Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3
Lösungen zu Blatt 11

Im Folgenden seien Σ und Σ' wieder Inertialsysteme, wobei Σ' sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \beta c \vec{e}_1$ bewege.

Aufgabe 1: Teilchen im homogenen E-Feld (kovariante Rechnung)

In der Vorlesung haben wir ein geladenes relativistisches Teilchen in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = (E, 0, 0)^{\mathrm{T}} = \text{const}$ im nichtkovarianten Dreierformalismus behandelt. In dieser Aufgabe soll dasselbe Problem mit dem manifest kovarianten Formalismus behandelt werden. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{m} F^{\mu\nu} p_\nu = \frac{qE}{mc} \begin{pmatrix} p^1 \\ p^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Lösen Sie zunächst diese Bewegungsgleichungen für p^0 und p^1 mit der Anfangsbedingung $\vec{p}(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Bedingung $p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = \text{const}$ erfüllt ist, wie es sein muss. Verwenden Sie dann die Beziehung

$$\mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}\tau = p^\mu / m, \tag{2}$$

um auch die Weltlinie des Teilchens zu berechnen. Die Anfangsbedingung sei $\underline{x}(0) = \underline{0}$.

Schreiben Sie schließlich das Resultat mit der Zeit t als Parameter, bestimmen Sie also $\vec{x}(t)$ und vergleichen Sie dies mit dem Resultat in der Vorlesung bzw. im Manuskript.

Lösung: Es ist klar, dass mit den gegebenen Anfangsbedingungen $p^2 = p^3 = 0 = \text{const}$ ist. Wir brauchen uns also nur noch um die Gleichungen für p^0 und p^1 zu kümmern:

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{qE}{mc} p^1, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{qE}{mc} p^0. \tag{4}$$

Wir leiten (4) nach τ ab und verwenden dann (3), um p^0 zu eliminieren. Damit ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2 p^1}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{qE}{mc} \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 p^1. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$p^1(\tau) = C_1 \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) + C_2 \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right). \tag{6}$$

Dabei sind C_1 und C_2 Integrationskonstanten. Wegen der Anfangsbedingung $p^1(0) = 0$ ist $C_1 = 0$ und damit

$$p^1(\tau) = C_2 \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right). \tag{7}$$

Mit (4) finden wir daraus

$$p^0(\tau) = \frac{mc}{qE}\frac{\mathrm{d}p^1}{\mathrm{d}\tau} = C_2 \cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right). \tag{8}$$

Nun muss die „Massenschalenbedingung“

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 c^2 \tag{9}$$

erfüllt sein. Setzen wir hier (7) und (8) ein, ergibt sich

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 = C_2^2 \left[\cosh^2\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) - \sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right)\right] = C_2^2 \stackrel{!}{=} m^2 c^2 \Rightarrow C_2 = mc. \tag{10}$$

Es zeigt sich also, dass tatsächlich die Massenschalenbedingung mit der Bewegungsgleichung konsistent ist, wie es von der Herleitung der Bewegungsgleichung her sein muss, und die Integrationskonstante C_2 ist eindeutig bestimmt. Dabei muss $C_2 > 0$ sein, denn wir verlangen zweckmäßigerweise $p^0 = m\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}\tau = mc\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau > 0$, damit t eine monoton wachsende Funktion von τ wird (entsprechend einer Weltlinie, die „vorwärts in der Zeit läuft“). Schließlich ist also

$$p^0(\tau) = mc\cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right), \quad p^1(\tau) = mc\sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right). \tag{11}$$

Weiter gilt für die Raumzeitkoordinaten die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p^0}{m} = c\cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right), \quad \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p^1}{m} = c\sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right). \tag{12}$$

Dies lässt sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen sofort integrieren:

$$t = \frac{mc}{qE}\sinh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right), \quad x^1 = \frac{mc^2}{qE}\left[\cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) - 1\right]. \tag{13}$$

Schließlich ist

$$\cosh\left(\frac{qE}{mc}\tau\right) = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{qE}{mc}\tau\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}t\right)^2} \tag{14}$$

und damit

$$x^1 = \frac{mc^2}{qE}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}t\right)^2} - 1\right]. \tag{15}$$

Dies stimmt in der Tat mit dem Ergebnis im Skript (Gl. (4.7.13)) überein.

