Review SRT

Einstein-Postulate

(1) Newton #1 gilt, d.h. es gibt ein Inertialsystem
- Teilchen bewegt sich geradlinig glf. oder verharrt in Ruhe falls $\vec{F}=0$.

- Die physikalischen Gesetze sind in allen ISn gleich

(2) Lichtgeschwindigkeit ist in allen ISn gleich c.
- Die Ausbreitungsgeschw. von em. Wellen im Vakuum ist unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle

Trafo für Raum- und Zeitkoordinaten

Σ: $(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$; Σ' bewegt sich bzgl. Σ mit $\vec{v} = c\vec{\beta} = c\beta\vec{e}_1$

Σ': $(x'^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x^1) \\ \gamma(x^1 - vt) \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Kinematische Effekte

- Zeitdilatation: Zeitdauer in Σ' sei $\Delta t'$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\Delta t'$$

$$dt' = d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dt$$

- Zwillingsparadoxon: $\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\beta^2} < \underbrace{t_2 - t_1}_{=\Delta t}$

- Längenkontraktion L' Ruhelänge: $L = \sqrt{1-\beta^2}\, L'$

Minkowskiraum

Vierervektoren: $(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

$\underline{x} \cdot \underline{y} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$

$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$(x_\mu) = (\eta_{\mu\nu} x^\nu) = \begin{pmatrix} ct \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$

Unter LTn: $\underline{x}' = (x'^\mu) = \hat{\Lambda} \underline{x} = (\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$

$\underline{x}' \cdot \underline{y}' = \underline{x} \cdot \underline{y} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$

$(\hat{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu = \eta_{\nu\rho} \eta^{\mu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma$

$\hat{\Lambda}$ ist Lorentz-Transformationsmatrix

Mechanik

Eigenzeit: $d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dt = dt \frac{1}{c} \sqrt{\frac{d\underline{x}}{dt} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt}}$

$|\beta| < 1 \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} \in \mathbb{R}$

$d\tau$ Lorentz-invariant $\Leftrightarrow$ Lorentz-Skalar

Impuls: $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \; ; \; p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$

invariante Masse (Skalar)

$(p^\mu) = m \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} ; \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow p^0 = \frac{E}{c}$

$E = mc \sqrt{c^2 - v^2} = mc^2 \gamma \underset{|\beta| \ll 1}{\simeq} mc^2 + \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \dots$

$$p_\mu p^\mu = \underline{p}\cdot\underline{p} = (\mathcal{E}/c)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 \frac{d\underline{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\underline{x}}{d\tau} = m^2c^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^{\,2}}$$

Bewegungsgl.:

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \underline{K} \quad \text{(Minkowski-Kraft)}$$

$$\underline{p}\cdot\underline{p} = m^2c^2 = \text{const.} \overset{d/d\tau}{\Rightarrow} 2\,\frac{d\underline{p}}{d\tau}\cdot\underline{p} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{K}\cdot\underline{p} = 0$$

$$\Rightarrow m\,\frac{d^2\underline{x}}{d\tau^2} = \underline{K}$$

Bsp: Teilchen im em. Feld

$$K^\mu = q\,F^{\mu\nu}\,\frac{dx_\nu}{d\tau}$$

$$(F^{\mu\nu}) = -(F^{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

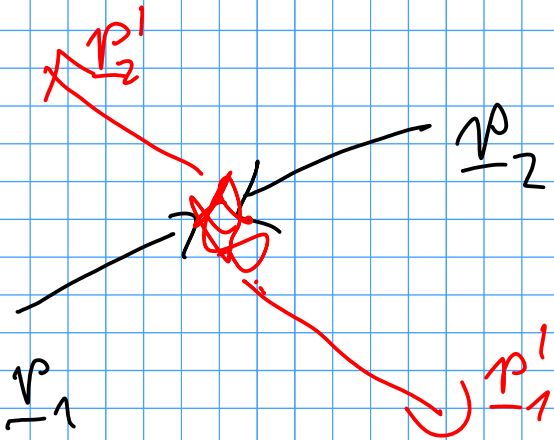
$$(K^\mu) = \begin{pmatrix} q\gamma\,\vec{v}\cdot\vec{E} \\ q\gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \end{pmatrix}$$

$$K^\mu\, m\,\frac{dx_\mu}{d\tau} = K^\mu p_\mu = 0$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{m}\,\vec{p}\cdot\vec{E} \Rightarrow \frac{1}{c}\,\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{q}{m}\,\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$$= \frac{\vec{p}}{m}\cdot\left(\vec{E} + \cancel{\vec{v}\times\vec{B}}\right)$$

Streuung von Teilchen



$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}_1' + \underline{p}_2'$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 \mathrel{\hat{=}} \frac{E_{cm}^2}{c^2}$$

CM: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = 0$

$$t = (p_1 - p_1')^2 \quad ; \quad u = (p_1 - p_2')^2$$

$\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_1 = m_1^2 c^2$ Massenschalen-Bed.

Laborsystem: $\vec{p}_2 = 0$; $\vec{p}_1 \neq 0$

γ-Quanten: wie masselose Teilchen

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = 0 \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = 0$$

$$E = \hbar\omega = hf \quad ; \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{n} \quad ; \quad \vec{k} = \vec{n} k$$

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} = \vec{p}^{\,2} = \hbar^2 k^2 \Rightarrow \omega = ck \text{ (em. Welle)}$$

Bsp.: Comptoneffekt (Hinweis auf Photonen).