleibt. Es ist nämlich $[\phi] = \text{Energie}^{\omega-1}$, d.h. durch die Renormierung wird eine Energieskala in die Theorie eingeführt.

Die Divergenzen der Integrale für $d \rightarrow 4$, also $\omega \rightarrow 2$, sind nun explizit durch die Pole der Γ -Funktion bei $0; -1; -2; \dots$ gegeben. Die erhaltenen Ausdrücke werden für $\omega = 2 - \epsilon$ um $\epsilon = 0$ mit Hilfe von (A.48) in eine Laurentreihe entwickelt. Die für $\epsilon \rightarrow 0$ divergenten Terme $\propto 1/\epsilon$ können somit durch Counterterme, die zur Lagrangedichte hinzugefügt werden, kompensiert werden.

Diese Counterterme sind im Falle einer renormierbaren Theorie von derselben Form wie die in der ursprünglichen Lagrangedichte auftretenden Terme, bewirken also eine Renormierung der Kopplungskonstanten, Massen und Wellenfunktionen.

Die unbestimmten endlichen Anteile dieser Counterterme dienen dazu, die Werte der Kopplungskonstanten und Massen sowie die Normierung der Wellenfunktionen an die experimentellen Fakten anzupassen.

Es sei weiter nochmals betont, daß die obigen Manipulationen mit Integralen wie Verschiebung des Impulses, Differentiation unter dem Integral, voraussetzen, daß die Integrale für ganzzahlige positive Werte von d existieren und die Resultate als analytische Funktion für komplexe Dimensionen d gelesen werden können. Es ist die Stärke der dimensional Regularisierung, daß dies für die Integrale, die bei der Berechnung der Feynmangraphen auftreten, zumindest für massive Teilchen der Fall ist und dabei weder die Lorentz- noch i.a. die Eichinvarianz der Theorie verletzt wird.

Im Falle masseloser Teilchen treten spezifische Probleme mit Infrarotdivergenzen auf. So kann es z.B. geschehen, daß in diesem Fall keine ganzzahligen positiven Werte für d existieren, die sowohl das Problem der UV- als auch das der IR-Divergenzen behebt. Selbst wenn dies der Fall ist, ist es noch möglich, daß die analytische Fortsetzung nicht eindeutig ist, weil sich keine analytische Funktion finden läßt, deren Definitionsbereich mit dem des erhaltenen Ausdrucks überlappt. Lösungen für diese Probleme sind z.B. in [Lei75] und den hierin zitierten Arbeiten zu finden.

Schließlich seien auch noch die Anomalien erwähnt. Darunter versteht man das Phänomen, daß eine Symmetrie, der die Lagrangedichte der klassischen Felder genügt, keine Symmetrie der dazugehörigen Quantenfeldtheorie ist. Praktisch äußert sich dieses Problem im Zusammenhang mit der dimensional Regularisierung darin, daß es kein Äquivalent für bestimmte mathematische Ausdrücke in beliebigen Dimensionen wie z.B. γ_5 oder $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ gibt.

Eine andere Form von Anomalien rührt von bestimmten Graphen her, z.B. Dreiecksgraphen (Einschleifenvertexbeiträgen). Diese Bell-Jackiw-Anomalien treten aber nicht für alle Eichgruppen auf oder verschwinden für eine bestimmte Anzahl von Teilchensorten (vgl. [BBJ83]).

Anhang B

Herleitung der Feynmanregeln

B.1 Vorbereitungen

In diesem Anhang sollen die Feynmanregeln der in Kapitel 1 entwickelten Eichtheorie für das $\pi\rho$ -System hergeleitet werden. Zur genaueren Begründung des verwendeten Verfahrens s. die Standardlehrbücher über Quantenfeldtheorie.