Aufgabe 2: Teilchen im Homogenen B-Feld

Lösen Sie die analoge Aufgabe für ein homogenes magnetisches Feld $\vec{B} = (B, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Die kovariante Form der Bewegungsgleichung lautet hier

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{m}F^{\mu\nu}p_\nu = \frac{qB}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p^3 \\ -p^2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Als Anfangsbedingung setzen wir $\vec{p}(0)=(0,p_0^2,0)^{\mathrm{T}}$, $\vec{x}(0)=\vec{0}$. **Lösung:** Hier ergibt sich mit den Anfangsbedingungen $\vec{p}(0)=0$ sofort $p^0=\sqrt{(mc)^2+(p_0^2)^2}=\text{const}$, $p^1=0=\text{const}$ und für die übrigen Impulskomponenten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}\tau}=\frac{qB}{m}p^3 \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^3}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{qB}{m}p^2. \tag{18}$$

Auch hier führt wieder das Bilden der Ableitung von (18) nach τ und Verwendung von (17) zum Ziel:

$$\frac{\mathrm{d}^2p^3}{\mathrm{d}\tau^2}=-\frac{qB}{m}\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}\tau}=-\left(\frac{qB}{m}\right)^2p^3. \tag{19}$$

Die Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet

$$p^3(\tau)=C\sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right) \tag{20}$$

und mit (18) und der Anfangsbedingung

$$p^2=-\frac{m}{qB}\frac{\mathrm{d}p^3}{\mathrm{d}\tau}=-C\cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right)\Rightarrow C=-p_0^2. \tag{21}$$

Damit ist

$$p^2=p_0^2\cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right),\quad p^3=-p_0^2\sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right). \tag{22}$$

Dies ist wieder konsistent mit der Massenschalenbedingung, denn es ist

$$(p_0)^2-\vec{p}^2=(mc)^2=\text{const}. \tag{23}$$

Für die Raum-Zeitkoordinaten folgt daraus

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}=c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{p^0}{m}=\gamma c\rightarrow t=\gamma\tau\quad\text{mit}\quad\gamma=\frac{p^0}{mc}=\sqrt{1+\left(\frac{p_2^0}{mc}\right)^2}. \tag{24}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{m}\vec{p}=\frac{p_0^2}{m}\begin{pmatrix}0\\ \cos(qB\tau/m)\\ -\sin(qB\tau/m)\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Integrieren wir dies nach τ und beachten die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}(\tau)=\frac{p_0^2}{qB}\begin{pmatrix}0\\ \sin(qB\tau/m)\\ \cos(qB\tau/m)-1\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Die Bahn ist also ein Kreis mit dem Radius $p_0^2/(qB)$, der in der x^2-x^3-Ebene im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Mit (24) können wir die Bahn auch als Funktion der Zeit ausdrücken:

$$\vec{x}(t)=\frac{p_0^2}{qB}\begin{pmatrix}0\\ -\sin(\omega t)\\ \cos(\omega t)-1\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Das Teilchen läuft also mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega = \frac{qB}{m\gamma} = \frac{qB\sqrt{1-\beta^2}}{m} \tag{28}$$

auf dem besagten Kreis. Im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall, wo die analoge Rechnung zur Zyklotronfrequenz $\omega = qB/m$ führt (was ja auch für $|\beta| \ll 1$ eine gute Näherung zum relativistischen Resultat (28) ist), hängt hier diese Frequenz von der Geschwindigkeit $\beta = v_0/c = p_0^2/(mc) = \text{const}$ ab. Dabei ist

