Allgemeine Relativitätstheorie
ein Crash-Kurs

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

Wintersemester 2024/2025

Inhalt

Gleichheit von träger und schwerer Masse

- Newtonsche Mechanik: Bewegung eines Massenpunktes in **homogenem Schwerefeld**

$$m \frac{\mathrm{d}^2 \vec{x}}{\mathrm{d} t^2} = m \vec{g}$$

- auf beiden Seiten der Gleichung steht für „die Masse“ m, kürzt sich also heraus
- in Schwerefeld haben alle Teilchen **gleiche Beschleunigung**
- eigentlich: auf linker Seite **„träge Masse“**, auf rechter seite **„schwere Masse“**
- Gleichheit beider Arten von Masse ist fundamentales Naturgesetz

Äquivalenzprinzip

- $m_{\text{träg}} = m_{\text{schwer}} = m$ impliziert **Äquivalenzprinzip**: solange man (in kleinen Regionen) das Schwerefeld als homogen annehmen kann $\vec{g} = \text{const}$
- Bewegung im Schwerefeld äquivalent zur kräftefreien Bewegung, beschrieben in einem **gleichmäßig beschleunigten** Bezugssystem
- seien $\vec{\xi}$ Koordinaten des Teilchens in Inertialsystem
- freies Teilchen:

$$\ddot{\vec{\xi}} = 0$$

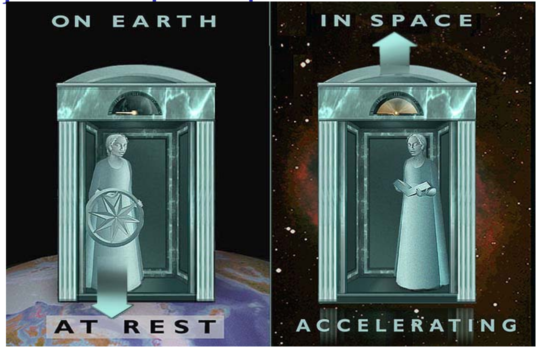
- $\vec{x}$: Koordinaten des Teilchens in glm. beschleunigtem **Nichtinertialsystem**

$$\vec{\xi} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

- Bewegungsgleichung im beschleunigten System:

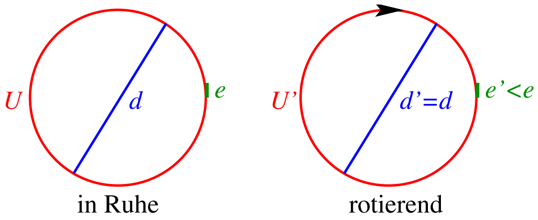
$$\ddot{\vec{\xi}} = 0 = \ddot{\vec{x}} - \vec{g} \;\Rightarrow\; \ddot{\vec{x}} = \vec{g}$$

Einstein und das Äquivalenzprinzip



- kein Experiment kann unterscheiden, ob es im Ruhsystem der Erde in deren Gravitationsfeld stattfindet oder in beschleunigtem Bezugssystem im leeren Raum stattfindet
- gilt nur für hinreichend homogene Gravitationsfelder
- $\Leftrightarrow$ gültig für kleine Raum-Zeit=Bereiche
- Gravitation lokal äquivalent zu beschleunigtem Bezugssystem

Gravitation = Gekrümmte Raumzeit



- messe Umfang und Durchmesser eines Kreises
  - Beobachter in Ruhe: $\frac{U}{d} = \pi = 3{,}1415\ldots$
  - Beobachter in rotierenden System: Lorentz-Kontraktion des Einheitsmaßstabes
    $e' < e$
    $\Rightarrow U' > U$, aber $d' = d$
    $\Rightarrow \frac{U'}{d'} > \pi$
- Geometrie nicht euklidisch für beschleunigten Beobachter
- Äquivalenzprinzip: Gravitation = gekrümmte Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit
  (Allgemeine Relativitätstheorie, ART)

Äquivalenzprinzip bei Newton

- Beobachter kann nicht entscheiden, ob er sich in einem Inertialsystem unter **Einfluss eines homogenen Schwerefeldes** befindet oder in einem **gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem** ohne Schwerefeld
- $\Rightarrow$ **lokale Äquivalenz von Gravitations- und Trägheitskräften**
- umgekehrt: in homogenem Schwerefeld **frei fallendes Bezugssystem**

$$\vec{\xi} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

ist **Inertialsystem**:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{g} \Rightarrow \ddot{\vec{\xi}} = \ddot{\vec{x}} - \vec{g} = 0$$

