

## Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 Lösungen zu Blatt 9

### Aufgabe 1: Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld

Betrachten Sie ein geladenes Teilchen (Masse  $m$ , Ladung  $q$ , spin  $s = 1/2$ ) im homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_3 = \text{const.}$  Wie in der Vorlesung besprochen, ist dann der Hamilton-Operator durch

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} [\vec{\mathbf{p}} - q\vec{A}(\vec{x})]^2 - \frac{gqB}{2m} \cdot \mathbf{s}_3 \quad (1)$$

gegeben. Dabei ist  $\vec{A}$  ein Vektorpotential für das Magnetfeld, d.h.  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Wir wollen das Energieeigenwertproblem lösen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Zeigen Sie, dass  $\vec{A}(\vec{x}) = -Bx_2\vec{e}_1$  ein Vektorpotential für das homogene Magnetfeld ist, also  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} = B\vec{e}_3$  gilt.

**Lösung:** Es ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \vec{B}. \quad (2)$$

Folglich ist  $\vec{A}$  tatsächlich ein Vektorpotential für das vorgegebene homogene Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_3$ .

- (b) Zeigen Sie, dass mit diesem Vektorpotential  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_3$  und  $\mathbf{s}_3$  einen vollständigen Satz kompatibler Observabler bilden, indem Sie die Kommutativität dieser Operatoren untereinander nachweisen.

**Lösung:** Da  $\mathbf{s}_3$  mit allen Komponenten  $\vec{x}$  und  $\vec{\mathbf{p}}$  kommutiert, kommutiert  $\mathbf{s}_3$  mit allen angegebenen weiteren Observablen. Da weiter der Hamiltonoperator (1) mit dem angegebenen Vektorpotential

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + (\mathbf{p}_1 + qBx_2)^2] - \frac{gqB}{2m} \mathbf{s}_3 \quad (3)$$

nicht von den Ortskomponenten  $x_1$  und  $x_3$  abhängt, ist auch  $[\mathbf{H}, \mathbf{p}_1] = [\mathbf{H}, \mathbf{p}_3] = 0$ . Wegen  $[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0$  für alle  $j, k \in \{1, 2, 3\}$  kommutieren also alle vier angegebenen selbstadjungierten Operatoren, und es existieren simultane Eigenfunktionen  $u_{E, p_1, p_3, \sigma_3}(\vec{x})$ .

- (c) Zeigen Sie, dass sich das Eigenwertproblem für die simultanen Eigenzustände  $u_{E, p_1, p_3, \sigma_3}(\vec{x})$  bzgl. der Eigenwertgleichung für  $\mathbf{H}$  (Eigenwert  $E$ ) auf einen harmonischen Oszillator reduziert, dessen Energieeigenwerte und -zustände aus der Vorlesung bekannt sind und geben Sie die entsprechenden Energieeigenwerte an. Dabei darf das aus der Vorlesung bekannte Resultat für die Energieeigenwerte eines harmonischen Oszillators verwendet werden.

**Hinweis:** Es darf verwendet werden, dass die Eigenwerte der übrigen Observablen  $p_1, p_3 \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_3 \in \{1/2, -1/2\}$  sind.

**Lösung:** Das verbliebene Eigenwertproblem

Die Wellenfunktionen  $u_{E, p_1, p_3, \sigma_3}(\vec{x}) \in \mathbb{C}^2$ , d.h. Spinoren zum Spin  $s = 1/2$ . Aus den Eigenwertgleichungen für die beiden Impulse und  $\hat{s}_3$  folgt

$$u_{E, p_1, p_3, \sigma_3}(\vec{x}) = U_{E, p_1, p_3, \sigma_3}(x_2) \exp\left(\frac{ip_1 x_1 + ip_3 x_3}{\hbar}\right) \chi_{\sigma_3} \quad \text{mit} \quad \chi_{\hbar/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\hbar/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Wir müssen mit diesem Ansatz nun noch das Eigenwertproblem für  $\mathbf{H}$  lösen, d.h. die möglichen Eigenwerte  $E$  und die Wellenfunktion  $U_{E,p_1,p_3,\sigma_3}$  finden. Dabei

$$\mathbf{H}u_{E,p_1,p_3,\sigma_3} = E u_{E,p_1,p_3,\sigma_3} \quad (5)$$

reduziert sich auf das Energieeigenwertproblem für einen harmonischen Oszillator, denn in Anwendung auf den Ansatz(4) können wir für die Operatoren  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_3$  und  $\mathbf{s}_3$  einfach die entsprechenden Eigenwerte einsetzen, d.h.

