

Review SRT

Einstein-Postulate

- (1) Newton #1 gilt, d.h. es gibt ein Inertialsystem
- Teilchen bewegt sich geradlinig glf. oder verhalten Ruhe falls $\vec{F} = 0$.
 - Die physikalischen Gesetze sind in allen ISn gleich
- (2) Lichtgeschwindigkeit ist in allen ISn gleich c .
- Die Ausbreitungsgeschw. von em. Wellen im Vakuum ist unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle
- Träger für Raum- und Zeitkoordinaten

$$\Sigma: (x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}; \quad \Sigma' \text{ bewegt sich bzgl. } \Sigma \text{ mit } \vec{v} = c\vec{\beta} = c\beta \vec{e}_1$$

$$\Sigma': (x'^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma (ct - \beta x^1) \\ \gamma (x^1 - \beta ct) \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Kinematische Effekte

- Zeitdilatation: Zeitdauer in Σ' sei $\Delta t'$
 $\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Delta t'$
 $dt' = dt = \sqrt{1-\beta^2} dt$
- Zwillingsparadoxon: $\Delta \tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\beta^2} < t_2 - t_1 = \Delta t$
- Längenkontraktion L' Ruhelänge: $L = \sqrt{1-\beta^2} L'$

Minkowskiraum

$$\text{Vierervektoren: } (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

$$(x_\mu) = (\eta_{\mu\nu} x^\nu) = \begin{pmatrix} ct \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Unter LTr: } \underline{x}' = (x'^\mu) = \hat{\Lambda} \underline{x} = (\hat{\Lambda}^\mu_\nu x^\nu)$$

$$\underline{x}' \cdot \underline{x}' = \underline{x} \cdot \underline{x} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} \hat{\Lambda}^\mu_\sigma \hat{\Lambda}^\nu_\tau = \eta_{\sigma\tau}$$

$$(\hat{\Lambda}^{-1})^\mu_\nu = \hat{\Lambda}^\mu_\nu = \eta_{\nu\sigma} \eta^{\rho\sigma} \hat{\Lambda}^\rho_\mu$$

↑ $\hat{\Lambda}$ ist Lorentz-Transformationsmatrix

Mechanik

$$\text{Ergebnis: } d\tau = \sqrt{1-\beta^2} dt = dt \frac{1}{c} \sqrt{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

$$|\beta| < 1 \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} \in \mathbb{R}$$

$d\tau$ Lorentz-invariant \Leftrightarrow Lorentz-Skalar

$$\text{Impuls: } p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}; \quad p'^\mu = \hat{\Lambda}^\mu_\nu p^\nu$$

↑ invariante Masse (Skalar)

$$\underline{p} = m c \sqrt{c^2 - \vec{v}^2} = m c^2 \gamma \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow p^0 = \frac{E}{c}$$

$\vec{v} \ll c \Rightarrow m c^2 \sqrt{1-\beta^2} \approx m c^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \dots$

$$p_\mu p^\mu = \underline{p} \cdot \underline{p} = (E/c)^2 - \vec{p}^2 = m^2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow E = c \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Bewegungsgl.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\underline{p}}{dt} &= \underline{K} \text{ (Minkowski-Kraft)} \\ \underline{p} \cdot \underline{p} &= m^2 c^2 = \text{const.} \stackrel{d/dt}{\Rightarrow} 2 \frac{d\underline{p}}{dt} \cdot \underline{p} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{K} \cdot \underline{p} = 0 \\ &\Rightarrow m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = \underline{K} \end{aligned} \right\}$$

Bsp: Teilchen im em. Feld

$$K^\mu = q F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{dt}$$

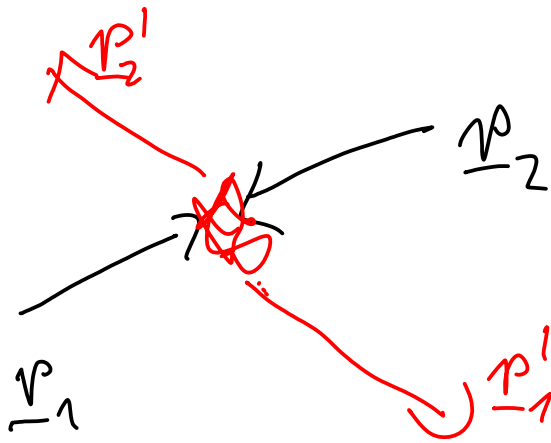
$$(F^{\mu\nu}) = -(F^{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(K^\mu) = \begin{pmatrix} q\gamma \vec{v} \cdot \vec{E} \\ q\gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{pmatrix}$$

$$K^\mu \frac{dx_\mu}{dt} = K^\mu p_\mu = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{dt} &= \frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{E} \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{E} \\ &= \frac{\vec{p}}{m} \cdot (\vec{E} + \cancel{\vec{v} \times \vec{B}}) \end{aligned}$$

Streuung von Teilchen



$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}_1' + \underline{p}_2'$$

$$s = (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 \stackrel{\wedge}{=} \frac{E_{\text{cm}}^2}{c^2}$$

$$\text{CM: } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

$$t = (\underline{p}_1 - \underline{p}_1')^2; \quad \bar{t} = (\underline{p}_1 - \underline{p}_2')^2$$

$$\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_1 = m_1^2 c^2 \quad \text{Massebedingung - Bed.}$$

Laborsystem: $\vec{p}_2 = 0$; $\vec{p}_1 \neq 0$

γ -Quanten: wie masselose Teilchen

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = 0 \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = 0$$

$$E = \hbar \omega = \hbar f; \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{\hbar}{\lambda} \vec{v}; \quad \vec{k} = \vec{v} / \lambda$$

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} = \vec{p}^2 = \hbar^2 k^2 \Rightarrow \omega = c k \quad (\text{em. Welle})$$

Bsp: Comptoneffekt (Stoß auf Photonen).