Einsteins Äquivalenzprinzip in der Relativitätstheorie I

- Einstein 1915: relativistische Fassung des **Äquivalenzprinzips**:
  in jedem Raum-Zeit-Punkt existiert ein lokales Inertialsystem mit „Minkowski-Koordinaten“ ξ^μ, wo
  $$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}\xi^\mu \mathrm{d}\xi^\nu$$
  mit $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ gilt
- Bewegungsgleichung für Teilchen in diesem lokalen Inertialsystem
  $$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$
- transformiere auf **beliebige generalisierte Raumzeitkoordinaten** x^α: $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$
- dann ist mit Metrik $g_{\alpha\beta}$
  $$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}\xi^\mu \mathrm{d}\xi^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$$

Einsteins Äquivalenzprinzip in der Relativitätstheorie II

- Metrik i.a. nicht mit flacher Raumzeit verträglich $\Leftrightarrow$ i.a. gekrümmte pseudo-Riemannsche Raumzeit
- und

$$\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

- mit

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} = \delta^\gamma_\alpha = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}$$

folgt

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\mu} \frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}^2\tau^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\gamma}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Einsteins Äquivalenzprinzip in der Relativitätstheorie III

bzw. mit **Christoffel-Symbolen**

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^{\gamma}}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

- Bewegungsgleichung in beliebigem beschleunigten Bezugssystem äquivalent to Bewegung in Gravitationsfeld!

Christoffelsymbole aus Metrik

- Metrik

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta}$$

- Inverse Metrik $\Leftrightarrow$ kontravariante Metrikkomponenten

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

- aus Ableitung der Metrik nach x^γ ergibt sich nach einiger Rechnerei

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

- benötige die lokal inertial Koordinaten ξ^μ nicht
- formuliere alles im Tensorformalismus
- Tensoren beziehen sich hier auf beliebige allgemeine Koordinatentransformationen
- ART ist kovariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen

Transformation von Tensorkomponenten I

- betrachte beliebige neue Koordinaten $\tilde{x}^{\mu}$, die sich umkehrbar eindeutig durch die alten Koordinaten x^{ν} berechnen lassen
- Transformation und ihre Umkehrung „hinreichend oft“ stetig partiell differenzierbar
- **Definition:** kontravariante Vektorkomponenten (obere Indizes) transformieren sich wie die Koordinatendifferentiale:

$$\mathrm{d}\tilde{x}^{\mu'} = \mathrm{d}x^{\mu} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \mathrm{d}x^{\mu} \partial_{\mu} \tilde{x}^{\mu'}$$

- beliebige kontravariante Tensorkomponenten

$$\tilde{T}^{\mu'_1 \mu'_2 \ldots \mu'_k} = (\partial_{\mu_1} \tilde{x}^{\mu'_1})(\partial_{\mu_2} \tilde{x}^{\mu'_2}) \cdots (\partial_{\mu_k} \tilde{x}^{\mu'_k}) T^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$$

Transformation von Tensorkomponenten II

- kovariante Vektorkomponenten V_μ transformieren sich so, dass für beliebige kontravariante Vektorkomponenten W^μ

$$V_\mu W^\mu = \tilde{V}_{\mu'} \tilde{W}^{\mu'} = \tilde{V}_{\mu'} (\partial_\mu \tilde{x}^{\mu'}) W^\mu$$

- Gleichung gilt **für alle** W^μ $\Rightarrow$

$$V_\mu = \tilde{V}_{\mu'} (\partial_\mu \tilde{x}^{\mu'})$$

- mit inverser Transformationsmatrix

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^{\mu'}} = \tilde{\partial}_{\mu'} x^\mu$$

  folgt

$$\tilde{V}_{\mu'} = (\tilde{\partial}_{\mu'} x^\mu) V_\mu$$

- entsprechend für beliebige kovariante Tensorkomponenten $T_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$

Transformation von Tensorkomponenten III

- man kann auch beliebige „gemischte Komponenten" verwenden:

$$\tilde{T}_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\rho'} = (\tilde{\partial}_{\mu'} x^{\mu})(\partial_{\nu} \tilde{x}^{\nu'})(\tilde{\partial}_{\rho'} x^{\rho}) T_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}$$

- mit Metrik: Umrechnung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten

$$V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu}, \quad V^{\nu} = g^{\mu\nu} V_{\mu}$$

Tensoranalysis I

- Skalarfelder

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$$

- Tensorfeldkomponenten

$$\tilde{T}^{\mu' \nu'}(\tilde{x}') = (\partial_\mu \tilde{x}^{\mu'})(\partial_\nu \tilde{x}^{\nu'}) T^{\mu\nu}(x).$$