$$\mathbf{H}u_{E,p_1,p_3,\sigma_3} = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_2^2 + p_3^2 + (p_1 + qBx_2)^2] gqB\sigma_3 u_{E,p_1,p_3,\sigma_3}. \quad (6)$$

Dies können wir auf die Form

$$\mathbf{H}u_{E,p_1,p_3,\sigma_3} = \left[ \frac{1}{2m} \mathbf{p}_2^2 + \frac{m\omega^2}{2} (x_2 - x_{20})^2 + \frac{1}{2m} p_3^2 - \frac{gqB}{2m} \sigma_3 \right] u_{E,p_1,p_3,\sigma_3} \quad (7)$$

mit

$$x_{20} = -\frac{p_1}{qB}, \quad \omega = \frac{qB}{m} \quad (8)$$

bringen. Weiter lassen sich nach dem Einsetzen von (4) der Exponentialfaktor sowie  $\chi_{\sigma_3}$  verkürzen. Wir erhalten also als Gleichung für  $U_{E,p_1,p_3,\sigma_3}$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{eff}} U_{E,p_1,p_3,\sigma_3} &= \left[ \frac{1}{2m} \mathbf{p}_2^2 + \frac{m\omega^2}{2} (x_2 - x_{20})^2 \right] u_{E,p_1,p_3,\sigma_3} \\ &= \left( E - \frac{1}{2m} p_3^2 + \frac{gqB}{2m} \sigma_3 \right) U_{E,p_1,p_3,\sigma_3} = E_{\text{eff}} U_{E,p_1,p_3,\sigma_3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Der Hamiltonoperator  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  ist der Hamiltonoperator eines eindimensionalen in  $x_2$ -Richtung um die Gleichgewichtslage bei  $x_{20}$  schwingenden harmonischen Oszillators. Die Energieeigenwerte (und auch die Eigenfunktionen) sind aus der Vorlesung bekannt. Hier begnügen wir uns mit den Eigenwerten:

$$E_{\text{eff}} = E - \frac{1}{2m} p_3^2 + \frac{gqB}{2m} \sigma_3 = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}. \quad (10)$$

Die Energieeigenwerte für das Teilchen im Magnetfeld sind also

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2m} p_3^2 - \frac{gqB}{2m} \sigma_3. \quad (11)$$

Da  $E$  nicht von dem Eigenwert  $p_1 \in \mathbb{R}$  abhängt, ist jeder Energielevel unendlichfach entartet.

**Bemerkung:** Die für jeden Wert  $p_3 \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_3 \in \{\hbar/2, -\hbar/2\}$  diskreten Energie-Level, die durch  $n$  durchnummeriert werden, nennt man **Landau-Niveaus**.

Dies entspricht der klassischen Bewegung des geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld. Da in Richtung des Magnetfeldes, also in unserem Fall  $\vec{e}_3$ , keine Kraft wirkt, bewegt sich das Teilchen entlang dieser Richtung wie ein freies Teilchen. Die Projektion der Bewegung auf die zu  $\vec{B}$  senkrechte  $(x_1, x_2)$ -Ebene ist hingegen eine mit der oben gefundenen **Zyklotronfrequenz**  $\omega$  gleichförmig (für  $q > 0$  im Uhrzeigersinn, für  $q < 0$  entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufenen Kreisbahn, also stets eine im Endlichen gebundene Bewegung. Dabei entspricht  $x_{20}$  der entsprechenden Komponente des auch beim klassischen Problem resultierenden Kreismittelpunkts.