H. van Hees **Wintersemester 2022/2023**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte): Bahndrehimpulseigenzustände für $\ell = 1$

Wir betrachten das simultane Eigenwertproblem für die Operatoren $\vec{\mathbf{l}}^2$ und $\mathbf{l}_3$, wobei $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{L}}/\hbar = -\mathrm{i}\vec{x} \times \vec{\nabla}$ der dimensionslose Bahndrehimpuls-Operator ist. Wir rechnen in Kugelkoordinaten. Die kartesischen Komponenten sind durch

$$\begin{aligned} \hat{l}_1 &= \mathrm{i}(\sin\varphi\,\partial_\vartheta + \cot\vartheta\cos\varphi\,\partial_\varphi), \\ \hat{l}_2 &= \mathrm{i}(-\cos\varphi\,\partial_\vartheta + \cot\vartheta\sin\varphi\,\partial_\varphi), \\ \hat{l}_3 &= -\mathrm{i}\partial_\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die „Leiteroperatoren" durch

$$\begin{aligned} \hat{l}_+ &= \hat{l}_1 + \mathrm{i}\hat{l}_2 = \exp(\mathrm{i}\varphi)(\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi), \\ \hat{l}_- &= \hat{l}_1 - \mathrm{i}\hat{l}_2 = \exp(-\mathrm{i}\varphi)(-\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi) \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben sind. Dabei ist $\cot\vartheta = \cos\vartheta/\sin\vartheta$.

(b) (2 Punkte) Für die folgende Rechnung ist es bequemer, statt ϑ die neue Variable $u = \cos\vartheta$ zu verwenden. Dies ist eine umkehrbar eindeutige Variablentransformation, da für die Kugelkoordinaten $\vartheta \in [0, \pi]$ ist und $\cos\vartheta$ auf diesem Intervall monoton fallend ist. Es gilt in diesem Intervall auch $\sin\vartheta \geq 0$ und damit $\sin\vartheta = +\sqrt{1-u^2}$. Zeigen Sie, dass mit dieser neuen Variable die Leiteroperatoren durch

$$\begin{aligned} \hat{l}_+ &= \exp(\mathrm{i}\varphi)\left(-\sqrt{1-u^2}\,\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right), \\ \hat{l}_- &= \exp(-\mathrm{i}\varphi)\left(+\sqrt{1-u^2}\,\partial_u + \mathrm{i}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\partial_\varphi\right) \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben sind.

(c) (3 Punkte) Wir suchen nun die simultanen Eigenvektoren von $\vec{\mathbf{l}}^2$ zum Eigenwert $\ell(\ell+1) = 2$, also $\ell = 1$, und $\mathbf{l}_3$ zu den Eigenwerten $m \in \{-1, 0, 1\}$. Die Eigenfunktionen besitzten die Form

$$u_{\ell,m}(u,\varphi) = U_{\ell,m}(u)\exp(\mathrm{i}m\varphi). \tag{4}$$

Zeigen Sie zuerst, dass $\hat{l}_3 u_{\ell m} = m u_{\ell m}$ ist und bestimmen Sie dann $u_{\ell,-1}$ aus der Bedingung $\hat{l}_- u_{1,-1} = 0$ (s. Skript). Die Normierung ergibt sich daraus, dass das Skalarprodukt für Wellenfunktionen $\psi(\vartheta,\varphi) \equiv \psi(u,\varphi)$, die auf der Einheitskugel definiert sind, durch

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\Omega = \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\vartheta\, \psi_1^*(\vartheta,\varphi)\psi_2(\vartheta,\varphi) = \int_{-1}^1 \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \psi_1^*(u,\varphi)\psi_2(u,\varphi) \tag{5}$$

gegeben ist, d.h. wir normieren $u_{\ell,-1}$ so, dass

$$\left\langle u_{1,-1} \middle| u_{1,-1} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi |u_{1,-1}(u,\varphi)|^2 = 1 \tag{6}$$

ist.

Hinweis: Das Resultat lautet

$$u_{1,-1}(u,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{1-u^2} \exp(\mathrm{i}\varphi) \equiv \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(\mathrm{i}\varphi). \tag{7}$$

(d) (3 Punkte) Verwenden Sie nun die Formel

$$\hat{l}_+ u_{1,m} = \sqrt{(m+2)(1-m)} u_{1,m+1} \tag{8}$$

um aus (7) zuerst $u_{1,0}$ und dann $u_{1,1}$ zu berechnen. Zeigen Sie, dass $\hat{l}_+ u_{1,1} = 0$ ist, wie es sein muss.

Hinweis: Die Ergebnisse für die gesuchten Eigenfunktionen zur Drehimpulsquantenzahl 1 sind die entsprechenden Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_{1,-1}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(\mathrm{i}\varphi), \\ \mathrm{Y}_{1,0}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \\ \mathrm{Y}_{1,1}(\vartheta,\varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(-\mathrm{i}\varphi). \end{aligned} \tag{9}$$

Freiwillige Knobelaufgabe (5 Zusatzpunkte)

Warum gibt es keine *Bahndrehimpulseigenfunktionen* zum Eigenwert $\ell = 1/2$? Gehen Sie genau analog wie in der obigen Aufgabe vor und zeigen Sie, dass die Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = 1/2$ zu einem Widerspruch führt. Im Skript wird auf andere Weise allgemein gezeigt, dass es keine halbzahligen Bahndrehimpulsquantenzahlen gibt.

Bemerkung: Freilich kommen in der Natur Drehimpulse mit halbzahligen Drehimpulsquantenzahlen vor. Dies ist aber kein (reiner) Bahndrehimpuls sondern geht auf einen nur in der Quantenmechanik vorkommenden Drehimpuls, der in der klassischen Mechanik unbekannt ist, zurück, den sog. **Spin**. Der Spin ist eine Art intrinsischer Drehimpuls von Elementarteilchen. Z.B. besitzt das Elektron den Spin $s = 1/2$ (d.h. die Spindrehimpulsquantenzahl ist $s = 1/2$ und es gibt zwei Eigenwerte von $\hat{s}_3$, $m_s \in \{-1/2, 1/2\}$. Der Operator $\hat{\vec{s}}^2$ besitzt entsprechend den Eigenwert $s(s+1) = 3/4$. Der Spin wird in der Vorlesung später noch aufführlich behandelt.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/theo3-l3-WS2223/index.html`