- kovariante Ableitung

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} V^\rho$$
$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho$$

- verhalten sich korrekt wie Tensorfeldkomponenten daher kovariante Ableitungen
- für Skalarfelder

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi.$$

- es gilt die Produktregel für kovariante Ableitungen

Tensoranalysis II

- insbesondere ist Skalarfeld $\phi = V^\mu U_\mu$

$$\partial_\nu \phi = \nabla_\nu \phi = (\nabla_\nu V^\mu) U_\mu + V^\mu (\nabla_\nu U_\mu) = (\partial_\nu V^\mu) U_\mu + V^\mu (\partial_\nu U_\mu)$$

- andererseits $\phi = g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu$ und damit

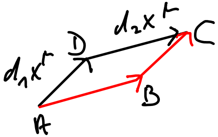
$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$$

Paralleltransport

- infinitesimale Parallelverschiebung: Vektorkomponenten bzgl. inertialer Koordinaten ξ^α ändern sich nicht
- $\Rightarrow$ kovariante Ableitung definiert Parallelverschiebung eines Vektors entlang Kurve $x(\lambda)$

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \nabla_\mu V_\nu = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V_\nu}{\mathrm{d}\tau} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho \mathrm{d}_\tau x^\mu$$

- geometrisch: der Winkel zwischen V und Tangentenvektor $\mathrm{d}x$ ändert sich nicht $\Rightarrow$ Komponente in Richtung des Tangentenvektors konstant
- Gleichung für Teilchen in Gravitationsfeld: Tangentenvektoren an Weltlinie werden parallel transportiert $\Rightarrow$ Geodäten in der Raumzeit!



- vergleiche Paralleltransport entlang $A \to D \to C$ mit $A \to B \to c$

$$\delta_{ADC} A_\alpha - \delta_{ABC} A_\alpha = R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} A_\delta \mathrm{d}_1 x^\beta \mathrm{d}_2 x^\gamma$$

- mit Krümmungstensor

$$R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\delta_{\alpha\beta} + \Gamma^\delta_{\epsilon\beta}\Gamma^\epsilon_{\alpha\gamma} - \Gamma^\delta_{\epsilon\gamma}\Gamma^\epsilon_{\alpha\beta}$$

Gleichung für Gravitationspotential (Newton) I

- Gravitationspotential von Massenpunkten m_j an Orten $\vec{x}_j$

$$\phi(\vec{x}) = -G \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|}$$

- G: Newtonsche Gravitationskonstante
- für kontinuierliche Massenverteilung mit Massendichte ρ

$$\phi(\vec{x}) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- Äquivalent ist lokale Form der Gleichung für ϕ (analog zur Elektrostatik!)

$$\Delta \phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$$

Gleichung für Gravitationspotential (Newton) II

- Potential für Gravitationskraft auf Probemasse M am Ort $\vec{x}$:

$$V(\vec{x}) = M\phi(\vec{x}), \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}\phi = -G\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

- NB: Vorzeichen des Potentials impliziert (wegen $M > 0$ und $\rho > 0$), dass **Gravitation immer anziehend** ist

Einstein-Feldgleichungen der Gravitation I

- Äquivalenz von Trägheit und Gravitation
- lokal sind Gravitationskräfte äquivalent zu Trägheitskräften
- Maß für Trägheit in Relativitätstheorie: nicht Masse sondern Energie $\Rightarrow$ Quelle für Gravitationsfelder ist die Energie-Impuls-Verteilung der Materie
- Gravitationswirkungen $\Leftrightarrow$ Krümmung der Raumzeit
- Ricci-Tensor und Ricci-Skalar

$$R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta}, \quad R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} = R^{\beta}{}_{\beta}$$

- Einsteinsche Feldgleichungen

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}$$

- $T^{\alpha\beta}$: Energie-Impuls-Tensor

Einstein-Feldgleichungen der Gravitation II

- T^{00}: Energiedichte der Materie; $T^{0j} = c g^j$ mit g^j Impulsdichte der Materie; T^{ab}: beschreibt Spannungen in Materie
- Bianchi-Identität: $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$
- $\Rightarrow$ lokale Energie-Impuls-Erhaltung: $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$
- Analogie in Elektrodynamik: Eichinvarianz $\Leftrightarrow$ Ladungserhaltung: $\nabla_\mu j^\mu = 0$
- J. A. Wheeler:
  Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve!