Zunächst stellen wir einige in der Lagrangedichte verwendete Objekte zusammen. Der Higgssektor ist durch ein Isospindublett Φ gegeben, das in kanonischer Weise reell dargestellt wird. Im spontan gebrochenen Modus wird dieses Dublett in kanonischer Weise durch vier reelle Felder dargestellt. Die Eichgruppe wirkt als $SU[2]$ -Standarddarstellung auf die Φ -Felder bzw. auf die entsprechenden reellen Felder. Durch das Potential V wird diese Eichsymmetrie spontan gebrochen. Die willkürliche Festlegung des neuen Vakuums ergibt in der reellen Darstellung für das Higgsfeld

$$\phi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}v + \sigma \text{ mit } v = (1, 0, 0, 0)^t; \sigma \in \mathbb{R}^4. \quad (\text{B.1})$$

Die Liealgebrenbasis ist in der komplexen Darstellung durch die Pauli-Matrizen gegeben:

$$\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Die reelle Form ergibt sich daraus in kanonischer Weise. Die Vertauschungsregeln lauten

$$[\tau^a, \tau^b] = i\epsilon_{abc}\tau^c = if^{abc}\tau^c \quad (\text{B.3})$$

Dabei beachte man, daß die τ -Matrizen in der reellen Form rein imaginär antisymmetrisch (also hermitesch) sind. Die auf die Φ -Felder wirkende kovariante Ableitung ist durch

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + ig\mathcal{A}^\mu; \mathcal{A}^\mu = A^{a\mu}\tau^a \quad (\text{B.4})$$

gegeben. Eine Eichtransformation wird durch

$$V^{ik} = [\exp(-ig\chi^a\tau^a)]^{ik}; \phi'^i = V^{ik}\phi^k; \mathcal{A}'^\mu = V\mathcal{A}^\mu V^{-1} - \frac{i}{g}V(\partial_\mu V^{-1}) \quad (\text{B.5})$$

definiert. In infinitesimaler Form gilt

$$\delta\Phi = -ig\delta\chi^a\tau^a\Phi; \delta A_\mu^c = \partial_\mu\delta\chi^c - g\delta\chi_a f^{abc}A_\mu^b. \quad (\text{B.6})$$

Die (klassische) Lagrangedichte für den Eichbosonen-Higgssektor ergibt sich mit diesen Bezeichnungen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{g^2\mu^2}{8\lambda}A_\mu^a A^{a\mu} \\ &+ \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu\sigma)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\sigma) - \tilde{V}(\sigma) - \\ &- \frac{ig\mu}{\sqrt{\lambda}}v^\dagger\mathcal{A}^\mu(\mathcal{D}_\mu\sigma) + \frac{g^2\mu}{2\sqrt{\lambda}}v^\dagger\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu\sigma. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

In Kapitel 1 wurde ausführlich dargestellt, daß zur Quantisierung der nichtabelschen Eichtheorie die Eichung zu fixieren ist, wobei auf die manifeste Renormierbarkeit der entstehenden Theorie zu achten ist. Diese Forderung wird durch die van t'Hooft- oder R_ξ -Eichung erfüllt. Diese besitzt außerdem einen unitären Limes. Die Eichfixierung erfolgt dabei so, daß die in den Eich- und Higgsfeldern gemischten bilinearen Terme in (B.7) herausfallen. Das eichfixierende Funktional ist durch

$$g^a = \partial_\mu A^{\mu a} + ig\xi v^\dagger T^a \sigma \quad (\text{B.8})$$

gegeben, und die eichfixierende Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{EF}} = -g^a g^a / (2\xi)$ ergibt sich bis auf eine Divergenz zu

$$\mathcal{L}_{\text{EF}} \cong -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)(\partial^\mu A_\mu^a) + \frac{ig\mu}{\sqrt{\lambda}}v^\dagger\mathcal{A}^\mu(\partial_\mu\sigma) + \frac{g^2\mu^2\xi}{2\lambda}(v^\dagger\tau^a\sigma)(v^\dagger\tau^a\sigma). \quad (\text{B.9})$$

Dabei bedeutet \cong gleich bis auf eine Divergenz.