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_0^2}{qB}\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Der Kreisradius ist

$$R = \frac{p_0^2}{qB} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{m\gamma v_0}{qB}. \tag{30}$$

Aufgabe 3: Compton-Streuung

Wir betrachten die elastische Streuung eines γ-Quants an einem ruhenden Elektron $\gamma + \mathrm{e}^- \rightarrow \gamma + \mathrm{e}^-$. Das γ-Quant kann man hinsichtlich Energie und Impuls wie ein Teilchen mit der invarianten Masse $m_\gamma = 0$ behandeln. Sein Viererimpuls ist also $\underline{p}_\gamma = (p_\gamma, p_\gamma, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ (wir nehmen also o.b.d.A. an, dass der Photonenimpuls im Anfangszustand in x^1-Richtung zeigt. Das Elektron ist ein Teilchen mit der invarianten Masse $m_\mathrm{e} = 511\ \mathrm{keV}/c^2$ und besitzt entsprechend einen Viererimpuls $\underline{p}_\mathrm{e} = (\mathscr{E}_\mathrm{e}/c, \vec{0})^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie die Viererimpulse des Photons und des Elektrons im Endzustand. Wir nehmen an der Streuwinkel des Photons sei ϑ. Das ist der Winkel zwischen $\vec{p}_\gamma'$ und $\vec{p}_\gamma$. Geben Sie die Formel für die Energie des Photons im Endzustand in Abhängigkeit vom Streuwinkel und von der Photonenenergie $\mathscr{E}_\gamma = p_\gamma c$ im Anfangszustand an. Berechnen Sie daraus die Wellenlängenänderung zwischen dem Ursprünglichen und dem gestreuten Photon. Verwenden Sie dazu die de Broglie-Beziehung $\lambda = 2\pi\hbar/p_\gamma$.

Lösung: Im Anfangszustand ist

$$\underline{p}_\gamma = \begin{pmatrix} p_\gamma \\ p_\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_\mathrm{e} = \begin{pmatrix} m_\mathrm{e} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

und im Endzustand wegen der Energie-Impulserhaltung $\underline{p}_\gamma + \underline{p}_\mathrm{e} = \underline{p}_\gamma + \underline{p}_\mathrm{e}$

$$\underline{p}_\gamma' = \begin{pmatrix} p_\gamma' \\ p_\gamma' \cos\vartheta \\ p_\gamma' \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_\mathrm{e}' = \begin{pmatrix} m_\mathrm{e} c + p_\gamma - p_\gamma' \\ p_\gamma - p_\gamma' \cos\vartheta \\ -p_\gamma' \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Dabei ergibt sich der Photonenviererimpuls daraus, dass der Streuwinkel ϑ sein soll und die Massenschalenbedingung für ein masseloses Teilchen $\underline{p}_\gamma \cdot \underline{p}_\gamma = 0$ erfüllen muss. Um den Impuls des gestreuten Photons zu berechnen, müssen wir noch die Massenschalenbedingung für $\underline{p}_\mathrm{e}'$ ausnutzen.

Einfacher ist aber die Rechnung, wenn man zunächst die Viererimpulserhaltungsgleichung im Sinne des Minkowski-Produktes quadriert und die Massenschalenbedingungen anwendet:

$$(\underline{p}_\gamma + \underline{p}_\mathrm{e})^2 = \underline{p}_\gamma^2 + \underline{p}_\mathrm{e}^2 + 2\underline{p}_\gamma \cdot \underline{p}_\mathrm{e} = m_\mathrm{e}^2 c^2 + 2 m_\mathrm{e} c\, p_\gamma. \tag{33}$$