Schwarzschild-Lösung

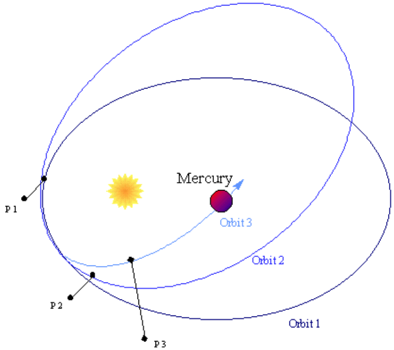
- Vakuumlösung für kugelsymmetrisches Gravitationsfeld (analog zu Coulomb-Feld in E-Dynamik)
- Birkhoff-Theorem: Metrik statisch

$$\mathrm{d}s^2 = c\,\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

- Schwarzschildradius: $r_\mathrm{S} = 2GM/c^2$
- falls Materieverteilung auf Kugel mit Radius $< r_\mathrm{S}$ beschränkt: „schwarzes Loch!“

Experimentelle Bestätigung der ART

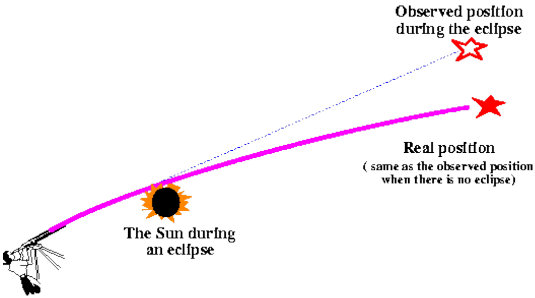
- Precession of Perihel des Merkur
  (Perihel=sonnennächster Punkt der Merkurbahn um Sonne)

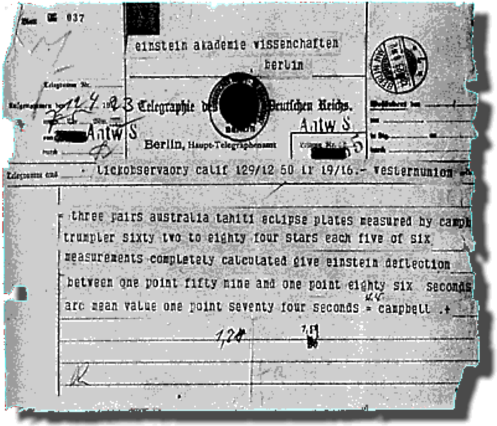


- Periheldrehung um $\simeq 5600''$ pro Jahrhundert
- nach Korrektur von Störungen durch andere Planeten
  43” pro Jahrhundert nur durch Einsteins ART erklärbar!

Experimentelle Bestätigung der ART

- Lichtablenkung durch Gravitation





037

einstein akademie wissenchaften
berlin

Telegraphie des Deutschen Reichs.

Antw S

Berlin, Haupt-Telegraphenamt

lickobservaory calif 129/12 50 lr 19/16.- westernunion

three pairs australia tahiti eclipse plates measured by campb
trumpler sixty two to eighty four stars each five of six
measurements completely calculated give einstein deflection
between one point fifty nine and one point eighty six seconds
arc mean value one point seventy four seconds = campbell .+

- Licht (wie alle „Materie“) um 1,75” an Sonne abgelenkt
- zuerst von Eddington gemessen ⇒ ART korrekt!

Literatur

- M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins [Bor03]
- T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie [Fli12]
- R. J. Adler, General Relativity and Cosmology: A First Encounter [Adl21]
- L. D. Landau and E. M. Lifschitz, Klassische Feldtheorie, (Bd. 2 von Lehrbuch der Theoretischen Physik) [LL92]
- C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation [MTW73]
- S. Weinberg, Gravitation and Cosmologie [Wei72]
- R. d'Inverno and J. Vickers, Introducing Einstein's Relativity [dV22]

Bibliography I

[Adl21] R. J. Adler, General Relativity and Cosmology: A First Encounter, Springer Nature Switzerland, Cham (2021).
URL https://doi.org/10.1007/978-3-030-61574-1

[Bor03] M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 7 ed. (2003).
URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-55459-9

[dV22] R. d'Inverno, J. Vickers, Introducing Einstein's Relativity, Oxford University Press, 2 ed. (2022).
URL https://doi.org/10.1093/oso/9780198862024.001.0001

[Fli12] T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 6 ed. (2012).

[LL92] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Klassische Feldtheorie, vol. 2 of *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin (1992).

Bibliography II

[MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman, San Francisco (1973).

[Wei72] S. Weinberg, Gravitation and Cosmologie, Wiley&Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto (1972).