Weiter muß man noch Faddeev-Popov-Geistfelder einführen. Dies sind skalare Grassmannfelder $\bar{\eta}^a$ und η^a , die wir uns als reell denken dürfen. Wie in Kapitel 1 ausführlich gezeigt, tragen sie zur Lagrangedichte mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{FP}} &= (\partial_\mu\bar{\eta}^a)(\partial^\mu\eta^a) - \frac{g^2\mu^2\xi}{4\lambda}\bar{\eta}^a\eta^a - \\ &- \frac{g^2\xi\mu}{\sqrt{\lambda}}(v^\dagger\tau^a\tau^b\sigma)\bar{\eta}^a\eta^b + g(\partial_\mu\bar{\eta}^a)f^{abc}\eta^b A^{c\mu} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

bei. Die quantenfeldtheoretische effektive Lagrangedichte ist damit durch

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{EF}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} \quad (\text{B.11})$$

gegeben.

B.2 Propagatoren

Zur Aufstellung der Feynmanregeln hat man den in den Feldern bilinearen Anteil zu extrahieren. Dieser ergibt die Propagatoren der Feynmanregeln indem man diese quadratische Form im funktionalen Sinne invertiert. Dabei ist es wichtig, daß die quadratische Form diagonal bzgl. der Felder ist. Unter Berücksichtigung der Definition des verallgemeinerten Faradaytensors

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{B.12})$$

ergibt sich für den quadratischen Anteil der ρ -Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0^{(\rho)} \cong \frac{1}{2} \delta^{ab} A_\nu^a (\square A^{b\nu} - \partial^\nu \partial_\mu A^{b\mu}) - \frac{\delta^{ab}}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a) (\partial^\nu A_\nu^b) + \frac{M_\rho^2}{2} \delta^{ab} A_\mu^a A^{b\mu}. \quad (\text{B.13})$$

In Impulsdarstellung ist die funktionale Inversion wegen der Impulserhaltung einfach eine algebraische. Diese Inverse ist der Feynmanpropagator und muß die Form $\delta^{ab} \Delta_F^{\mu\rho}$ besitzen. Da es sich um einen aus p gebildeten Tensor zweiter Stufe handelt, muß dieser die Form

$$\Delta_F^{\mu\rho} = A(p^2) g^{\mu\rho} + B(p^2) p^\mu p^\rho \quad (\text{B.14})$$

besitzen. Einsetzen in die Inversenbedingung ergibt nach elementarer Rechnung

$$\Delta_F^{\mu\nu} = -\frac{1}{p^2 - M_\rho^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu (\xi - 1)}{p^2 - \xi M_\rho^2} \right] \quad (\text{B.15})$$

Für die Higgsfelder finden wir

$$\mathcal{L}_0^{(\sigma)} \cong \frac{1}{2} \sigma_1 (-\square - 2\mu^2) \sigma_1 - \sum_{a=2}^4 \sigma_a (\square + M_\rho^2 \xi) \sigma_a. \quad (\text{B.16})$$

Die Inversion der quadratischen Form ergibt im Impulsraum

$$\Delta_{F\sigma}^{jk}(p) = \frac{\delta^{1j} \delta^{1k}}{p^2 - 2\mu^2 + i\epsilon} + \frac{\delta^{jk} - \delta^{1j} \delta^{1k}}{p^2 - \xi M_\rho^2 + i\epsilon} \quad (\text{B.17})$$

Ebenso ist mit der Geistlagrangedichte

$$\mathcal{L}_0^{FP} = (\partial_\mu \bar{\eta}^a) (\partial^\mu \eta^a) - M_\rho^2 \xi \bar{\eta}^a \eta^a \quad (\text{B.18})$$

zu verfahren:

$$\Delta_{\text{FFP}}^{jk} = \frac{\delta^{jk}}{p^2 - \xi M_\rho^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.19})$$

