H. van Hees **Wintersemester 2022/2023**

Übungen zur Theoretischen Physik 3 für das Lehramt L3 – Blatt 2

Aufgabe 1 [15 Punkte]: Freie Teilchen: Gaußsches Wellenpaket

Wir suchen eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(t,x). \tag{1}$$

mittels eines Fourier-Integralansatzes:

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} A(t,k)\exp(\mathrm{i}kx). \tag{2}$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie durch Einsetzen des Ansatzes in die Schrödinger-Gleichung, dass für A die Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t A = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 A(t,k) \tag{3}$$

gilt.

(b) (3 Punkte) Lösen Sie diese Gleichung für die Anfangsbedingung

$$A(0,k) = A_0(k). \tag{4}$$

(c) (5 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall einer Gaußschen Anfangsbedingung im k-Raum

$$A_0(k) = N\exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \tag{5}$$

mit $N = \text{const}$ und zeigen Sie durch Einsetzen in (2), dass sich für die Wellenfunktion

$$\psi(t,x) = \frac{N}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi m\Delta k^2}{m+2\mathrm{i}\hbar\Delta k^2 t}}\exp\left[-\frac{m^2\Delta k^2}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4 t^2}\left(x-\frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2 + \mathrm{i}\Phi(t,x)\right] \tag{6}$$

mit der Phase

$$\Phi(t,x) = \frac{m\Delta k^2}{m^2+4\hbar^2\Delta k^4 t^2}\left(2\hbar\Delta k^2 x^2 t + \frac{m x k_0}{\Delta k^2} - \frac{\hbar k_0^2 t}{2\Delta k^2}\right) \tag{7}$$

ergibt.

Hinweis 1: Sie können die Formel für das allgemeine Gauß-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k\exp(-ak^2+bk) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \tag{8}$$

die für $\mathrm{Re}\,a > 0$ gilt, ohne Beweis verwenden. Außerdem ist Anhang D im Skript zur Theoretischen Physik II [`Link zum pdf`] nützlich.

Hinweis 2: Sie können die beiden letzten Aufgaben auch bearbeiten, wenn Sie diesen Aufgabenteil nicht bis zu Ende gelöst haben, denn Sie benötigen nur das Endergebnis (6).

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Ortswahrscheinlichkeitsverteilung $P(t,\vec{x}) = |\psi(t,\vec{x})|^2$.

(e) (2 Punkte) Lesen Sie Mittelwert und Standardabweichung für den Ort x ab und interpretieren Sie das Resultat physikalisch.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass eine Gauß-Verteilung für x mit Mittelwert x_0 und Standardabweichung Δx durch

$$P(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta x} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}\right] \tag{9}$$

gegeben ist.