Genauso folgt

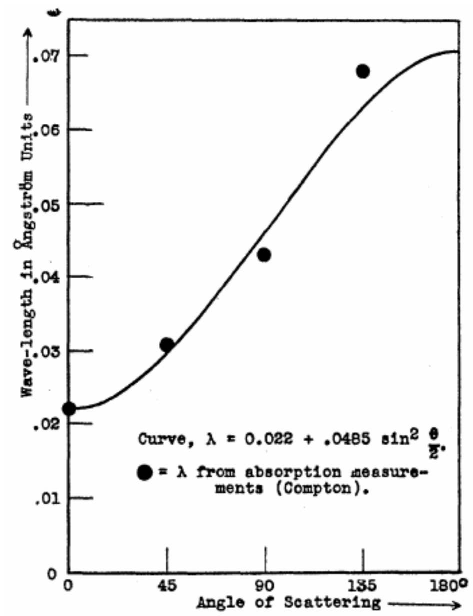
$$(\underline{p}'_\gamma + \underline{p}'_\mathrm{e})^2 = m_\mathrm{e}^2 c^2 + 2\underline{p}'_\gamma \cdot \underline{p}'_\mathrm{e} \tag{34}$$

Setzt man (33) mit (34) gleich (wegen der Viererimpulserhaltung), erhält man

$$m_\mathrm{e} c\, p_\gamma = \underline{p}'_\gamma \cdot \underline{p}'_\mathrm{e}. \tag{35}$$

Verwenden wir nun wieder die Viererimpulserhaltung, folgt mit $\underline{p}'_\mathrm{e} = \underline{p}_\mathrm{e} + \underline{p}_\gamma - \underline{p}'_\gamma$

$$m_\mathrm{e} c\, p_\gamma = \underline{p}'_\gamma (\underline{p}_\mathrm{e} + \underline{p}_\gamma - \underline{p}'_\gamma) = \underline{p}'_\gamma (\underline{p}_\mathrm{e} + \underline{p}_\gamma) = m_\mathrm{e} c\, p'_\gamma + p_\gamma p'_\gamma (1 - \cos\vartheta). \tag{36}$$



Einfacher wird diese Beziehung in der Tat für die Wellenlängen des ursprünglichen und des gestreuten Photons: $\lambda = 2\pi\hbar/p_\gamma$ und $\lambda' = 2\pi\hbar/p'_\gamma$. Multiplizieren wir also (36) mit $2\pi\hbar/(m_\mathrm{e} c\, p'_\gamma p_\gamma)$, erhalten wir

$$\lambda' = \lambda + \lambda_{\text{Compton}}^{(\mathrm{e})}(1 - \cos\vartheta), \tag{37}$$

wobei die Compton-Wellenlänge des Elektrons durch

$$\lambda_{\text{Compton}}^{(\mathrm{e})} = \frac{2\pi\hbar}{m_\mathrm{e} c} = \frac{2\pi\hbar c}{m_\mathrm{e} c^2} \tag{38}$$

gegeben ist. Den Zahlenwert erhält man am einfachsten, wenn man sich $\hbar c \approx 197{,}327\ \mathrm{MeV\,fm}$ merkt. Dabei ist $1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}$ (1 Femtometer oder zu Ehren Fermis auch 1 Fermi genannt). Demnach ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons $\lambda_{\text{Compton}}^{(\mathrm{e})} \approx 2\pi \cdot 197{,}327\ \mathrm{MeV\,fm}/(0{,}511\ \mathrm{MeV}) \approx 2{,}426 \cdot 10^{-12}\mathrm{m} = 0.02426\ \text{Å}$. Gemäß (37) hängt die Wellenlängenänderung

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{\text{Compton}}^{(\mathrm{e})}(1 - \cos\vartheta) = 2\lambda_{\text{Compton}}^{(\mathrm{e})} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{39}$$

nicht von der Energie des einlaufenden Photons sondern nur vom Streuwinkel des Photons ab. Die Formel (39) folgte bereits aus Einsteins naivem Photonenmodell von 1905 und wurde durch Compton in 1923 im Rahmen der Messgenauigkeit experimentell bestätigt (s. den nebenstehenden Plot aus der Originalarbeit [?]).

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-l3-WS2425/index.html`