Die Pionen sind Isospin-1-Teilchen. Wir stellen sie der Bequemlichkeit halber in der reellen Fundamentaldarstellung der Drehgruppe dar, d.h. die Liealgebrenbasis ist in dieser Darstellung durch

$$T^a{}_{jk} = -i\epsilon_{ajk} \quad (\text{B.20})$$

gegeben. Die Lagrangedichte der Pionen ist

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \vec{\pi})^\dagger (\mathcal{D}^\mu \vec{\pi}) - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\pi}^2 \quad \text{mit } \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a T^a \quad (\text{B.21})$$

Der quadratische Anteil ergibt für die Pionen den Feynmanpropagator

$$\Delta_{F\pi}^{jk} = \frac{\delta^{jk}}{p^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.22})$$

Wir bemerken, daß die Betrachtung des ρ -Propagators zeigt, daß $\xi \rightarrow \infty$ der unitäre Grenzfall ist, in der die Theorie nicht manifest renormierbar ist. Für $\xi = 0$ wird der Propagator transversal (Landau-Eichung). Wir verwenden die besonders bequeme Feynmaneichung, die durch $\xi = 1$ definiert ist. Sie hat den Vorteil, daß der ρ -Propagator proportional zu $g^{\mu\nu}$ wird.

Diese Betrachtung zeigt auch sofort, daß die Geister und die σ_k -Felder für $k = 2, \dots, 4$ unphysikalisch sind. Sie tragen nichts zu den physikalischen S-Matrixelementen bei, weil sie im unitären Limes unendlich große Massen besitzen.

B.3 Vertizes

Die übrigen über den quadratischen Anteil hinausgehenden Terme in der Lagrangedichte führen zu Vertexfaktoren, die wie folgt zu bestimmen sind. Der Beitrag eines Terms der Lagrangedichte zur Wirkung ist mit i zu multiplizieren und die Felder als Fourierintegral zu schreiben. Insgesamt ergibt sich ein die Impulserhaltung widerspiegelnder Faktor $(2\pi)^4\delta(\sum p)$, der stets weggelassen werden kann, ein Vertexfaktor, der in die Feynmanregeln in Form von Vertexgraphen eingeht, und die Feldfunktionen in Impulsdarstellung.

Bei der Herleitung des Vertexfaktors ist darauf zu achten, daß dieser in symmetrisierter Form genommen werden muß, wenn identische Teilchen an der Wechselwirkung beteiligt sind. Es sei dies exemplarisch für den ρ^3 -Vertex durchgeführt.

Aus (B.12) ergibt sich durch Einsetzen in (B.11) unter Verwendung von (B.7) für den Wechselwirkungsanteil

$$\mathcal{L}_\rho^{\text{int}} = g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{a\nu} - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}. \quad (\text{B.23})$$

Wenden wir uns nun der Berechnung des ρ^3 -Vertex' zu. Dazu ist der erste Term mit i zu multiplizieren, jedes der drei Eichfelder durch

$$A^{a\mu}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A^{a\mu}(p) \exp(-ipx) \quad (\text{B.24})$$

zu ersetzen und über x zu integrieren. Dabei entsteht die oben erwähnte δ -Funktion, die die Impulserhaltung ausdrückt. Diese lassen wir weg und symmetrisieren den Koeffizienten vor den ρ -Feldern. Dieser symmetrisierte Koeffizient ist der gesuchte Vertexfaktor. Diese Prozedur ergibt:

$$\Gamma_{\rho\rho\rho}^{a\sigma, b\mu, c\nu}(p, q, r) = \frac{g}{3!} f^{abc} [(p^\mu - r^\mu)g^{\sigma\nu} + (q^\nu - p^\nu)g^{\mu\sigma} + (r^\sigma - q^\sigma)g^{\mu\nu}]. \quad (\text{B.25})$$

Im Gegensatz zur Standardliteratur lassen wir den bei der Symmetrisierung entstehenden Faktor $1/3!$ stehen. Dies erleichtert das Aufsuchen des Symmetriefaktors eines Diagramms. Mit den hier gegebenen Feynmanregeln ergibt sich dieser einfach durch Abzählen der Möglichkeiten, ein gegebenes Diagramm aus Vertizes und Feynmanpropagatoren zusammenzusetzen. Zu dem eben erhaltenen Ausdruck ist zu betonen, daß die Symmetrisierung so zu verstehen ist, daß der Ausdruck bei Vertauschung der Tripel (p, a, σ) , (q, b, μ) und (r, c, ν) untereinander symmetrisch sein muß und die Strukturkoeffizienten f^{abc} in der hier stets benutzten Killingschen Normalform vollständig antisymmetrisch sind (vgl. auch (B.3)).

Graphisch wird dieser Vertex durch

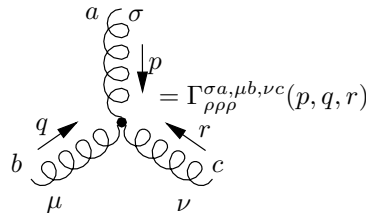


Abbildung B.1: $\rho\rho\rho$ -Vertex

dargestellt.

B.4 · Zusammenstellung der Vertizes

Der ρ^4 -Vertex ergibt sich analog

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\rho\rho\rho}^{b\mu,c\nu,d\sigma,e\rho} &= -\frac{ig^2}{4!} [f^{abc} f^{ade} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} g_{\rho\mu}) + \\ &+ f^{adc} f^{abe} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) + \\ &+ f^{aec} f^{adb} (g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} - g_{\nu\sigma} g_{\rho\mu})] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

In graphischer Form wird dies durch (Abb. B.2) dargestellt. Im folgenden stellen wir die Feyn-

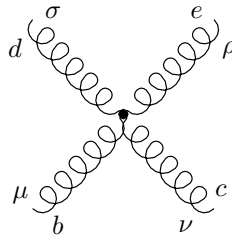


Abbildung B.2: $\rho\rho\rho\rho$ -Vertex

manregeln der Theorie zusammen. Die graphische Darstellung versteht sich von selbst. Die Propagatoren werden durch die Linien in Abb. B.3 dargestellt, die iG , also die Greenfunktion des jeweiligen Teilchens bedeuten.

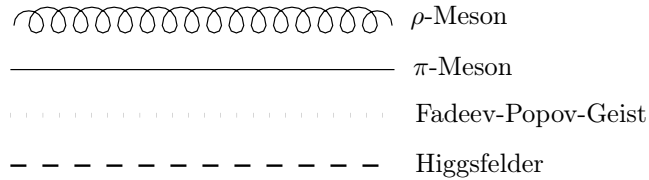


Abbildung B.3: Die im Hadronischen Teil des Modells vorkommenden Propagatorlinien

B.4 Zusammenstellung der Vertizes

Wir führen im folgenden sämtliche Vertizes des hadronischen Teils der Theorie auf. Die Teilchen werden als Index ρ , σ oder π benannt. Es treten zusätzlich entsprechende Isospinindizes a , b , c , ... auf, die stets die Werte von 1 bis 3 annehmen können. Die Indizes von physikalischen und unphysikalischen Higgsteilchen werden mit j , k , l , ... bezeichnet und laufen von 1 bis 4, wobei das Feld mit Index 1 das physikalische, d.h. zur Unitaritätsrelation der S-Matrix beitragende,

Higgsteilchen repräsentiert (s.o.).

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\rho\rho\rho}^{a\sigma,b\mu,c\nu}(p, q, r) &= \frac{g}{3!} f^{abc} [(p^\mu - r^\mu)g^{\sigma\nu} + (q^\nu - p^\nu)g^{\mu\sigma} + (r^\sigma - q^\sigma)g^{\mu\nu}] \\
 \Gamma_{\rho\rho\rho}^{b\mu,c\nu,d\sigma,e\rho} &= -\frac{ig^2}{4!} [f^{abc} f^{ade} (g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}g_{\rho\mu}) + \\
 &\quad + f^{adc} f^{abe} (g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + \\
 &\quad + f^{aec} f^{adb} (g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\nu\sigma}g_{\rho\mu})] \\
 \Gamma_{\rho\sigma\sigma}^{a\mu,jk}(r, p, q) &= -\frac{ig}{2} \tau_{jk}^a (p_\mu - q_\mu) \\
 \Gamma_{\rho\rho\sigma\sigma}^{a\mu,b\nu,jk} &= \frac{ig^2}{2 \cdot 2} g_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta^{jk} \\
 \Gamma_{\sigma\sigma\sigma\sigma}^{jklm} &= -\frac{i\lambda}{4!} (\delta^{jk} \delta^{lm} + \delta^{jl} \delta^{km} + \delta^{jm} \delta^{kl}) \\
 \Gamma_{\sigma\sigma\sigma}^{jkm} &= -\frac{i\lambda\mu}{\sqrt{\lambda} 3!} (\delta^{jk} v^m + \delta^{jm} v^k + \delta^{km} v^j) \\
 \Gamma_{\rho\rho\sigma}^{a\mu,b\nu,j} &= \frac{iM\rho g}{2} \delta^{ab} g^{\mu\nu} \delta^{1j} \\
 \Gamma_{\rho gg}^{a\mu,bc}(p, q, r) &= -gp_\mu f^{abc} \\
 \Gamma_{\sigma gg}^{j,ab} &= 0 \text{ für } j = 1 \\
 \Gamma_{\sigma gg}^{j,ab} &= -\frac{ig^2 \xi^\mu}{4\sqrt{\lambda}} \epsilon^{ab(5-j)} \text{ für } j = 2 \dots 4 \\
 \Gamma_{\rho\pi\pi}^{a\mu,bc}(p, q, r) &= \frac{ig}{2} (q_\mu - r_\mu) T^a{}_{bc} \\
 \Gamma_{\rho\rho\pi\pi}^{a\mu,b\nu,cd} &= \frac{ig^2}{2 \cdot 2} \{[T^a, T^b]_+\}_{cd} g^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Jörn Knoll für die interessante Themenstellung und die stets vorhandene Diskussionsbereitschaft danken.

Herrn Prof. Dr. Wolfgang Nörenberg danke ich für die Aufnahme in die angenehme und anregende Arbeitsatmosphäre der Theoriegruppe der GSI.

Weiter bin ich sehr dankbar für viele Diskussionen mit den Mitarbeitern und Gästen der Theoriegruppe. Insbesondere konnte ich auftretende Probleme mit den Grundlagen der Quantenfeldtheorie und über Transportgleichungen mit Dr. Rolf Fauser diskutieren. Zur Lösung vieler einzelner Probleme haben Gespräche mit Dr. Bengt Friman, Dr. Peter Henning, Dr. Leonid Razumov, Prof. Dr. Kristof Redlich, Prof. Dr. Dima Voskreshensky und Dr. Maciek Nowak beigetragen. Besonders erwähnt seien auch die Diskussionen mit Dr. Matthias Lutz über Detailfragen zur Renormierung der selbstkonsistenten Näherungen.

Besonders angenehm und ergiebig waren auch die Diskussionen mit Prof. Hans Feldmeier, Dr. Jürgen Schnack und Dr. Jörg Lindner über Quantentheorie und Physik im allgemeinen.

Die stets nette und anregende Atmosphäre ist nicht zuletzt auch meinen Kommilitonen Christoph Appel, Thomas Neff und Robert Roth zu verdanken. Mit Christoph Appel konnte ich immer die gerade gelernte Quantenfeldtheorie ausdiskutieren. Thomas Neff war stets ein geduldiger Retter in der Not, wenn sich das Computersystem einmal wieder meinen Vorstellungen widersetzt hat. Robert Roth war immer ein verlässlicher Ratgeber beim "Designen" diverser Computergraphiken und Plots.

Last but not least möchte ich mich bei meinen Eltern für die ideelle und materielle Unterstützung meines Studiums bedanken.

Literaturverzeichnis

- [A⁺84] S. Amendolia et al., Measurement of the Pion Form Factor in the Timelike Region for q^2 Values between 0.1 (GeV/c)^2 and 0.18 (GeV/c)^2 . Phys. Lett. **B138** (1984) 454
- [B⁺85] L. M. Barkov et al., Electromagnetic Pion Form Factor in the Timelike Region. Nucl. Phys. **B256** (1985) 365
- [B⁺96] R. M. Barnett et al., Review of particle physics. Particle Data Group. Phys. Rev. D **54** (1996) 1
- [Bay62] G. Baym, Self-Consistent Approximations in Many-Body Systems. Phys. Rev. **127** (1962) 1391, URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v127/i4/p1391>
- [BBJ83] P. Becher, M. Böhm und H. Joos, Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung, 2. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart (1983)
- [Ber74] C. W. Bernard, Feynman Rules for Gauge Theories at Finite Temperature. Phys. Rev. D **9** (1974) 3312, URL <http://link.aps.org/abstract/PRD/v9/i12/p3312>
- [BK61] G. Baym und L. Kadanoff, Conservation Laws and Correlation Functions. Phys. Rev. **124** (1961) 287, URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v124/i2/p287>
- [BK84] M. Bando und T. Kugo, Is the ρ Meson a Dynamical Gauge Boson of Hidden Local Symmetry. Phys. Rev. Lett. **54** (1984) 1215, URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v54/p1215>
- [BL86] D. Bailin und A. Love, Introduction to Gauge Field Theory, Adam Hilger, Bristol and Boston (1986)
- [BLP86] W. B. Berestetzki, E. M. Lifschitz und L. P. Pitajewski, Quantenelektrodynamik, Akademie-Verlag, Berlin (1986)
- [BRS76] C. Becchi, A. Rouet und R. Stora, Renormalization of Gauge Theories. Ann. Phys. (NY) **98** (1976) 287
- [BS84] A. F. Bielajew und B. D. Serot, Renormalized Hartree-Fock Equations in a Nuclear Relativistic Quantum Field Theory. Ann. Phys. (NY) **156** (1984) 215
- [CJT74] M. Cornwall, R. Jackiw und E. Tomboulis, Effective Action for Composite Operators. Phys. Rev. D **10** (1974) 2428, URL <http://link.aps.org/abstract/PRD/v10/i8/p2428>

- [Dan84] P. Danielewicz, Quantum Theory of Nonequilibrium Processes, I. Ann. Phys. (NY) **152** (1984) 239
- [DGH92] J. F. Donoghue, E. Golowich und B. R. Holstein, Dynamics of the Standard Model, Cambridge University press (1992)
- [EP94] T. S. Evans und A. C. Pearson, A Re-examination of the Path Ordered Approach to Real Time Thermal Field Theory, URL <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9412217> (1994)
- [Fau95] R. Fauser, Korrelationen in der Störungsreihe und in Transporttheorien für Systeme im Gleichgewicht, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, München (1995)
- [Fel95] H. Feldmeier, Informationstheorie und statistische Physik, Vorlesungsskript, Technische Hochschule Darmstadt WS 95/96 (1995)
- [FP77] C. D. Frogatt und J. L. Petersen, Phase-Shift Analysis of $\pi^+\pi^-$ Scattering between 1.0 and 1.8 GeV Based on Fixed Transfer Analyticity (II). Nucl. Phys. **B129** (1977) 89
- [Gel96] F. Gelis, The Effect of the vertical part of the path on the real time Feynman rules in finite temperature field theory. Z. Phys. C **70** (1996) 321, URL <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9412347>
- [GW96] J. Gomis und S. Weinberg, Are Nonrenormalizable Gauge Theories Renormalizable? hep-th/9510087 (1996)
- [Her92] M. Herrmann, Eigenschaften des ρ -Mesons in dichter Kernmaterie, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, URL http://www-lib.kek.jp/cgi-bin/img_index?200038480 (1992)
- [Hob87] A. Hobson, Concepts in Statistical Mechanics, 2. Aufl., Gordon and Breach Science Publishers (1987)
- [Hoo71] G. 't Hooft, Renormalization of Massless Yang-Mills Fields. Nucl. Phys. **B33** (1971) 189
- [HV72] G. 't Hooft und M. Veltman, Regularization and Renormalization of Gauge Fields. Nucl. Phys. **B44** (1972) 189
- [IKV99] Y. B. Ivanov, J. Knoll und D. N. Voskresensky, Self-consistent approximations to non-equilibrium many-body theory. Nucl. Phys. **A657** (1999) 413, URL <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9807351>
- [IZ80] C. Itzykson und J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill Book Company, New York (1980)
- [Jac74] R. Jackiw, Functional Evaluation of the Effective Potential. Phys. Rev. D **9** (1974) 1686, URL <http://link.aps.org/abstract/PRD/v9/i6/p1686>
- [Kap89] J. I. Kapusta, Finite-Temperature Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1989)

Literaturverzeichnis

- [KB61] L. Kadanoff und G. Baym, Quantum Statistical Mechanics, A Lecture Note and Preprint Series, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1961)
- [Kel64] L. Keldysh, Diagram Technique for Nonequilibrium Processes. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** (1964) 1515, [Sov. Phys JETP **20** 1965 1018]
- [Kli95] F. Klingl, Untersuchungen zur Struktur der Vektormesonen, Diplomarbeit, Universität Regensburg (1995)
- [KLZ67] N. M. Kroll, T. D. Lee und B. Zumino, Neutral Vector Mesons and the Hadronic Electromagnetic Current. Phys. Rev. **157** (1967) 1376, URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v157/i5/p1376>
- [Lei75] G. Leibbrandt, Introduction to the Technique of Dimensional Regularization. Reviews of Modern Physics **47** (1975) 849
- [Lin96] J. Lindner, Kovariante Formulierung der Quantenmechanik am Beispiel relativistischer Wellenpakete, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt (1996)
- [LW60] J. Luttinger und J. Ward, Ground-State Energy of a Many-Fermion System II. Phys. Rev. **118** (1960) 1417, URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v118/i5/p1417>
- [LW87] N. P. Landsmann und C. G. van Weert, Real- and Imaginary-time Field Theory at Finite Temperature and Density. Physics Reports **145** (1987) 141
- [Mat55] T. Matsubara, A new Approach to Quantum Statistical Mechanics. Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351
- [Mut87] T. Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics, World Scientific (1987)
- [Ram89] P. Ramond, Field Theory: A Modern Primer, 2. Aufl., Addison-Wesley, Redwood City, Calif. (1989)
- [RK96] P. Rehberg und S. Klevansky, One Loop Integrals at Finite Temperature and Density. Ann. Phys. (NY) **252** (1996) 422
- [Sch61] J. Schwinger, Brownian Motion of a Quantum Oscillator. J. Math. Phys **2** (1961) 407
- [Sla72] A. A. Slavnov, Ward identities in gauge theories. Theor. Math. Phys. **10** (1972) 99
- [Smi61] W. I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 4, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1961)
- [SW64] R. Streater und A. S. Wightman, Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie, Bibliographisches Institut, Mannheim (1964)
- [TF72] I. V. Tyutin und E. S. Fradkin. Sov. Journ. Phys. **16** (1972) 835
- [Wei95] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Bd. 1, Cambridge University Press (1995)
- [Wei96] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Bd. 2, Cambridge University Press (1996)
- [Wig39] E. P. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group. Annals of Mathematics **1** (1939) 149